Kapitola 2 - Obecná teorie vektorových prostorů

2.1. Definice vektorového prostoru

2.1.1. DEFINICE

Nechť V s operaci $+$ je komutativní grupa, nechť T s operacemi $+$ a $\cdot$ je těleso. Nechť pro každý prvek $a \in T$ a každý prvek $\vec{v} \in V$ je jednoznačně určen prvek $a \cdot \vec{v} \in V$. Pak V se nazývá vektorový prostor nad tělesem T, jestliže:

(1) pro všechna a, $b \in T$, pro všechna $\vec{u} \in V$
$(a \cdot b) \cdot \vec{u} = a \cdot (b \cdot \vec{u})$

(2) pro všechna a, $b \in T$, pro všechna $\vec{u} \in V$
$(a+b) \cdot \vec{u} = (a \cdot \vec{u}) + (b \cdot \vec{u})$

(3) pro všechna $a \in T$, pro všechna $\vec{u}$, $\vec{v} \in T$
$a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (a \cdot \vec{u}) + (a \cdot \vec{v})$

(4) pro všechna $\vec{u} \in V$
$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
(1 je neutrální prvek operace $\cdot$ v T).

Prvky množiny V nazýváme vektory, prvky množiny T skaláry.

2.1.2. TVRZENÍ

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $\vec{v} \in V$, $c \in T$.
Platí:

(1) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (0 je neutrální prvek operace $+$ v tělese T, $\vec{0}$ je neutrální prvek grupy V; $\vec{0}$ se nazývá nulový vektor)

(2) $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$

(3) $-(c \cdot \vec{v}) = (-c) \cdot \vec{v} = c \cdot (-\vec{v})$

(4) Jestliže $c \cdot \vec{v} = \vec{0}$, pak $c = 0$ nebo $\vec{v} = \vec{0}$.

Důkaz:

(1) $0 \cdot \vec{v} = (0+0) \cdot \vec{v} = (0 \cdot \vec{v}) + (0 \cdot \vec{v}) \qquad |+(-(0 \cdot \vec{v}))$
$0 \cdot \vec{v} + (-(0 \cdot \vec{v})) = [(0 \cdot \vec{v}) + (0 \cdot \vec{v})] + (-(0 \cdot \vec{v}))$
$\vec{0} = (0 \cdot \vec{v}) + [(0 \cdot \vec{v}) + (-(0 \cdot \vec{v}))]$
$\vec{0} = (0 \cdot \vec{v}) + \vec{0}$
$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$

(2) $c \cdot \vec{0} = c \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = (c \cdot \vec{0}) + (c \cdot \vec{0}) \qquad |+(-(c \cdot \vec{0}))$
$\vec{0} = c \cdot \vec{0}$

(3) $(-c) \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{v} = ((-c) + c) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$, takže $-(c \cdot \vec{v}) = (-c) \cdot \vec{v}$
$c \cdot (-\vec{v}) + c \cdot \vec{v} = c \cdot (-\vec{v} + \vec{v}) = c \cdot \vec{0} = \vec{0}$, takže $-(c \cdot \vec{v}) = c \cdot (-\vec{v})$

(4) Nechť $c \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Rozlišme 2 případy:
(α) $c = 0$ (β) $c \neq 0$
ad (α): Jsme hotovi.
ad (β):

$$c \cdot \vec{v} = \vec{0} \qquad |\cdot \frac{1}{c}$$
$$\frac{1}{c} \cdot (c \cdot \vec{v}) = \frac{1}{c} \cdot \vec{0}$$
$$(\frac{1}{c} \cdot c) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$
$$1 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$
$$\vec{v} = \vec{0}$$

2.1.3. Příklad

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$. Definujeme $(a_1, \ldots, a_n)+(b_1, \ldots, b_n)=(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$ $c \cdot (a_1, \ldots, a_n)=(c \cdot a_1, \ldots, c \cdot a_n)$ pro libovolná $c \in T$, $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in T^n$.
Pak T^n je vektorový prostor nad T. Zdůvodnění přenecháváme čtenáři.

2.2. **Podprostory vektorového prostoru**

2.2.1. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $W \subseteq V$. W se nazývá podprostor vektorového prostoru V, platí-li:
(1) $\vec{0} \in W$
(2) Jestliže $\vec{x}, \vec{y} \in W$, pak $\vec{x}+\vec{y} \in W$.
(3) Jestliže $c \in T$ a $\vec{x} \in W$, pak $c \cdot \vec{x} \in W$.

2.2.2. VĚTA (o průniku podprostorů)

Nechť I je indexová množina, $I \neq \emptyset$, W_i pro $i \in I$ jsou podprostory vektorového prostoru V nad tělesem T. Pak $\bigcap_{i \in I} W_i$ je podprostor vektorového prostoru V.
Důkaz přenecháváme čtenáři.

2.2.3. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $M \subseteq V$. $U \subseteq V$ se nazývá podprostor generovaný množinou vektorů M, jestliže
(1) U je podprostor vektorového prostoru V
(2) $M \subseteq U$
(3) Jestliže W je podprostor vektorového prostoru V a $M \subseteq W$, pak $U \subseteq W$.
Tedy: Podprostor generovaný množinou vektorů je nejmenší podprostor (vzhledem k inkluzi), který danou množinu vektorů obsahuje.

2.2.4. TVRZENÍ

Podprostor generovaný množinou vektorů vždy existuje a je určen jednoznačně
Důkaz: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $M \subseteq V$.
(I) Existence:
Buď W_i pro $i \in I$ systém všech podprostorů vektorového prostoru V, které obsahují M. Je $I \neq \emptyset$, neboť $M \subseteq V$ a V je podprostor ve V. Položme $U=\bigcap_{i \in I} W_i$. Pak
(1) U je podprostor vektorového prostoru V – viz 2.2.2.
(2) $M \subseteq U$ – to je zřejmé
(3) Nechť W je podprostor vektorového prostoru V a $M \subseteq W$. Pak existuje $i_0 \in I$ tak, že $W=W_{i_0}$. Takže $U=\bigcap_{i \in I} W_i \subseteq W_{i_0}=W$.
(II) Jednoznačnost:
Nechť U a U' jsou podprostory generované množinou M. Platí tedy:
(1) U je podprostor vektorového prostoru V
(2) $M \subseteq U$
(3) Jestliže W je podprostor vektorového prostoru V a $M \subseteq W$, pak $U \subseteq W$.
(1′) U' je podprostor vektorového prostoru V
(2′) $M \subseteq U'$
(3′) Jestliže W je podprostor vektorového prostoru V a $M \subseteq W$ pak $U' \subseteq W$.
Z (1), (2) a (3′) plyne $U' \subseteq U$. Z (1′), (2′) a (3) plyne $U \subseteq U'$. Celkem: $U=U'$

2.2.5. OZNAČENÍ

Podprostor generovaný množinou vektorů M budeme značit $\langle M \rangle$. Prvky množiny M se nazývají generátory podprostoru $\langle M \rangle$. Smysluplnost zavedeného označení je založena na 2.2.4.

2.2.6. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $k \in \mathbb{N}$, $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_k} \in V$. Lineární kombinací vektorů $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_k}$ rozumíme každý vektor $c_1 \cdot \vec{x_1} + \cdots + c_k \cdot \vec{x_k}$, kde $c_1, \dots, c_k \in T$.

2.2.7. VĚTA

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$.

Platí:

$\langle M \rangle = \{c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_n \cdot \vec{v_n} | n \in \mathbb{N}, \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \in M, c_1, \dots, c_n \in T\}$

Speciálně:

$\langle \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\} \rangle = \{c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_n \cdot \vec{v_n} | c_1, \dots, c_n \in T\}$.

Důkaz: Nechť $U = \{c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_n \cdot \vec{v_n} | n \in \mathbb{N}, \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \in M, c_1, \dots, c_n \in T\}$.

(1) U je podprostor vektorového prostoru V:

(a) Zvolme $\vec{x} \in M$. Pak $0 \cdot \vec{x} = \vec{0} \in U$.

(b) Nechť $\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_n \cdot \vec{v_n}$, $\vec{y} = d_1 \cdot \vec{w_1} + \cdots + d_n \cdot \vec{w_n} \in U$.

Chceme: $\vec{x} + \vec{y} \in U$. To je však zřejmé.

(c) Nechť $\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_n \cdot \vec{v_n} \in U$, $c \in T$. Chceme: $c \cdot \vec{x} \in U$.

$c \cdot \vec{x} = c \cdot (c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_n \cdot \vec{v_n}) = (c \cdot c_1) \cdot \vec{v_1} + \cdots + (c \cdot c_n) \cdot \vec{v_n} \in U$.

(2) $M \subseteq U$:

Nechť $\vec{x} \in M$. Pak $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} \in U$.

(3) Nechť W je podprostor vektorového prostoru, $M \subseteq W$.

Chceme: $U \subseteq W$. Zvolme libovolně $\vec{x} \in U$. Pak

$\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_n \cdot \vec{v_n}$, $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \in M$, $c_1, \dots, c_n \in T$. Jelikož $M \subseteq W$, máme $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \in W$.

Protože W je podprostor, $c_1 \cdot \vec{v_1}, \dots, c_n \cdot \vec{v_n} \in W$ a také $c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_n \vec{v_n} = \vec{x} \in W$.

2.2.8. DEFINICE

Zavedeme pojem součet podmnožin vektorového prostoru. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $M_1, M_2 \subseteq V$. Klademe $M_1 + M_2 = \{\vec{x_1} + \vec{x_2} | \vec{x_1} \in M_1, \vec{x_2} \in M_2\}$

2.2.9. VĚTA

Jsou-li W_1, W_2 podprostory, je $W_1 + W_2$ také podprostor a $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$.

Důkaz: přenecháváme čtenáři.

2.3. **Lineární závislost a nezávislost**

2.3.1. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $k \in \mathbb{N}$, $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k} \in V$. Vektory $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$ se nazývají lineárně nezávislé, platí-li: Jestliže $c_1, \dots, c_k \in T$ a $c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_k \cdot \vec{v_k} = \vec{0}$, pak $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

2.3.2. POZNÁMKA

Vektory $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$ jsou lineárně závislé znamená: Existují $c_1, \dots, c_k \in T$,

$c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_k \cdot \vec{v_k} = \vec{0}$, $c_i \neq 0$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, k\}$. Takže

$c_i \cdot \vec{v_i} = (-c_1) \cdot \vec{v_1} + \cdots + (-c_{i-1}) \cdot \overrightarrow{v_{i-1}} + (-c_{i+1}) \cdot \overrightarrow{v_{i+1}} + \cdots + (-c_k) \cdot \vec{v_k}$,

$\vec{v_i} = \frac{-c_1}{c_i} \cdot \vec{v_1} + \cdots + \frac{-c_{i-1}}{c_i} \cdot \overrightarrow{v_{i-1}} + \frac{-c_{i+1}}{c_i} \cdot \overrightarrow{v_{i+1}} + \cdots + \frac{-c_k}{c_i} \cdot \vec{v_k}$, vektor $\vec{v_i}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{i-1}}, \overrightarrow{v_{i+1}}, \dots, \vec{v_k}$

2.3.3. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $M \subseteq V$, M je konečná. Nechť $M \neq \emptyset$, M má k prvků, $M = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Množina M se nazývá lineárně nezávislá právě tehdy, když vektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ jsou lineárně nezávislé. Je-li $M = \emptyset$, pak M považujeme za lineárně nezávislou množinu.

2.3.4. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $M \subseteq V$. Množina M se nazývá lineárně nezávislá právě tehdy, když každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá (ve smyslu definice 2.3.3.).

2.3.5. POZNÁMKA

Všimněte si,že pro konečné množiny vektorů máme dvě definice lineární nezávislosti, totiž 2.3.3. a 2.3.4. Musíme samozřejmě ukázat, že jsou ekvivalentní. Nechť M je konečná množina vektorů z vektorového prostoru V nad tělesem T. Je-li M nezávislá dle 2.3.4., je každá konečná podmnožina množiny M lineárně nezávislá dle 2.3.3. Avšak M je konečná podmnožina množiny M, takže M je lineárně nezávislá dle 2.3.3. Nyní naopak. Nechť M je nezávislá dle 2.3.3. Buď N konečná podmnožina množiny M. Je třeba ukázat, že N je lineárně nezávislá dle 2.3.3. Případy $N = \emptyset$ a $N = M$ jsou jasné. Nechť tedy $\emptyset \subset N \subset M$. Nechť N má k prvků, M má $k + l$ prvků (k, $l \in \mathbb{N}$), $N = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$, $M = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l\}$. Zbývá zdůvodnit, že vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ jsou lineárně nezávislé. Nechť $c_1, \ldots, c_k \in T$, $c_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + c_k \cdot \vec{x}_k = \vec{0}$. Chceme: $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. Uvědomme si, že $c_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + c_k \cdot \vec{x}_k + 0 \cdot \vec{y}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{y}_l = \vec{0}$. Protože vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l$ jsou lineárně nezávislé, dostáváme $c_1 = \ldots = c_k = 0$.

2.4. **Báze**

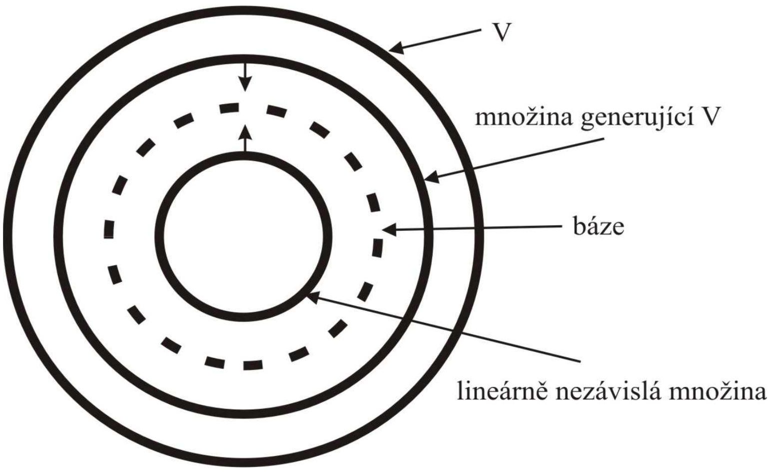
2.4.1. TVRZENÍ

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T.

(a) Jestliže $M \subseteq V$, M je lineárně nezávislá, $N \subseteq M$, pak N je lineárně nezávislá.

(b) Jestliže $M \subseteq V$, $\langle M \rangle = V$, $M \subseteq N \subseteq V$, pak $\langle N \rangle = V$.

Důkaz přenecháváme čtenáři.



2.4.2. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $B \subseteq V$. Množina B se nazývá báze vektorového prostoru V, platí-li:

(1) B je lineárně nezávislá

(2) $\langle B \rangle = V$.

2.4.3. TVRZENÍ

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $B \subseteq V$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) B je báze

(2) B je maximální (vzhledem k inkluzi) lineárně nezávislá podmnožina ve V

(3) B je minimální (vzhledem k inkluzi) podmnožina ve V splňující $\langle B \rangle = V$.

Důkaz:

(1) $\Rightarrow$ (2): Jistě B je lineárně nezávislá množina. Zbývá ukázat její maximalitu. Nechť $M \subseteq V$ je lineárně nezávislá množina, $B \subseteq M$. Chceme: $B = M$. Uvažme 2 případy:

(I) $B = \emptyset$

(II) $B \neq \emptyset$

ad (I): $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$, takže $V = \{\vec{0}\}$. Máme 2 možnosti pro $M: M = \emptyset$ a $M = \{\vec{0}\}$. Druhý případ odpadá, neboť vektor $\vec{0}$ je lineárně závislý. Tudíž $M = \emptyset = B$.

ad (II): Zvolme libovolně $\vec{x} \in M$. Chceme: $\vec{x} \in B$. Víme, že $\langle B \rangle = V$. Dle 2.2.7. existuje $n \in \mathbb{N}$, $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in B$, $c_1, \ldots, c_n \in T$, $\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v_1}, \ldots, c_n \cdot \vec{v_n}$. Lze předpokládat, že vektory $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ jsou navzájem různé. Předpokládejme dále, že $\vec{x} \notin \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$. Množina $\{\vec{x}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ je lineárně závislá, jak vidíme ze vztahu $1 \cdot \vec{x} + (-c_1) \cdot \vec{v_1} + \ldots + (-c_n) \cdot \vec{v_n} = \vec{0}$. Ovšem $\{\vec{x}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\} \subseteq M$, což je spor s lineární nezávislostí M. Do sporu nás zavedl předpoklad $x \notin \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$. Tudíž $x \in \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\} \subseteq B$, $\vec{x} \in B$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Nejdříve ukážeme, že $\langle B \rangle = V$.

$\langle B \rangle \subseteq V$: To je jasné.

$V \subseteq \langle B \rangle$: Nechť $\vec{x} \in V$. Chceme: $\vec{x} \in \langle B \rangle$. Je-li $\vec{x} \in B$, jsme hotovi, poněvadž $B \subseteq \langle B \rangle$. Nechť tedy $\vec{x} \notin B$. Položme $M = B \cup \{\vec{x}\}$. Je $B \subset M$. Protože B je maximální lineárně nezávislá množina, je množina M lineárně závislá. Existuje tedy její konečná podmnožina N, jež je lineárně závislá. Kdyby $\vec{x} \notin N$, bylo by $N \subseteq B$, což by byl spor s lineární nezávislostí množiny B. Tudíž $\vec{x} \in N$. Pokud $N = \{\vec{x}\}$, je $\vec{x} = \vec{0}$ (uvědomme si, že množina N je lineárně závislá) a zřejmě $\vec{x} \in \langle B \rangle$. Nechť tedy N má $k+1$ prvků, $k \in \mathbb{N}$, $N = \{\vec{x}, \vec{y_1}, \ldots, \vec{y_k}\}$. Zřejmě $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_k} \in B$. Množina N je lineárně závislá. Existují tedy $d_0, d_1, \ldots, d_k \in T$, $d_0 \cdot \vec{x} + d_1 \cdot \vec{y_1} + \ldots + d_k \cdot \vec{y_k} = \vec{0}$ a přitom $d_i \neq 0$ pro nějaké $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Kdyby $d_0 = 0$, tak by platilo: $d_1 \cdot \vec{y_1} + \ldots + d_k \cdot \vec{y_k} = \vec{0}$, $d_i \neq 0$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, k\}$. Množina $\{\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_k}\}$ by byla lineárně závislá, což by byl spor s lineární nezávislostí množiny B (uvědomme si, že $\{\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_k}\} \subseteq B$). Nutně tedy $d_0 \neq 0$, $\vec{x} = (-\frac{d_1}{d_0}) \cdot \vec{y_1} + \ldots + (-\frac{d_k}{d_0}) \cdot \vec{y_k} \in \langle B \rangle$. Nyní ukážeme, že B je minimální (vzhledem k inkluzi) mezi všemi podmnožinami M ve V splňujícími $\langle M \rangle = V$. Nechť tedy $M \subseteq V$, $\langle M \rangle = V$, $M \subseteq B$. Chceme $M = B$. Rozlišíme 2 případy:

(I) $M = \emptyset$

(II) $M \neq \emptyset$

ad (I): $\langle M \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$, takže $V = \{\vec{0}\}$. Protože $B \subseteq \{\vec{0}\}$ je lineárně nezávislá, je $B = \emptyset$ a rovnost $M = B$ je dokázána.

ad (II): Stačí ukázat, že $B \subseteq M$. Zvolme $\vec{x} \in B$. Chceme: $\vec{x} \in M$. Protože $\langle M \rangle = V$, je $\vec{x} \in \langle M \rangle$. Dle 2.2.7. existují $n \in \mathbb{N}$, $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in M$, $c_1, \ldots, c_n \in T$, tak, že $\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v_1} + \ldots + c_n \cdot \vec{v_n}$. Lze předpokládat, že vektory $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ jsou navzájem různé. Předpokládejme dále, že $x \notin \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$. Ze vztahu $1 \cdot \vec{x} + (-c_1) \cdot \vec{v_1} + \ldots + (-c_n) \cdot \vec{v_n} = \vec{0}$ plyne, že vektory $\vec{x}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ jsou lineárně závislé. Protože $\vec{x}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in B$, dostáváme spor s lineární nezávislostí množiny B. Takže $\vec{x} \in \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\} \subseteq M$, $\vec{x} \in M$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Zbývá ukázat, že množina B je lineárně nezávislá. Předpokládejme opak. Existuje tedy $M \subseteq B$, M konečná, lineárně závislá. Je $M \neq \emptyset$. Nechť $M = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}\}$. Rozlišíme

dva případy: (I) $k=1$ (II) $k>1$
ad (I): Existuje $c_1 \in T$, $c_1 \neq 0$, tak, že $c_1 \cdot \vec{v_1} = \vec{0}$. Pak ovšem $\vec{v_1} = \vec{0}$, $\vec{0} \in B$. Zřejmě $\langle B - \{\vec{0}\} \rangle = \langle B \rangle$. Pak $\langle B - \{\vec{0}\} \rangle = V$. Jelikož $B - \{\vec{0}\} \subset B$, dostali jsme spor s tím, že B je minimální množina vektorů generující V.
ad (II): Existuje $i \in \{1, \ldots, k\}$, $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_k \in T$, $\vec{v_i} = c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_{i-1} \cdot \overrightarrow{v_{i-1}} + c_{i+1} \cdot \overrightarrow{v_{i+1}} + \cdots + c_k \cdot \vec{v_k} \in T$. Zřejmě $\langle B - \{\vec{v_i}\} \rangle = \langle B \rangle$. Pak $\langle B - \{\vec{v_i}\} \rangle = V$. Jelikož $B - \{\vec{v_i}\} \subset B$, dostali jsme spor s tím, že B je minimální množina vektorů generující V.

2.4.4.VĚTA (o existenci báze a o doplnění lineárně nezávislých množin do báze)
(a) Každý vektorový prostor má bázi.
(b) Každá lineárně nezávislá množina je obsažena v nějaké bázi.
Důkaz: Mějme vektorový prostor V nad tělesem T. Budiž S systém všech lineárně nezávislých podmnožin ve V. Je $S \neq \emptyset$, neboť například $\emptyset \in S$. Uvažujme S jako uspořádanou množinu – za relaci uspořádání vezměme relaci inkluze $\subseteq$. Buď $R \subseteq S$ řetězec. Pokud $R = \emptyset$, pak R je shora omezený, například prvkem $\emptyset$. Nechť $R \neq \emptyset$. Označme $B = \bigcup_{A \in R} A$. Nyní ukážeme, že B je horní hranicí řetězce R. K tomu je třeba ukázat:
(I) $B \in S$
(II) Pro každé $A \in R$ je $A \subseteq B$.
ad (I): Je tedy třeba ukázat, že množina B je lineárně nezávislá. Předpokládejme opak. Existuje tedy $W \subseteq B$, W je konečná, W je lineárně závislá. Nutně $W \neq \emptyset$. Nechť $W = \{\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_k}\}$. Protože W je lineárně závislá, existují $c_1, \ldots, c_k \in T$, $c_1 \cdot \vec{w_1} + \cdots + c_k \cdot \vec{w_k} = \vec{0}$, $c_i \neq 0$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, k\}$. Vektory $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_k}$ patří do $B = \bigcup_{A \in R} A$. Takže existují $A_1, \ldots, A_k \in R$, $\vec{w_1} \in A_1, \ldots, \vec{w_k} \in A_k$. Uvědomme si, že R je řetězec. Mezi množinami $A_1, \ldots, A_k$ tedy existuje největší (vzhledem k inkluzi) – označme ji A_j ($j \in \{1, \ldots, k\}$). Platí:
$A_1 \subseteq A_j$, $A_2 \subseteq A_j$, ..., $A_k \subseteq A_j$. Odtud plyne, že $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_k} \in A_j$. Jelikož $A_j \in R \subseteq S$, je A_j lineárně nezávislá podmnožina ve V. Avšak $c_1 \cdot \vec{w_1} + \cdots + c_k \cdot \vec{w_k} = \vec{0}$, $c_i \neq 0$. Dostali jsme spor. Vidíme, že vskutku množina B je lineárně nezávislá.
ad (II): Stačí si připomenout, že $B = \bigcup_{A \in R} A$.
Právě jsme ukončili důkaz faktu, že každý řetězec uspořádané množiny S je shora omezený.
Věta Kuratowského-Zornova (1.3.10.) nám dává:
Pro každé $A \in S$ existuje $B \in S$ takové, že $A \subseteq B$ a B je maximální (vzhledem k inkluzi).
Tedy:
Pro každou lineárně nezávislou množinu A existuje lineárně nezávislá množina B taková, že $A \subseteq B$ a B je maximální (vzhledem k inkluzi).
Nyní vezměme ještě v úvahu tvrzení 2.4.3. Pro $B \subseteq V$ jsou následující výroky ekvivalentní:
(1) B je báze
(2) B je maximální (vzhledem k inkluzi) lineárně nezávislá podmnožina ve V.
Dokázali jsme tedy toto: Pro každou lineárně nezávislou množinu A existuje báze B taková, že $A \subseteq B$.
Důkaz části (b) věty 2.4.4. je hotov. Část (a) pak ihned plyne z (b), uvědomíme-li si, že $\emptyset$ je lineárně nezávislá.

2.4.5. PŘÍKLAD

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$. Množina vektorů

$$\{ (1,0,0,\dots,0,0), (0,1,0,\dots,0,0), (0,0,1,\dots,0,0), \vdots (0,0,0,\dots,1,0), (0,0,0,\dots,0,1) \}$$

je báze vektorového prostoru T^n

2.5. Steinitzova věta o výměně

2.5.1.VĚTA (Steinitzova věta o výměně)

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $k, l \in \mathbb{N}$, $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_l}, \vec{w_1}, \dots, \vec{w_k} \in V$, $\langle\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_l}\}\rangle = V$, vektory $\vec{w_1}, \dots, \vec{w_k}$ jsou lineárně nezávislé. Pak platí:

(a) $k \leq l$

(b) Existují $i_1, \dots, i_{l-k} \in \{1, \dots, l\}$ tak, že $\langle\{\vec{w_1}, \dots, \vec{w_k}, \vec{v_{i_1}}, \dots, \overrightarrow{v_{i_{l-k}}}\}\rangle = V$.

Důkaz: Budeme postupovat indukcí vzhledem k číslu k.

(I) $k=1$

Zřejmě $1 \leq l$. Existují $c_1, \dots, c_l \in T$, $c_1 \cdot \vec{v_1} + \dots + c_l \cdot \vec{v_l} = \vec{w_1}$. Kdyby $c_1 = \dots = c_l = 0$, bylo by $\vec{w_1} = \vec{0}$, což by byl spor s lineární nezávislostí vektoru $\vec{w_1}$. Existuje tedy $j \in \{1, \dots, l\}$, $c_j \neq 0$. Položme $i_1 = 1$, $i_2 = 2, \dots, i_{j-1} = j-1$, $i_j = j+1$, $i_{j+1} = j+2, \dots, i_{l-1} = l$.

Pak $\langle\{\vec{w_1}, \vec{v_{i_1}}, \dots, \overrightarrow{v_{i_{l-1}}}\}\rangle = V$.

Zdůvodnění: Buď $\vec{x} \in V$. Pak $\vec{x} = d_1 \cdot \vec{v_1} + \dots + d_l \cdot \vec{v_l}$ pro nějaká $d_1, \dots, d_l \in T$. Ovšem

$\vec{v_j} = \vec{w_1} + \frac{-c_1}{c_j} \cdot \vec{v_1} + \dots + \frac{-c_{j-1}}{c_j} \cdot \overrightarrow{v_{j-1}} + \frac{-c_{j+1}}{c_j} \cdot \overrightarrow{v_{j+1}} + \dots + \frac{-c_l}{c_j} \cdot \vec{v_l}$, takže

$$\vec{x} = d_1 \cdot \vec{v_1} + \dots + d_{j-1} \cdot \overrightarrow{v_{j-1}} + d_j \cdot \left(\vec{w_1} + \frac{-c_1}{c_j} \cdot \vec{v_1} + \dots + \frac{-c_{j-1}}{c_j} \cdot \overrightarrow{v_{j-1}} + \frac{-c_{j+1}}{c_j} \cdot \overrightarrow{v_{j+1}} + \dots + \frac{-c_l}{c_j} \cdot \vec{v_l}\right) + + d_{j+1} \cdot \overrightarrow{v_{j+1}} + \dots + d_l \cdot \vec{v_l}.$$

Vidíme, že $\vec{x} = d_j \cdot \vec{w_1} + b_1 \cdot \vec{v_1} + \dots + b_{j-1} \cdot \overrightarrow{v_{j-1}} + b_{j+1} \cdot \overrightarrow{v_{j+1}} + \dots + b_l \cdot \vec{v_l} =$
$= d_j \cdot \vec{w_1} + b_{i_1} \cdot \vec{v_{i_1}} + \dots + b_{i_{j-1}} \cdot \overrightarrow{v_{i_{j-1}}} + b_{i_j} \cdot \vec{v_{i_j}} + \dots + b_{i_{l-1}} \cdot \overrightarrow{v_{i_{l-1}}}$ pro jistá $b_{i_1}, \dots, b_{i_{l-1}} \in T$.

To znamená, že $\vec{x} = \langle\{\vec{w_1}, \vec{v_{i_1}}, \dots, \overrightarrow{v_{i_{l-1}}}\}\rangle$.

(II) $k > 1$

Vektory $\vec{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_{k-1}}$ jsou lineárně nezávislé. Podle indukčního předpokladu $k-1 \leq l$ a existují $j_1, \dots, j_{l-k+1} \in \{1, \dots, l\}$ tak, že $\langle\{\vec{w_1}, \dots, w_{k-1}, \vec{v_{j_1}}, \dots, \overrightarrow{v_{j_{l-k+1}}}\}\rangle = V$. Kdyby $k > l$, bylo by $k-1 \geq l$, $k-1 = l$, $\langle\{\vec{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_{k-1}}\}\rangle = V$. Pak by $\vec{w_k} = c_1 \cdot \vec{w_1} + \dots + c_{k-1} \cdot w_{k-1}$ pro jistá $c_1, \dots, c_{k-1} \in T$, takže vektory $\vec{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_{k-1}}, \vec{w_k}$ by byly lineárně závislé a to by byl spor. Proto $k \leq l$.

Existují $c_1, \dots, c_{k-1}, d_1, \dots, d_{l-k+1} \in T$ takové, že $\vec{w_k} = c_1 \cdot \vec{w_1} + \dots + c_{k-1} \cdot \overrightarrow{w_{k-1}} + d_1 \cdot \vec{v_{j_1}} + \dots + d_{l-k+1} \cdot \overrightarrow{v_{j_{l-k+1}}}$. Nutně existuje $p \in \{1, 2, \dots, l-k+1\}$, $d_p \neq 0$. Jinak by totiž $\vec{w_k} = c_1 \cdot w_1 + \dots + c_{k-1} \cdot \overrightarrow{w_{k-1}}$, což by byl spor s lineární nezávislostí vektorů $\vec{w_1}, \dots, \vec{w_k}$. Položme

$i_1 = j_1$, $i_2 = j_2, \dots, i_{p-1} = j_{p-1}$, $i_p = j_{p+1}$, $i_{p+1} = j_{p+2}, \dots, i_{l-k} = j_{l-k+1}$. Pak

$\langle\{\vec{w_1}, \dots, \vec{w_k}, \vec{v_{i_1}}, \dots, \overrightarrow{v_{i_{l-k}}}\}\rangle = V$ Zdůvodnění: Buď $\vec{x} \in V$. Pak $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{w_1} + \dots + a_{k-1} \cdot \overrightarrow{w_{k-1}} + b_1 \cdot \vec{v_{j_1}} + \dots + b_{l-k+1} \cdot \overrightarrow{v_{j_{l-k+1}}}$ pro nějaká $a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_{l-k+1} \in T$. Ovšem

$\overrightarrow{v_{j_p}} = \frac{1}{d_p} \cdot \overrightarrow{w_k} + (-\frac{c_1}{d_p}) \cdot \overrightarrow{w_1} + \cdots + (-\frac{c_{k-1}}{d_p}) \cdot \overrightarrow{w_{k-1}} + (-\frac{d_1}{d_p}) \cdot \overrightarrow{v_{j_1}} + \cdots + (-\frac{d_{p-1}}{d_p}) \cdot \overrightarrow{v_{j_{p-1}}} +$
$+ (-\frac{d_{p+1}}{d_p}) \cdot \overrightarrow{v_{j_{p+1}}} + \cdots + (-\frac{d_{l-k+1}}{d_p}) \cdot \overrightarrow{v_{j_{l-k+1}}}$.
Takže $\vec{x} = e_1 \cdot \overrightarrow{w_1} + \cdots + e_k \cdot \overrightarrow{w_k} + f_1 \cdot \overrightarrow{v_{j_1}} + \cdots + f_{p-1} \cdot \overrightarrow{v_{j_{p-1}}} + f_p \cdot \overrightarrow{v_{j_{p+1}}} + \cdots + f_{l-k} \cdot \overrightarrow{v_{j_{l-k+1}}} =$
$e_1 \cdot \overrightarrow{w_1} + \cdots + e_k \cdot \overrightarrow{w_k} + f_1 \cdot \overrightarrow{v_{i_1}} + \cdots + f_{p-1} \cdot \overrightarrow{v_{i_{p-1}}} + f_p \cdot \overrightarrow{v_{i_p}} + \cdots + f_{l-k} \cdot \overrightarrow{v_{i_{l-k}}}$ pro nějaká
$e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots f_{l-k} \in T$. To znamená, že $\vec{x} \in \langle \{\overrightarrow{w_1}, \ldots, \overrightarrow{w_k}, \overrightarrow{v_{i_1}}, \ldots, \overrightarrow{v_{i_{l-k}}}\} \rangle$.

2.6. Souřadnice vektoru v bázi

2.6.1. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T s bází B, $\vec{x} \in V$, $f : B \to T$. Zobrazení f se nazývá souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi B, jestliže

(1) $\{\vec{b} \in B | f(\vec{b}) \neq 0\}$ je konečná

(2) $\vec{x} = \sum_{b \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b}$

2.6.2. TVRZENÍ

Souřadnice vektoru v bázi vždy existují a jsou určeny jednoznačně.

Důkaz:

(I) existence:

Protože $\langle B \rangle = V$, existují $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in T$, $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_k} \in B$, $\vec{x} = c_1 \cdot \vec{b_1} + c_2 \cdot \vec{b_2} + \cdots c_k \cdot \vec{b_k}$.
Lze předpokládat, že $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_k}$. jsou navzájem různé vektory. Stačí položit

$f(\vec{b}) =$ a) c_i pro $\vec{b} = \vec{b_i} (i = 1, 2, \ldots, k)$
b) 0 jinak.

(II) jednoznačnost:

Buďte f, g souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi B. Chceme: $f = g$. Označme $C = \{\vec{b} \in B | f(\vec{b}) \neq 0\}$, $D = \{\vec{b} \in B | g(\vec{b}) \neq 0\}$. Jestliže $C = D = \emptyset$, pak zřejmě $f = g$. Nechť tedy $C \neq 0$ nebo $D \neq 0$. Připomeňme, že množiny C a D jsou konečné. Množina $C \cup D$ je také konečná; dále $C \cup D \neq \emptyset$.

Počítejme: $\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = \sum_{\vec{b} \in C \cup D} f(\vec{b}) \cdot \vec{b} - \sum_{\vec{b} \in C \cup D} g(\vec{b}) \cdot \vec{b} = \sum_{\vec{b} \in C \cup D} (f(\vec{b}) - g(\vec{b})) \cdot \vec{b}$.

Množina B je lineárně nezávislá. Je tedy lineárně nezávislá každá její podmnožina, tedy i množina $C \cup D$. Pak ovšem pro každé $\vec{b} \in C \cup D$ je $f(\vec{b}) - g(\vec{b}) = 0$, $f(\vec{b}) = g(\vec{b})$. Pokud $\vec{b} \in B - (C \cup D)$, je $f(\vec{b}) = 0 = g(\vec{b})$. Celkem $f(\vec{b}) = g(\vec{b})$ pro všechna $\vec{b} \in B$, $f = g$.

2.6.3. OZNAČENÍ

Souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi B budeme značit $S(\vec{x}, B)$.

2.6.4. POZNÁMKA

Pokud $B = \{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\}$ $(n \in \mathbb{N})$, je zbrazení $S(\vec{x}, B)$ jednoznačně určeno sloupcem souřadnic vektoru $\vec{x}$ v konečné bázi B:

$$\begin{pmatrix} S(\vec{x}, B)(\vec{b_1}) \\ S(\vec{x}, B)(\vec{b_2}) \\ \vdots \\ S(\vec{x}, B)(\vec{b_n}) \end{pmatrix}$$

Tento sloupec souřadnic budeme často ztotožňovat se zobrazením $S(\vec{x}, B)$, tj: budeme psát

$$S(\vec{x},\ B)=\begin{pmatrix} S(\vec{x},\ B)(\vec{b_1}) \\ S(\vec{x},\ B)(\vec{b_2}) \\ \vdots \\ S(\vec{x},\ B)(\vec{b_n}) \end{pmatrix}.$$

2.6.5. PŘÍKLAD

Uvažme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ a vektory $\vec{b_1}=(1,\ 0)$, $\vec{b_2}=(2,\ 2)$. Pak $B=\{\vec{b_1},\ \vec{b_2}\}$ je báze:

(a) množina B je lineárně nezávislá:

Nechť $c_1,\ c_2\in\mathbb{R}$, $c_1\cdot\vec{b_1}+c_2\cdot\vec{b_2}=\vec{0}$. Chceme: $c_1=c_2=0$.

$$c_1\cdot(1,\ 0)+c_2\cdot(2,\ 2)=(0,\ 0)$$
$$(c_1,\ 0)+(2\cdot c_2,\ 2\cdot c_2)=(0,\ 0)$$
$$(c_1+2\cdot c_2,\ 2\cdot c_2)=(0,\ 0)$$
$$c_1+2\cdot c_2=0$$
$$2\cdot c_2=0$$

Řešení: $c_1=c_2=0$.

(b) $\langle B\rangle=\mathbb{R}^2$:

Nechť $\vec{x}=(x_1,\ x_2)\in\mathbb{R}^2$. Hledáme $c_1,\ c_2\in\mathbb{R}$ tak, aby $c_1\cdot\vec{b_1}+c_2\cdot\vec{b_2}=\vec{x}$, čili $c_1+2\cdot c_2=x_1$, $2\cdot c_2=x_2$.

Řešení: $c_1=x_1-x_2$, $c_2=\frac{1}{2}\cdot x_2$.

Z výpočtu v části (b) vidíme, že $S(\vec{x},\ B)=\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ \frac{1}{2}\cdot x_2 \end{pmatrix}$. Specielně, $S((0,\ 1),\ B)=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $S((11,\ 3),\ B)=\begin{pmatrix} 8 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

2.7. **Homomofrismus a izomorfismus vektorových prostorů**

2.7.1. DEFINICE

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem T, $\varphi: U\rightarrow V$. Zobrazení φ se nazývá homomorfismus, platí-li:

(1) Pro všechna $\vec{x},\ \vec{y}\in U$: $\varphi(\vec{x}+\vec{y})=\varphi(\vec{x})+\varphi(\vec{y})$.

(2) Pro všechna $c\in T$, pro všechna $\vec{x}\in U$: $\varphi(c\cdot\vec{x})=c\cdot\varphi(\vec{x})$.

Zobrazení φ se nazývá izomorfismus, platí-li:

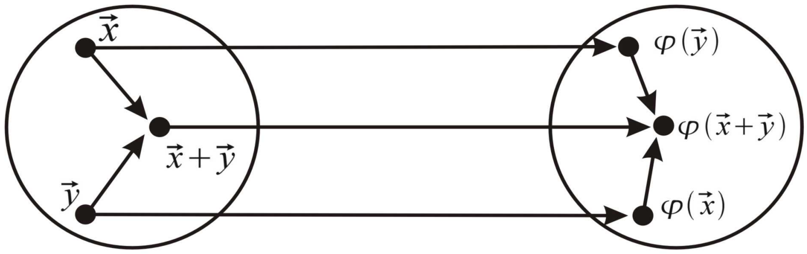
(1) φ je homomorfismus

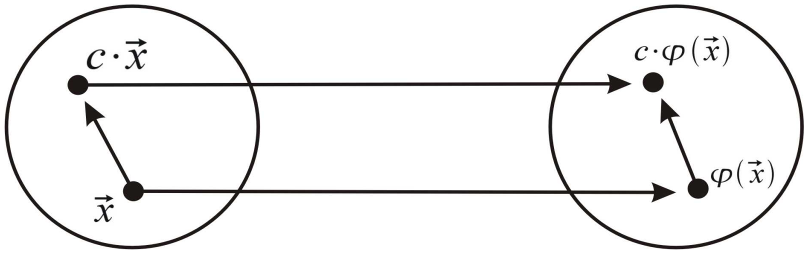
(2) φ je bijekce.

Vektorové prostory U, V se nazývají izomorfní, pokud existuje nějaký izomorfismus U na V. Fakt, že U, V jsou izomorfní, zapisujeme $U\simeq V$.

2.7.2. POZNÁMKA

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem T, $U \simeq V$. Pak existuje izomorfismus $\varphi: U \to V$.





Protože $\varphi: U \to V$ je bijekce, mají množiny U a V stejnou mohutnost, $|U|=|V|$. Volně lze tedy říci: U a V jsou stejné množiny; množinu V jsme ziskali z U přejmenováním prvků (prvek $\vec{x}$ se přejmenoval na $\varphi(\vec{x})$).

Navíc, jak je vidět na výše uvedených obrázcích, prvky z U a přejmenované prvky z V se stějně sčítají a stejně násobí skaláry.

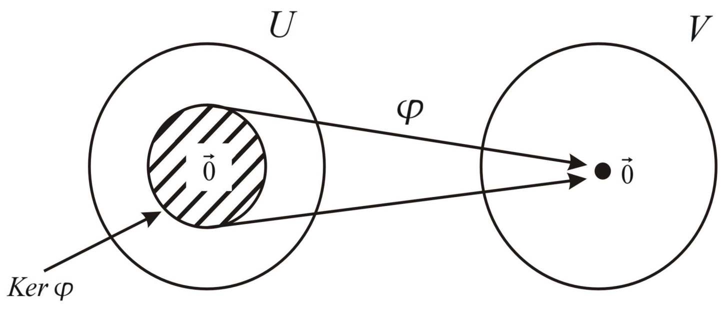
Můžeme shrnout (upozorňuji: opět jde o volné a intuitivní vyjádření): izomorfní vektorové prostory jsou stejné, liší se pouze pojmenováním svých prvků.

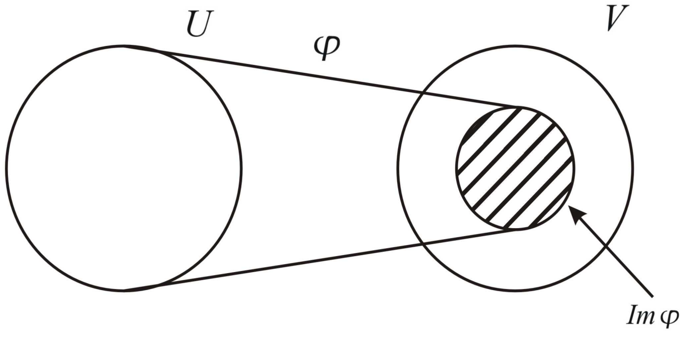
2.7.3. DEFINICE

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem T, $\varphi: U \to V$ je homomorfismus.

Množina $Ker\,\varphi = \{\vec{x} \in U | \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\}$ se nazývá jádro homomorfismu φ.

Množina $Im\,\varphi = \{\vec{y} \in V | existuje\, \vec{x} \in U,\ \varphi(\vec{x}) = \vec{y}\}$ se nazává obraz homomorfismu φ.





2.7.4. VĚTA

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem T, $\varphi: U \to V$ je homomorfismus. Platí: $Ker\,\varphi$ je podprostor vektorového prostoru U, $Im\,\varphi$ je podprostor vektorového prostoru V.

Důkaz: přenecháváme čtenáři.

2.8. Věta o reprezentaci vektorových prostorů

Nechť T je těleso, X je množina, $\mathrm{X} \neq \emptyset$. Definujeme

$V(\mathrm{X}) = \{f: \mathrm{X} \to T | \text{množina}\{x \in \mathrm{X} | f(x) \neq 0\} \text{ je konečná}\}$.

Dále pro libovolná f, $g \in V(\mathrm{X})$ a libovolné $c \in T$ definujeme $f+g$, $c \cdot f$ takto:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x) \quad \text{pro každe } x \in \mathrm{X}$$

Zřejmě $f+g$, $c \cdot f \in V(\mathrm{X})$.

2.8.1. TVRZENÍ

$V(\mathrm{X})$ je vektorový prostor nad tělesem T.

Důkaz přenecháváme čtenáři.

2.8.2.VĚTA (o reprezentaci vektorových prostorů)

Buď V netriviální vektorový prostor nad tělesem T. Pak existuje množina X tak, že vektorové prostory V a $V(\mathrm{X})$ jsou izomorfní.

Důkaz: Již víme, že ve V existuje báze (viz 2.4.4.). Označme ji B. Je $B \neq \emptyset$, protože jinak by vektorový prostor V byl triviální. Ukážeme, že $V(B)$ a V jsou izomorfní. Definujeme $\varphi: V(B) \to V$ takto: $\varphi(f) = \sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b}$ pro libovolné $f \in V(B)$. Definice zobrazení φ je korektní, protože množina $\{\vec{b} \in B | f(\vec{b}) \neq 0\}$ je konečná.

(I) φ je homomorfismus

(a) Nechť f, $g \in V(B)$. Chceme: $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(f+g) &= \sum_{\vec{b} \in B} (f+g)(\vec{b}) \cdot \vec{b} \\
&= \sum_{\vec{b} \in B} (f(\vec{b}) + g(\vec{b})) \cdot \vec{b} \\
&= \sum_{\vec{b} \in B} (f(\vec{b}) \cdot \vec{b} + g(\vec{b}) \cdot \vec{b}) \\
&= \sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot b + \sum_{\vec{b} \in B} g(\vec{b}) \cdot b \\
&= \varphi(f) + \varphi(g).
\end{aligned}$$

(b) Nechť $f \in V(B)$, $c \in T$. Chceme: $\varphi(c \cdot f) = c \cdot \varphi(f)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(c \cdot f) &= \sum_{\vec{b} \in B} (c \cdot f)(\vec{b}) \cdot \vec{b} \\
&= \sum_{\vec{b} \in B} (c \cdot f(\vec{b})) \cdot \vec{b} \\
&= \sum_{\vec{b} \in B} c \cdot (f(\vec{b}) \cdot \vec{b}) \\
&= c \cdot \sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b} \\
&= c \cdot \varphi(f).
\end{aligned}$$

(II) φ je bijekce

(a) φ je injekce

Nechť f, $g \in V(B)$, $\varphi(f) = \varphi(g)$. Chceme: $f = g$. Položme $\vec{x} = \sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b} = \sum_{\vec{b} \in B} g(\vec{b}) \cdot \vec{b}$.

Podle definice souřadnic vektoru (2.6.1.) je $f = S(\vec{x}, B)$, $g = S(\vec{x}, B)$, takže $f = g$ (souřadnice jsou určeny jednoznačně – viz 2.6.2.).

(b) φ je surjekce

Nechť $\vec{x} \in V$. Hledáme $f \in V(B)$ tak, aby $\varphi(f)=\vec{x}$, tj. $\sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{x}$. Stačí položit $f = S(\vec{x}, B)$.

2.8.3. DŮSLEDEK

Má-li vektorový prostor V nad tělesem T bázi s n vektory $(n \in \mathbb{N})$, pak V je izomorfní s T^n.

Důkaz: Buď B báze vektorového prostoru V, $|B|=n$, $B=\{b_1, \ldots, b_n\}$. V důkazu věty 2.8.2. jsme ukázali, že $V \simeq V(B)$. Stačí tedy ukázat, že $V(B) \simeq T^n$.

$V(B) = \{f : B \to T \mid \text{množina } \{\vec{b} \in B \mid f(\vec{b}) \neq 0\} \text{ je konečná}\}$
$\quad = \{f : B \to T\}$

Mezi množinami $V(B)$ a T^n zřejmě existuje vzájemně jednoznačná korespondence $f \to (f(\vec{b_1}), f(\vec{b_2}), \ldots, f(\vec{b_n}))$.

Dále,

$f+g \to ((f+g)(\vec{b_1}), (f+g)(\vec{b_2}), \ldots, (f+g)(\vec{b_n}))$
$\quad =(f(\vec{b_1})+g(\vec{b_1}), f(\vec{b_2})+g(\vec{b_2}), \ldots, f(\vec{b_n})+g(\vec{b_n}))$
$\quad =(f(\vec{b_1}), f(\vec{b_2}), \ldots, f(\vec{b_n}))+(g(\vec{b_1}), g(\vec{b_2}), \ldots, g(\vec{b_n}))$

$c \cdot f \to ((c \cdot f)(\vec{b_1}), (c \cdot f)(\vec{b_2}), \ldots, (c \cdot f)(\vec{b_n}))$
$\quad =(c \cdot f(\vec{b_1}), c \cdot f(\vec{b_2}), \ldots, c \cdot f(\vec{b_n}))$
$\quad =c \cdot (f(\vec{b_1}), f(\vec{b_2}), \ldots, f(\vec{b_n})).$

Tudíž $V(B) \simeq T^n$.

2.8.4. POZNÁMKA

Věta o reprezentaci vektorových prostorů říká,že až na izomorfismus neexistují žádné jiné vektorové prostory než $V(X)$.