Kapitola 8 – Aplikace probrané teorie

8.1. Frobeniova věta

8.1.1. VĚTA (Frobeniova)

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in T$, $b_i \in T$ ($i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$). Uvažme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (*)$$

Nechť $A \in T_{m,n}$ je matice soustavy ($*$), $A_r \in T_{m,n+1}$ je rozšířená matice soustavy ($*$),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Platí: Soustava ($*$) má aspoň jedno řešení tehdy a jen tehdy, když $h(A) = h(A_r)$.

Důkaz: Označme

$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$

$\vec{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$

$\vdots$

$\vec{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$

$\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Protože $h(A) = h(A^T)$ (viz 5.3.5.), máme $h(A) = dim\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}\rangle$.

Protože $h(A_r) = h(A_r^T)$ (viz 5.3.5.), máme $h(A_r) = dim\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}\}\rangle$.

(I) Nechť soustava ($*$) má aspoň jedno řešení.

Existují $c_1, c_2, \ldots, c_n \in T$, $\vec{b} = c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + c_n \cdot \vec{a}_n$.

Zřejmě $\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}\rangle \subseteq \langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}\}\rangle$.

Ovšem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}\} \subseteq \langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}\rangle$, takže $\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}\}\rangle \subseteq \langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}\rangle$.

Celkem $\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}\rangle = \langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}\}\rangle$, $h(A) = h(A_r)$.

(II) Nechť $h(A) = h(A_r)$.

Je $\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}\rangle \subseteq \langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}\}\rangle$ a $dim\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}\rangle = dim\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}\}\rangle$.

Z toho plyne, že $\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}\rangle = \langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}\}\rangle$. Pak $\vec{b} \in \langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}\rangle$. Existují tedy $c_1, c_2, \ldots, c_n \in T$, $\vec{b} = c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + c_n \cdot \vec{a}_n$ (viz 2.2.7.). Vidíme, že n-tice $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ řeší soustavu ($*$).

8.2. Cramerova věta

8.2.1. VĚTA (Cramerova)

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in T$ ($i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, n$). Uvažme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (*)$$

Označme

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad d_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

($j=1, 2, \ldots, n$).

Platí:

Jestliže $d\neq 0$, pak soustava ($*$) má právě jedno řešení. V tomto případě pak

$$x_1=\frac{d_1}{d},\ x_2=\frac{d_2}{d},\ \ldots x_n=\frac{d_n}{d}.$$

Důkaz: Nechť $d\neq 0$. Nejdříve ukážeme, že soustava ($*$) má řešení. Zapíšeme soustavu ($*$) v maticovém tvaru: $A\cdot X=B$,

kde $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

$d=|A|\neq 0$, takže matice A je regulární a existuje matice A^{-1} (viz 7.4.3. a 5.6.4.).

Položme $X=A^{-1}\cdot B$. Získali jsme řešení soustavy: $A\cdot X=A\cdot(A^{-1}\cdot B)=(A\cdot A^{-1})\cdot B=E\cdot B=B$.

Soustava ($*$) má tedy aspoň jedno řešení;označme ho $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Zvolme libovolně $j\in\{1, \ldots, n\}$, $e_1, e_2, \ldots, e_n\in T$.

Položme

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & e_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & e_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & e_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Spočítejme $|A'|$ (použijeme rozvoj podle prvků $j-$tého sloupce - viz 7.3.3. a 7.2.1. (VI)):

$$|A'|=\sum_{i=1}^{n} e_i\cdot D'_{ij}.$$

Ovšem $D'_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot A'_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot A_{ij}=D_{ij}$ (viz 7.3.2.), takže $|A'|=\sum_{i=1}^{n} e_i\cdot D_{ij}$.

Dostali jsme toto:

(1) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot D_{ij}=d$

(2) $\sum_{i=1}^{n} b_i\cdot D_{ij}=d_j$

(3) $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\cdot D_{ij}=0$ pro $k\in\{1, \ldots, n\}$, $k\neq j$.

(Uvědomme si, že $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\cdot D_{ij}$ je determinant matice, jež má 2 sloupce stejné – totiž sloupce k a j).

Nechť $j\in\{1, \ldots, n\}$. Víme, že

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot c_1+a_{12}\cdot c_2+\cdots+a_{1n}\cdot c_n&=b_1 \quad |\cdot D_{1j} \\ a_{21}\cdot c_1+a_{22}\cdot c_2+\cdots+a_{2n}\cdot c_n&=b_2 \quad |\cdot D_{2j} \\ &\vdots \\ a_{n1}\cdot c_1+a_{n2}\cdot c_2+\cdots+a_{nn}\cdot c_n&=b_n \quad |\cdot D_{nj} \end{aligned}$$

$$c_1\cdot(a_{11}\cdot D_{1j}+a_{21}\cdot D_{2j}+\cdots+a_{n1}\cdot D_{nj})$$
$$+c_2\cdot(a_{12}\cdot D_{1j}+a_{22}\cdot D_{2j}+\cdots+a_{n2}\cdot D_{nj})$$
$$\vdots$$
$$+c_n\cdot(a_{1n}\cdot D_{1j}+a_{2n}\cdot D_{2j}+\cdots+a_{nn}\cdot D_{nj})=$$
$$=b_1\cdot D_{1j}+b_2\cdot D_{2j}+\cdots+b_n\cdot D_{nj}.$$
$$c_1\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\cdot D_{ij}+c_2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\cdot D_{ij}+\cdots+c_{j-1}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{i,\,j-1}\cdot D_{ij}+c_j\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot D_{ij}+c_{j+1}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{i,\,j+1}\cdot D_{ij}+$$
$$+\cdots+c_n\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{in}\cdot D_{ij}=\sum_{i=1}^{n} b_i\cdot D_{ij}.$$

S ohledem na vztahy (1), (2), (3) dostáváme

$$c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+\ldots+c_{j-1}\cdot 0+c_j\cdot d+c_{j+1}\cdot 0+\cdots+c_n\cdot 0=d_j\,.$$
$$c_j\cdot d=d_j$$
$$c_j=\frac{d_j}{d}\,.$$

8.3. Řešení systémů lineárních rovnic

8.3.1. VĚTA

Nechť T je těleso, $m,\ n\in\mathbb{N}$, $a_{ij}\in T$, $b_i\in T$ ($i=1,\ 2,\ \ldots m$, $j=1,\ 2,\ \ldots n$). Uvažme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}\cdot x_n&=b_1\\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}\cdot x_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\cdots+a_{mn}\cdot x_n&=b_m\,. \end{aligned} \qquad (\,*\,)$$

Nechť soustava ($**$) vznikla ze soustavy ($*$) užitím konečného počtu následujících úprav:
(1) Nahrazením rovnice tou rovnicí plus jiná rovnice vynásobená nějakým prvkem tělesa T.
(2) Výměnou dvou rovnic.
(3) Vynásobením rovnice nějakým nenulovým prvkem tělesa T.
Pak soustava ($**$) je ekvivalentní původní soustavě ($*$) v tom smyslu, že soustavy ($**$) a ($*$) mají tatáž řešení.

Důkaz:
Stačí ukázat následující:
Nechť soustava ($**$) vznikla ze soustavy ($*$) užitím jedné z úprav (1), (2), (3). Pak soustava ($**$) je ekvivalentní soustavě ($*$).
(I) Nechť soustava ($**$) vznikla užitím úpravy (1).
Nechť $p,\ q\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$, $p\neq q$, $c\in T$. Nechť soustava ($**$) má tvar

$$a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}\cdot x_n=b_1$$
$$\vdots$$
$$(a_{p1}+c\cdot a_{q1})\cdot x_1+(a_{p2}+c\cdot a_{q2})\cdot x_2+\cdots+(a_{pn}+c\cdot a_{qn})\cdot x_n=b_p+c\cdot b_q$$
$$\vdots$$
$$a_{q1}\cdot x_1+a_{q2}\cdot x_2+\cdots+a_{qn}\cdot x_n=b_q$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\cdots+a_{mn}\cdot x_n=b_m.$$

Předpokládejme, že $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\in T^n$, $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ řeší soustavu ($*$). Chceme ukázat, že $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ řeší soustavu ($**$).

Počítejme:
$(a_{p1}+c\cdot a_{q1})\cdot y_1+(a_{p2}+c\cdot a_{q2})\cdot y_2+\cdots+(a_{pn}+c\cdot a_{qn})\cdot y_n=$
$=a_{p1}\cdot y_1+c\cdot a_{q1}\cdot y_1+a_{p2}\cdot y_2+c\cdot a_{q2}\cdot y_2+\cdots+a_{pn}\cdot y_n+c\cdot a_{qn}\cdot y_n=$
$=(a_{p1}\cdot y_1+a_{p2}\cdot y_2+\cdots+a_{pn}\cdot y_n)+c\cdot(a_{q1}\cdot y_1+a_{q2}\cdot y_2+\cdots+a_{qn}\cdot y_n)=$
$=b_p+c\cdot b_q.$

Nyní naopak. Předpokládejme, že $(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in T^n$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ řeší soustavu ($**$). Chceme ukázat, že $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ řeší soustavu ($*$). Počítejme:
$a_{p1}\cdot y_1+a_{p2}\cdot y_2+\cdots+a_{pn}\cdot y_n=$
$=(a_{p1}\cdot y_1+a_{p2}\cdot y_2+\cdots+a_{pn}\cdot y_n)+c\cdot(a_{q1}\cdot y_1+a_{q2}\cdot y_2+\cdots+a_{qn}\cdot y_n)$
$-c\cdot(a_{q1}\cdot y_1+a_{q2}\cdot y_2+\cdots+a_{qn}\cdot y_n)=$
$=a_{p1}\cdot y_1+c\cdot a_{q1}\cdot y_1+a_{p2}\cdot y_2+c\cdot a_{q2}\cdot y_2+\cdots+a_{pn}\cdot y_n+c\cdot a_{qn}\cdot y_n-c\cdot b_q=$
$=(a_{p1}+c\cdot a_{q1})\cdot y_1+(a_{p2}+c\cdot a_{q2})\cdot y_2+\cdots+(a_{pn}+c\cdot a_{qn})\cdot y_n-c\cdot b_q=$
$=b_p+c\cdot b_q-c\cdot b_q=$
$=b_p.$

(II) Nechť soustava ($**$) vznikla užitím úpravy (2). Je zřejmé, že soustava ($**$) je ekvivalentní soustavě ($*$).

(III) Nechť soustava ($**$) vznikla užitím úpravy (3).
Nechť $p\in\{1, 2, \ldots, m\}$, $c\in T$, $c\neq 0$. Nechť soustava ($**$) má tvar

$$\begin{aligned}
a_{11}\cdot x_1+\quad a_{12}\cdot x_2+\cdots+\quad a_{1n}\cdot x_n&=b_1\\
&\vdots\\
c\cdot a_{p1}\cdot x_1+c\cdot a_{p2}\cdot x_2+\cdots+c\cdot a_{pn}\cdot x_n&=c\cdot b_p\\
&\vdots\\
a_{m1}\cdot x_1+\quad a_{m2}\cdot x_2+\cdots+\quad a_{mn}\cdot x_n&=b_m.
\end{aligned}$$

Předpokládejme, že $(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in T^n$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ řeší soustavu ($*$). Chceme ukázat, že $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ řeší soustavu ($**$). Počítejme:
$c\cdot a_{p1}\cdot y_1+c\cdot a_{p2}\cdot y_2+\cdots+c\cdot a_{pn}\cdot y_n=$
$=c\cdot(a_{p1}\cdot y_1+a_{p2}\cdot y_2+\cdots+a_{pn}\cdot y_n)=$
$=c\cdot b_p.$

Nyní naopak. Předpokládejme, že $(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in T^n$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ řeší soustavu ($**$). Chceme ukázat, že $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ řeší soustavu ($*$). Počítejme:
$a_{p1}\cdot y_1+a_{p2}\cdot y_2+\cdots+a_{pn}\cdot y_n=$
$=c^{-1}\cdot c\cdot(a_{p1}\cdot y_1+a_{p2}\cdot y_2+\cdots+a_{pn}\cdot y_n)=$
$=c^{-1}\cdot(c\cdot a_{p1}\cdot y_1+c\cdot a_{p2}\cdot y_2+\cdots+c\cdot a_{pn}\cdot y_n)=$
$=c^{-1}\cdot c\cdot b_p=$
$=b_p.$

8.3.2. VĚTA
Nechť T je těleso, $m, n\in\mathbb{N}$, $a_{ij}\in T$, $b_i\in T$ ($i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$). Uvažme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}\cdot x_n&=b_1\\
a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}\cdot x_n&=b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\cdots+a_{mn}\cdot x_n&=b_m.
\end{aligned}\qquad (*)$$

Nechť $A_r \in T_{m,n+1}$ je rozšířená matice soustavy ($*$),

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Nechť na matici A_r je aplikován Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus (viz 5.4.2.) a na výstupu je získána matice $\overline{A_r}$, nebo $\overline{\overline{A_r}}$. Nechť

$$\overline{A_r} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} & \overline{b_1} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} & \overline{b_2} \\ \vdots & & & & \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} & \overline{b_m} \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{A_r}} = \begin{pmatrix} \overline{\overline{a_{11}}} & \overline{\overline{a_{12}}} & \cdots & \overline{\overline{a_{1n}}} & \overline{\overline{b_1}} \\ \overline{\overline{a_{21}}} & \overline{\overline{a_{22}}} & \cdots & \overline{\overline{a_{2n}}} & \overline{\overline{b_2}} \\ \vdots & & & & \\ \overline{\overline{a_{m1}}} & \overline{\overline{a_{m2}}} & \cdots & \overline{\overline{a_{mn}}} & \overline{\overline{b_m}} \end{pmatrix}$$

Uvažme následující dvě soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} \overline{a_{11}} \cdot x_1 + \overline{a_{12}} \cdot x_2 + \cdots + \overline{a_{1n}} \cdot x_n &= \overline{b_1} \\ \overline{a_{21}} \cdot x_1 + \overline{a_{22}} \cdot x_2 + \cdots + \overline{a_{2n}} \cdot x_n &= \overline{b_2} \\ &\vdots \\ \overline{a_{m1}} \cdot x_1 + \overline{a_{m2}} \cdot x_2 + \cdots + \overline{a_{mn}} \cdot x_n &= \overline{b_m}. \end{aligned} \qquad (**)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{a_{11}}} \cdot x_1 + \overline{\overline{a_{12}}} \cdot x_2 + \cdots + \overline{\overline{a_{1n}}} \cdot x_n &= \overline{\overline{b_1}} \\ \overline{\overline{a_{21}}} \cdot x_1 + \overline{\overline{a_{22}}} \cdot x_2 + \cdots + \overline{\overline{a_{2n}}} \cdot x_n &= \overline{\overline{b_2}} \\ &\vdots \\ \overline{\overline{a_{m1}}} \cdot x_1 + \overline{\overline{a_{m2}}} \cdot x_2 + \cdots + \overline{\overline{a_{mn}}} \cdot x_n &= \overline{\overline{b_m}}. \end{aligned} \qquad (***)$$

Platí: Soustava ($**$) je ekvivalentní soustavě ($*$) v tom smyslu, že soustavy ($**$) a ($*$) mají tatáž řešení. Také soustavy ($***$) a ($*$) jsou ekvivalentní.

Důkaz:
Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus (5.4.2.) může provádět následující úpravy ve zpracovávané matici:
(1) výměna dvou řádků
(2) vynásobení řádku nenulovým prvkem tělesa T
(3) nahrazení řádku tímto řádkem plus jiný řádek vynásobený nějakým prvkem tělesa T.
Algoritmus provede pouze konečný počet úprav (1), (2), (3). Tvrzení věty nyní ihned plyne z 8.3.1.

8.3.3. POZNÁMKA

Věta 8.3.2. ukazuje, že k řešení systémů lineárních rovnic můžeme používat Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus.

8.3.4. PŘÍKKLAD

Vyřešte soustavu rovnic nad tělesem $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 &= -4 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení: Použijeme Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -15 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Získali jsme tuto ekvivalentní soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad -15x_4 &= -14 \\ x_2 \quad +5x_4 &= 6 \\ x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že zadaná soustava má nekonečně mnoho řešení
$(15p-14,\ -5p+6,\ 2p-1,\ p),\ p \in \mathbb{R}$.

8.3.5. PŘÍKLAD

Vyřešte soustavu rovnic nad tělesem $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_2 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Řešení: Použijeme Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Získali jsme tuto ekvivalentní soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 \quad &= 2 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Vidíme, že zadaná soustava má právě jedno řešení $(1,\ 2,\ -2)$.

8.3.6. PŘÍKLAD

Vyřešte soustavu rovnic nad tělesem $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=4\\ 2x_1+x_2-x_3&=3\\ 3x_1+3x_2+2x_3&=10. \end{aligned}$$

Řešení: Použijeme Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&-1&3\\3&3&2&10\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-3&-7&-5\\0&-3&-7&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&\frac{7}{3}&\frac{5}{3}\\0&-3&-7&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&\frac{7}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&0&3\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&\frac{7}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&\frac{7}{3}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{3}&0\\0&1&\frac{7}{3}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Získali jsme tuto ekvivalentní soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1\qquad -\frac{5}{3}x_3&=0\\ x_2+\frac{7}{3}x_3&=0\\ 0&=1. \end{aligned}$$

Vidíme, že zadaná soustava nemá žádné řešení.

8.4. Homogenní systémy lineárních rovnic

8.4.1. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in T$ ($i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$).
Uvažme následující homogenní soustavu rovnic:

$$\begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 . \end{array} \qquad (*)$$

Nechť $A \in T_{m,n}$ je matice soustavy ($*$),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Nechť W je množina všech řešení soustavy ($*$).
Pak W je podprostor vektorového prostoru T^n a platí vztah $\dim W = n - h(A)$.

Důkaz: Položme $U = T^n$, $V = T^m$. Definujeme zobrazení $\varphi : U \to V$ tímto předpisem:

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A^T \qquad (\vec{x} \in U) .$$

(I) φ je homomorfismus:

Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in U$. Pak $\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}+\vec{y}) \cdot A^T = \vec{x} \cdot A^T + \vec{y} \cdot A^T = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$.
Nechť $\vec{x} \in U$, $c \in T$. Pak $\varphi(c \cdot \vec{x}) = (c \cdot \vec{x}) \cdot A^T = c \cdot (\vec{x} \cdot A^T) = c \cdot \varphi(\vec{x})$.

(II) $Ker\, \varphi$:

Nechť $\vec{x} \in U$. Platí:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in Ker\, \varphi &\Leftrightarrow \varphi(\vec{x}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{x} \cdot A^T = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (\vec{x} \cdot A^T)^T = (\vec{0})^T \\ &\Leftrightarrow A \cdot (\vec{x})^T = (\vec{0})^T \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \vec{x} \text{ řeší soustavu } (*) \\ &\Leftrightarrow \vec{x} \in W \end{aligned}$$

(III) Důsledek: W je podprostor vektorového prostoru U (viz 2.7.4.)

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{Zavedeme označení} \quad \begin{array}{l} \vec{b_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ \vec{b_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) \\ \vdots \\ \vec{b_n} = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \end{array} .$$

(IV) $Im\,\varphi = \langle\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}\rangle$:

$$
\begin{aligned}
Im\,\varphi &= \{\varphi(\vec{x}) | \vec{x} \in U\} \\
&= \{\vec{x} \cdot A^T | \vec{x} \in U\} \\
&= \{(x_1 \cdot a_{11} + x_2 \cdot a_{12} + \cdots + x_n \cdot a_{1n},\ x_1 \cdot a_{21} + x_2 \cdot a_{22} + \cdots + x_n \cdot a_{2n},\ \ldots, \\
&\quad x_1 \cdot a_{m1} + x_2 \cdot a_{m2} + \cdots + x_n \cdot a_{mn}) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in T\} \\
&= \{x_1 \cdot (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) + x_2 \cdot (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) + \cdots + \\
&\quad x_n \cdot (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in T\} \\
&= \{x_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2 \cdot \vec{b}_2 + \cdots x_n \cdot \vec{b}_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in T\} \\
&= \langle\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}\rangle.
\end{aligned}
$$

(V) $dim\,(Im\,\varphi) = h\,(A)$:

$$dim\,(Im\,\varphi) = dim\,(\langle\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}\rangle) = h\,(A^T) = h\,(A).$$

Předposlední rovnost plyne z definice hodnosti matice (definice 5.3.2.), poslední rovnost pak plyne z věty 5.3.5.

(VI) Důsledek: Dle věty 3.2.3. platí: $dim(Ker\,\varphi) + dim(Im\,\varphi) = dim\,U$.
Tedy $dim W + h(A) = n$.