Kapitola 7 – Determinanty

7.1. Definice determinantu

7.1.1. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Determinantem matice A rozumíme následující prvek z tělesa T: $\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\pi(n)}$.

Označení:

$\det A$

$|A|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7.1.2. PŘÍKLAD

(a) Křížové pravidlo: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Zdůvodnění: $S_2 = \{\pi, \rho\}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} + Sg(\rho) \cdot a_{1\rho(1)} \cdot a_{2\rho(2)} \\ &= 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{12} \cdot a_{21} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

(b) Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Zdůvodnění:

π :	$Sg(\pi)$:	$a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot a_{3\pi(3)}$:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	-1	$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	-1	$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	-1	$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$

7.2. Základní vlastnosti determinantů

7.2.1. VĚTA (Základní vlastnosti determinantů)

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Platí:

(I) Jestliže matice A má některý řádek složen ze samých nul, pak $|A|=0$.

(II) Nechť $c \in T$. Jestliže matice A' vznikla z A vynásobením jednoho řádku prvkem c, pak $|A'|=c\cdot|A|$.

(III) Nechť $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, A', $A'' \in T_{n,n}$. Nechť matice A, A', A'' se shodují ve všech řádcích kromě i-tého, nechť

i-tý řádek matice A' je $(a'_{i1}, a'_{i2}, \ldots, a'_{in})$,

i-tý řádek matice A'' je $(a''_{i1}, a''_{i2}, \ldots, a''_{in})$,

i-tý řádek matice A je $(a'_{i1}+a''_{i1}, a'_{i2}+a''_{i2}, \ldots, a'_{in}+a''_{in})$.

Za těchto předpokladů je $|A|=|A'|+|A''|$.

(IV) Jestliže matice A' vznikla z A výměnou dvou řádků, pak $|A'|=-|A|$.

(V) Jestliže matice A má dva řádky stejné, pak $|A|=0$.

(VI) $|A^T|=|A|$

Důkaz:

(I) Nechť $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_{ij}=0$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$|A|=\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot a_{2\pi(2)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdot a_{i+1,\pi(i+1)}\cdots a_{n\pi(n)}=\sum_{\pi\in S_n} 0=0$. (Protože $a_{i\pi(i)=0}$.)

(II) Nechť A' vznikla z A vynásobením i-tého řádku ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) prvkem $c \in T$. Pak

$$|A'|=\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a'_{1\pi(1)}\cdot\cdots\cdot a'_{i-1,\pi(i-1)}\cdot a'_{i\pi(i)}\cdot a'_{i+1,\pi(i+1)}\cdot\cdots\cdot a'_{n\pi(n)}$$

$$=\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\cdots\cdot a_{i-1,\pi(i-1)}\cdot(c\cdot a_{i\pi(i)})\cdot a_{i+1\pi(i+1)}\cdot\cdots\cdot a_{n\pi(n)}$$

$$=c\cdot\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\cdots\cdot a_{n\pi(n)}=c\cdot|A|$$

(III)

$$|A|=\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\cdots\cdot a_{i-1,\pi(i-1)}\cdot a_{i\pi(i)}\cdot a_{i+1,\pi(i+1)}\cdot\cdots\cdot a_{n\pi(n)}$$

$$=\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\cdots\cdot a_{i-1,\pi(i-1)}\cdot(a'_{i\pi(i)}+a''_{i\pi(i)})\cdot a_{i+1,\pi(i+1)}\cdot\cdots\cdot a_{n\pi(n)}$$

$$=\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\cdots\cdot a_{i-1,\pi(i-1)}\cdot a'_{i\pi(i)}\cdot a_{i+1\pi(i+1)}\cdot\cdots\cdot a_{n\pi(n)}$$

$$+\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\cdots\cdot a_{i-1,\pi(i-1)}\cdot a''_{i\pi(i)}\cdot a_{i+1,\pi(i+1)}\cdot\cdots\cdot a_{n\pi(n)}$$

$$=\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a'_{1\pi(1)}\cdots a'_{n\pi(n)}+\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a''_{1\pi(1)}\cdots a''_{n\pi(n)}$$

$$=|A'|+|A''|$$

(IV) Nechť A' vznikla z A výměnou i-tého a j-tého řádku (i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i<j$).

$$|A'|=\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a'_{1\pi(1)}\cdot\cdots\cdot a'_{i\pi(i)}\cdot\cdots\cdot a'_{j\pi(j)}\cdot\cdots\cdot a'_{n\pi(n)}$$

$$=\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\cdots\cdot a_{j\pi(i)}\cdot\cdots\cdot a_{i\pi(j)}\cdot\cdots\cdot a_{n\pi(n)}$$

$$=\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\cdots\cdot a_{i\pi(j)}\cdot\cdots\cdot a_{j\pi(i)}\cdot\cdots\cdot a_{n\pi(n)}$$

$$=-\sum_{\pi \in S_n} -Sg(\pi)\cdot a_{1((i\leftrightarrow j)\pi)(1)}\cdot\cdots\cdot a_{i((i\leftrightarrow j)\pi)(i)}\cdot\cdots\cdot a_{j((i\leftrightarrow j)\pi)(j)}\cdot\cdots\cdot a_{n((i\leftrightarrow j)\pi)(n)}$$

$$=-\sum_{\pi \in S_n} Sg((i\leftrightarrow j)(\pi))\cdot a_{1((i\leftrightarrow j)\pi)(1)}\cdot\cdots\cdot a_{i((i\leftrightarrow j)\pi)(i)}\cdot\cdots\cdot a_{j((i\leftrightarrow j)\pi)(j)}\cdot\cdots\cdot a_{n((i\leftrightarrow j)\pi)(n)}$$

Zaveďme nový sčítací index $\rho=(i\leftrightarrow j)\pi$. Pak $|A'|=-\sum_{\rho \in S_n} Sg(\rho)\cdot a_{1\rho(1)}\cdot\cdots\cdot a_{n\rho(n)}=-|A|$.

Je třeba si uvědomit: $Sg((i\leftrightarrow j)\pi)=-Sg(\pi)$ (viz 6.2.3.).

Dále: π proběhne S_n právě tehdy, když ρ proběhne S_n, neboť zobrazení $\varphi: S_n \to S_n$, $\varphi(\pi)=(i\leftrightarrow j)\pi$ pro každé $\pi\in S_n$, je bijekce.
(V) Nechť A má i-tý řádek stejný jako j-tý řádek ($i,\ j\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\},\ i<j$).
Vytvořme matici A' tak, že v A vyměníme i-tý a j-tý řádek. Zřejmě $A'=A$. Avšak podle již dokázáné (IV) máme $|A'|=-|A|$. Tedy $|A|=-|A|$. Je-li T číselné těleso ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), lze uvažovat takto: $2\cdot|A|=0,\ |A|=0$. Tento důkaz však nemá obecnou platnost: například v tělese $\mathbb{Z}_2$ je $1=-1$, avšak $1\neq 0$.
Nyní provedeme důkaz platný pro všechna tělesa T:

$$|A|=\sum_{\pi\in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\dots\cdot a_{n\pi(n)}$$
$$=\sum_{\pi\in A_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\dots\cdot a_{n\pi(n)}+Sg((i\leftrightarrow j)\pi)\cdot a_{1((i\leftrightarrow j)\pi)(1)}\cdot\dots\cdot a_{n((i\leftrightarrow j)\pi)(n)}$$

To platí, neboť zobrazení $\varphi: A_n\to L_n$, $\varphi(\pi)=(i\leftrightarrow j)\pi$ pro každé $\pi\in A_n$, je bijekce $(L_n=\{\rho\in S_n | Sg(\rho)=-1\})$. Dále pak pro $\pi\in A_n$ platí:

$$Sg((i\leftrightarrow j)\pi)\cdot a_{1((i\leftrightarrow j)\pi)(1)}\cdot\dots\cdot a_{i((i\leftrightarrow j)\pi)(i)}\cdot\dots\cdot a_{j((i\leftrightarrow j)\pi)(j)}\cdot\dots\cdot a_{n((i\leftrightarrow j)\pi)(n)}$$
$$=-Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\dots\cdot a_{i\pi(j)}\cdot\dots\cdot a_{j\pi(i)}\cdot\dots\cdot a_{n\pi(n)} \quad | \text{ užijeme rovností } a_{i\pi(j)}=a_{j\pi(j)} \text{ a } a_{j\pi(i)}=a_{i\pi(i)}$$
$$=-Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\dots\cdot a_{i\pi(i)}\cdot\dots\cdot a_{j\pi(j)}\cdot\dots\cdot a_{n\pi(n)}$$

Dostáváme:

$$|A|=\sum_{\pi\in A_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\dots\cdot a_{n\pi(n)}-Sg(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\dots\cdot a_{n\pi(n)}=\sum_{\pi\in A_n} 0=0 .$$

(VI) Označme $B=A^T$.

$$|A^T|=\sum_{\pi\in S_n} Sg(\pi)\cdot b_{1\pi(1)}\cdot\dots\cdot b_{n\pi(n)}$$
$$=\sum_{\pi\in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{\pi(1)1}\cdot\dots\cdot a_{\pi(n)n}$$
$$=\sum_{\pi\in S_n} Sg(\pi)\cdot a_{1\pi^{-1}(1)}\cdot\dots\cdot a_{n\pi^{-1}(n)}$$

Nyní změníme sčítací index. Položíme $\rho=\pi^{-1}$.
Dostaneme (užijeme toho, že $Sg(\pi)=Sg(\pi^{-1})$):

$$|A^T|=\sum_{\pi\in S_n} Sg(\pi^{-1})\cdot a_{1\pi^{-1}(1)}\cdot\dots\cdot a_{n\pi^{-1}(n)}$$
$$=\sum_{\rho\in S_n} Sg(\rho)\cdot a_{1\rho(1)}\cdot\dots\cdot a_{n\rho(n)}=|A|$$

7.3. Věta o rozvoji determinantu

7.3.1. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{n,n}$, $i,\ j\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, $n\geq 2$.
Determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

se nazývá subdeterminant determinantu $|A|$ příslušející prvku a_{ij} a značí se A_{ij}.

Determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

se nazývá doplněk prvku a_{ij} v determinantu $|A|$ a značí se D_{ij}.

7.3.2. VĚTA

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 2$.

Platí: $D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$

Důkaz: Nechť

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

n - i výměnami řádků v matici B lze získat tuto matici:

$$B' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Podle věty 7.2.1., část (IV), je $|B'| = (-1)^{n-i} \cdot |B| = (-1)^{n-i} \cdot D_{ij}$.

$n-j$ výměnami řádků v matici $(B')^T$ a transponováním vzniklé matice lze získat tuto matici:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podle věty 7.2.1., část (IV), je $|C^T| = (-1)^{n-j} \cdot |(B')^T|$. S ohledem na část (VI) téže věty: $|C| = (-1)^{n-j} \cdot |B'|$. Pak $|C| = (-1)^{n-j} \cdot (-1)^{n-i} \cdot D_{ij} = (-1)^{2n-(i+j)} \cdot D_{ij}$.

Odtud $(-1)^{i+j} \cdot |C| = (-1)^{2n} \cdot D_{ij} = D_{ij}$. Stačí tedy dokázat, že $|C| = A_{ij}$.

$$|C| = \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot c_{1\pi(1)} \cdot \cdots \cdot c_{n-1,\pi(n-1)} \cdot c_{n\pi(n)} = \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi(n)=n}} Sg(\pi) \cdot c_{1\pi(1)} \cdot \cdots \cdot c_{n-1,\pi(n-1)}.$$

Je-li $\pi \in S_n$, $\pi(n) = n$, definujme $\pi' \in S_{n-1}$ takto: $\pi'(k) = \pi(k)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Zřejmě počet inverzí v permutaci π se rovná počtu inverzí v permutaci π'.
Takže $Sg(\pi)=Sg(\pi')$ (viz definici 6.2.1.).
Nyní změníme sčítací index:

$$|C|=\sum_{\pi'\in S_{n-1}} Sg(\pi')\cdot c_{1\pi'(1)}\cdot\dots\cdot c_{n-1,\pi'(n-1)}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=A_{ij}\,.$$

7.3.3. VĚTA (o rozvoji determinantu podle prvků jedné jeho řady)
Nechť T je těleso, $n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{n,n}$, $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$, $n\geq 2$.
Platí: $|A|=a_{i1}\cdot D_{i1}+a_{i2}\cdot D_{i2}+\ldots+a_{in}\cdot D_{in}$.

Důkaz:

$$a_{i1}\cdot D_{i1}+a_{i2}\cdot D_{i2}+\ldots+a_{in}\cdot D_{in}=a_{i1}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$+a_{i2}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+a_{in}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$\underset{7.2.1.(II)}{\underset{\uparrow}{=}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underset{7.2.1.(III)}{\overset{\uparrow}{=}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| \ .$$

7.3.4. POZNÁMKA (Výpočet determinantů)

(a) křížové pravidlo (viz 7.1.2. (a))
(b) Sarrusovo pravidlo (viz 7.1.2. (b))
(c) Rozvoj determinantu podle prvků jedné jeho řady (nebo sloupce – s ohledem na to, že matice a táž matice transponovaná mají stejný determinant).
Výpočet determinantu n -tého stupně se tak převede na výpočet n determinantů stupně $n-1$ (vzali jsme v úvahu vztah mezi doplňkem prvku v determinantu a subdeterminantem příslušejícím danému prvku).
(d) Úprava matice, jejíž determinant počítáme; přitom používáme větu o základních vlastnostech determinantů (7.2.1.) a následující tvrzení 7.3.5. a 7.3.6.

7.3.5. TVRZENÍ

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Platí:
Jestliže A je horní trojúhelníková, pak $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$.
Specielně:
Jestliže A je diagonální, pak $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$.
Důkaz přenecháváme čtenáři.

7.3.6. TVRZENÍ

Determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku lineární kombinaci ostatních řádků.
Důkaz:
Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n \in T$.
Je třeba ukázat:

$$|A| = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_{i-1}} \\ \vec{a_i} + c_1 \cdot \vec{a_1} + \ldots + c_{i-1} \cdot \vec{a_{i-1}} + c_{i+1} \cdot \vec{a_{i+1}} + \ldots + + c_n \cdot \vec{a_n} \\ \vec{a_{i+1}} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} \ .$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_i} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_i} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} + c_1 \cdot \underset{\substack{\| \\ 0}}{\begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix}} + \ldots + c_{i-1} \cdot \underset{\substack{\| \\ 0}}{\begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_{i-1}} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix}} + c_{i+1} \cdot \underset{\substack{\| \\ 0}}{\begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_{i+1}} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix}} + \ldots + c_n \cdot \underset{\substack{\| \\ 0}}{\begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix}}$$

dle 7.2.1. (V)

$$\underset{7.2.1.(II)}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ c_1 \cdot \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ c_{i-1} \cdot \overrightarrow{a_{i-1}} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ c_{i+1} \cdot \overrightarrow{a_{i+1}} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ c_n \cdot \vec{a}_n \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix}$$

$$\underset{7.2.1.(III)}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i + c_1 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + c_{i-1} \cdot \overrightarrow{a_{i-1}} + c_{i+1} \cdot \overrightarrow{a_{i+1}} + \ldots + c_n \cdot \vec{a}_n \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} .$$

7.3.7. POZNÁMKA

Pří výpočtu determinantu často kombinujeme různé postupy. Například: matici, jejíž determinant počítáme, nejdříve upravíme (zvláště s využitím tvrzení 7.3.6.) a potom provedeme rozvoj podle prvků jedné řady.

7.4. Determinant součinu matic

7.4.1. LEMMA

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $B \in T_{n,n}$, $\pi \in S_n$. Platí:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{b_{\pi(1)}} \\ \overrightarrow{b_{\pi(2)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{\pi(n)}} \end{vmatrix} = Sg(\pi) \cdot |B| .$$

Důkaz:

Nechť τ, $\rho \in S_n$, τ je transpozice.

Matice $\begin{pmatrix} \overrightarrow{b_{(\rho\tau)(1)}} \\ \overrightarrow{b_{(\rho\tau)(2)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{(\rho\tau)(n)}} \end{pmatrix}$ vznikla z matice $\begin{pmatrix} \overrightarrow{b_{\rho(1)}} \\ \overrightarrow{b_{\rho(2)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{\rho(n)}} \end{pmatrix}$ výměnou dvou řádků,

takže dle 7.2.1. (IV) je $\begin{vmatrix} \overrightarrow{b_{(\rho\tau)(1)}} \\ \overrightarrow{b_{(\rho\tau)(2)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{(\rho\tau)(n)}} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \overrightarrow{b_{\rho(1)}} \\ \overrightarrow{b_{\rho(2)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{\rho(n)}} \end{vmatrix}$.

Dle věty 6.1.8. existují transpozice τ_1, τ_2, …, $\tau_k \in S_n$ ($k \in \mathbb{N}$) tak, že $\pi = id \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \cdots \cdot \tau_k$.

Pak $\begin{vmatrix} \overrightarrow{b_{\pi(1)}} \\ \overrightarrow{b_{\pi(2)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{\pi(n)}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{b_{(id\cdot\tau_1\cdot\tau_2\cdot\cdots\cdot\tau_k)(1)}} \\ \overrightarrow{b_{(id\cdot\tau_1\cdot\tau_2\cdot\cdots\cdot\tau_k)(2)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{(id\cdot\tau_1\cdot\tau_2\cdot\cdots\cdot\tau_k)(n)}} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \overrightarrow{b_{(id\cdot\tau_1\cdot\tau_2\cdot\cdots\cdot\tau_{k-1})(1)}} \\ \overrightarrow{b_{(id\cdot\tau_1\cdot\tau_2\cdot\cdots\cdot\tau_{k-1})(2)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{(id\cdot\tau_1\cdot\tau_2\cdot\cdots\cdot\tau_{k-1})(n)}} \end{vmatrix} = \ldots = (-1)^k \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{b_{id(1)}} \\ \overrightarrow{b_{id(2)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{id(n)}} \end{vmatrix} = (-1)^k \cdot |B| = Sg(\pi) \cdot |B| .$

7.4.2. VĚTA

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, A, $B \in T_{n,n}$. Platí: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Důkaz: Pro $n=1$ je věta zřejmě pravdivá. Nechť $n \geq 2$.

Označme

$\vec{b}_1 = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n})$
$\vec{b}_2 = (b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n})$
$\vdots$
$\vec{b}_n = (b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nn})$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot \vec{b}_1 + a_{12} \cdot \vec{b}_2 + \ldots + a_{1n} \cdot \vec{b}_n \\ a_{21} \cdot \vec{b}_1 + a_{22} \cdot \vec{b}_2 + \ldots + a_{2n} \cdot \vec{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot \vec{b}_1 + a_{n2} \cdot \vec{b}_2 + \ldots + a_{nn} \cdot \vec{b}_n \end{vmatrix}$$

K další úpravě využijeme základní vlastnosti determinantů (viz 7.2.1.).

$$|A \cdot B| = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{i_1} \\ a_{21} \cdot \vec{b}_1 + a_{22} \cdot \vec{b}_2 + \ldots + a_{2n} \cdot \vec{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot \vec{b}_1 + a_{n2} \cdot \vec{b}_2 + \ldots + a_{nn} \cdot \vec{b}_n \end{vmatrix} = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \cdot \sum_{i_2=1}^{n} a_{2i_2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{i_1} \\ \vec{b}_{i_2} \\ a_{31} \cdot \vec{b}_1 + a_{32} \cdot \vec{b}_2 + \ldots + a_{3n} \cdot \vec{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot \vec{b}_1 + a_{n2} \cdot \vec{b}_2 + \ldots + a_{nn} \cdot \vec{b}_n \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{i_1} \\ \vec{b}_{i_2} \\ a_{31} \cdot \vec{b}_1 + a_{32} \cdot \vec{b}_2 + \ldots + a_{3n} \cdot \vec{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot \vec{b}_1 + a_{n2} \cdot \vec{b}_2 + \ldots + a_{nn} \cdot \vec{b}_n \end{vmatrix} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{i_1} \\ \vec{b}_{i_2} \\ \vdots \\ \vec{b}_{i_n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{\pi(1)} \\ \vec{b}_{\pi(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{\pi(n)} \end{vmatrix}$$

Nyní využijeme výše dokázaného lemmatu 7.4.1.

$$|A \cdot B| = \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \cdot Sg(\pi) \cdot |B| = \left(\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \right) \cdot |B| = |A| \cdot |B|$$

7.4.3. VĚTA

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Platí:

A je regulární tehdy a jen tehdy, když $|A| \neq 0$.

Důkaz:

(I) Předpokládejme, že A je regulární. Pak existuje matice A^{-1} (viz 5.6.4.). Je $E = A \cdot A^{-1}$, takže $1 = |E| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$. Nutně $|A| \neq 0$.

(II) Předpokládejme, že A je singulární. Chceme: $|A| = 0$.

$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$
$\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$
$\vdots$
$\vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn})$

Protože $h(A) < n$, jsou vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ lineárně závislé. Existuje $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots c_n \in T$ tak, že $\vec{a}_i = c_1 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + c_{i-1} \cdot \overrightarrow{a_{i-1}} + c_{i+1} \cdot \overrightarrow{a_{i+1}}, + \ldots + c_n \cdot \vec{a}_n$.

Pak

$$|A| = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_{i-1}} \\ c_1 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + c_{i-1} \cdot \overrightarrow{a_{i-1}} + c_{i+1} \cdot \overrightarrow{a_{i+1}}, \ldots c_n \cdot \vec{a}_n \\ \overrightarrow{a_{i+1}} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_j \cdot \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_{i-1}} \\ \vec{a}_j \\ \overrightarrow{a_{i+1}} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_j \cdot 0 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} 0 = 0 \,.$$