Kapitola 5 - Matice (nad tělesem)

5.1. Definice matice

5.1.1. DEFINICE

Nechť T je těleso, m, $n \in \mathbb{N}$. Maticí typu (m, n) nad tělesem T rozumíme zobrazení množiny $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ do T.

5.1.2. OZNAČENÍ

Množinu všech matic typu (m, n) nad tělesem T budeme značit $T_{m,n}$.
Nechť $A \in T_{m,n}$, $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$. Místo $A((i, j))$ budeme psát a_{ij}.
Dále píšeme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ A = (a_{ij}).$$

5.1.3. DEFINICE

Nechť T je těleso, m, $n \in \mathbb{N}$. Každou matici z $T_{n,n}$ nazýváme čtvercová matice n-tého stupně.
Nechť $A \in T_{m,n}$. Matice A se nazývá nulová, pokud $a_{ij} = 0$ pro všecha $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Nulovou matici budeme značit O.

$$\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \ (n \text{ sloupců, } m \text{ řádků})$$

5.1.4. DEFINICE

Uvažujme následující podmínky týkající se matice:
(1) Všechny nulové řádky (tj. řádky sestávající z nul) jsou dole.
(2) Každý nenulový řádek začíná několika nulami následovanými jedničkou Tato 1 se nazývá vedoucí 1 daného řádku.
(3) Pozice vedoucí jedničky v řádku s vyšším indexem je více vpravo než pozice vedoucí jedničky v řádku s nižším indexem
(4) Každý prvek pod vedoucí jedničkou je nula.
(5) Každý prvek nad vedoucí jedničkou je nula.

Matice, která splňuje první čtyři podmínky, se nazývá matice v řádkovém stupňovitém tvaru.

Matice, která splňuje všech pět podmínek, se nazývá matice v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru.

5.1.5. PŘÍKLAD

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A je v řádkovém stupňovitém tvaru, není však v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru - podmínka (5) není splněna.
B je v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru.
C není v řádkovém stupňovitém tvaru – není splněna podmínka (1).
D není v řádkovém stupňovitém tvaru – není splněna podmínka (2).
E není v řádkovém stupňovitém tvaru – není splněna podmínka (3).
F není v řádkovém stupňovitém tvaru – není splněna podmínka (3), ani podmínka (4).

5.1.6. DEFINICE
Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Matice A se nazývá diagonální, pokud $a_{ij}=0$ pro všechna i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5.1.7. DEFINICE
Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Matice A se nazývá jednotkovou, pokud $a_{ij}=0$ pro všechna i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, a $a_{ii}=1$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Jednotkovou matici n-tého stupně budeme značit E (případně E_n, chceme-li zdůraznit její stupeň).

5.1.8. DEFINICE
Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Matice A se nazává horní trojúhelníková, pokud $a_{ij}=0$ pro všechna i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i > j$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5.1.9. DEFINICE
Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Matice A se nazývá symetrická, pokud $a_{ij}=a_{ji}$ pro všechna i, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

5.2. Operace s maticemi

5.2.1. DEFINICE
Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B, C \in T_{m,n}$. Matice C je součtem matic A, B, jestliže $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Označení: $C=A+B$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

5.2.2. DEFINICE

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in T_{m,n}$, $c \in T$. Matice B je skalárním násobkem (c-násobkem) matice A, jestliže $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Označení: $B = c \cdot A$.

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \cdots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & c \cdot a_{m2} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

5.2.3. DEFINICE

Nechť T je těleso, $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,p}$, $B \in T_{p,n}$, $C \in T_{m,n}$. Matice C je součinem matic A, B, jestliže $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Označení $C = A \cdot B$.

5.2.4. DEFINICE

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,n}$, $B \in T_{n,m}$. Matice B je matice transponovaná k matici A, jestliže $b_{ji} = a_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Označení $B = A^T$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

5.2.5. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Platí:

(I) Pro všechna $A \in T_{m,n}$, $B \in T_{n,p}$, $C \in T_{p,q}$
$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

(II) Pro všechna $A, B \in T_{m,n}$, $C \in T_{n,p}$
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

(III) Pro všechna $A \in T_{m,n}$, $B, C \in T_{n,p}$
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

(IV) Pro všechna $\alpha, \beta \in T$, $A \in T_{m,n}$
$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$.

(V) Pro všechna $\alpha \in T$, $A \in T_{m,n}$, $B \in T_{n,p}$
$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$.

(VI) Pro všechna $A \in T_{m,n}$
$E_m \cdot A = A$, $A \cdot E_n = A$.

(VII) Pro všechna $A \in T_{m,n}$
$(A^T)^T = A$.

(VIII) Pro všechna $A, B \in T_{m,n}$
$(A + B)^T = A^T + B^T$.

(IX) Pro všechna $\alpha \in T$, pro všechna $A \in T_{m,n}$
$(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$

(X) Pro všechna $A \in T_{m,n}$, $B \in T_{n,p}$
$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Důkaz:

(I) Označme $U=B\cdot C$, $V=A\cdot B$, $L=A\cdot U$, $P=V\cdot C$. Je $U\in T_{n,q}$, $V\in T_{m,p}$, $L\in T_{m,q}$, $P\in T_{m,q}$. Zvolme libovolně $i\in\{1, \dots, m\}$, $j\in\{1, \dots, q\}$. Chceme: $l_{ij}=p_{ij}$. Počítejme:

$$l_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot u_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}\cdot c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}\cdot(b_{kl}\cdot c_{lj})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}(a_{ik}\cdot b_{kl})\cdot c_{lj}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\cdot b_{kl})\cdot c_{lj},$$

$$p_{ij}=\sum_{l=1}^{p} v_{il}\cdot c_{lj}=\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kl}\right)\cdot c_{lj}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\cdot b_{kl})\cdot c_{lj}=l_{ij}.$$

(II) Označme $U=A+B$, $V=A\cdot C$, $W=B\cdot C$, $L=U\cdot C$, $P=V+W$. Je $U\in T_{m,n}$, $V\in T_{m,p}$, $W\in T_{m,p}$, $L\in T_{m,p}$, $P\in T_{m,p}$. Zvolme libovolně $i\in\{1, \dots, m\}$, $j\in\{1, \dots, p\}$.
Chceme: $l_{ij}=p_{ij}$.
Počítejme:

$$l_{ij}=\sum_{k=1}^{n} u_{ik}\cdot c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})\cdot c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\cdot c_{kj}+b_{ik}\cdot c_{kj})=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot c_{kj}+\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\cdot c_{kj}=v_{ij}+w_{ij}=p_{ij}.$$

(III) Postupujeme obdobně jako v části (II).

(IV) Důkaz přenecháváme čtenáři

(V) Nechť $U=A\cdot B$, $V=\alpha\cdot A$, $L=\alpha\cdot U$, $P=V\cdot B$. Je $U\in T_{m,p}$, $V\in T_{m,n}$, $L\in T_{m,p}$, $P\in T_{m,p}$. Zvolme libovolně $i\in\{1, \dots, m\}$, $j\in\{1, \dots, p\}$. Chceme: $l_{ij}=p_{ij}$. Počítejme:

$$l_{ij}=\alpha\cdot u_{ij}=\alpha\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha\cdot(a_{ik}\cdot b_{kj})=\sum_{k=1}^{n}(\alpha\cdot a_{ik})\cdot b_{kj}=\sum_{k=1}^{n} v_{ik}\cdot b_{kj}=p_{ij}.$$

(VI) Nechť $L=E_m\cdot A$. Je $L\in T_{m,n}$. Zvolme libovolně $i\in\{1, \dots, m\}$, $j\in\{1, \dots, n\}$.
Chceme: $l_{ij}=a_{ij}$. Počítejme:

$$l_{ij}=\sum_{k=1}^{m} e_{ik}\cdot a_{kj}=0\cdot a_{1j}+\dots+0\cdot a_{i-1,j}+1\cdot a_{ij}+0\cdot a_{i+1,j}+\dots+0\cdot a_{mj}=a_{ij}.$$

Druhá rovnost se dokáže obdobně.
(VII) Důkaz přenecháváme čtenáři.
(VIII) Důkaz přenecháváme čtenáři.
(IX) Důkaz přenecháváme čtenáři.
(X) Nechť $U=A\cdot B$, $V=B^T$, $W=A^T$, $L=U^T$, $P=V\cdot W$. Je $U\in T_{m,p}$, $V\in T_{p,n}$, $W\in T_{n,m}$, $L\in T_{p,m}$, $P\in T_{p,m}$. Zvolme libovolně $i\in\{1, \dots, p\}$, $j\in\{1, \dots, m\}$. Chceme: $l_{ij}=p_{ij}$. Počítejme: $l_{ij}=u_{ji}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\cdot b_{ki}=\sum_{k=1}^{n} w_{kj}\cdot v_{ik}=\sum_{k=1}^{n} v_{ik}\cdot w_{kj}=p_{ij}$.

5.3. **Hodnost matice**

5.3.1. OZNAČENÍ

Nechť T je těleso, $m, n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{m,n}$. Pak klademe

$$\vec{a}_1=(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$
$$\vec{a}_2=(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\vec{a}_m=(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

5.3.2. DEFINICE

Nechť T je těleso, $m, n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{m,n}$. Hodnost matice A značíme $h(A)$ a definujeme ji takto $h(A)=dim\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle$.

5.3.3. TVRZENÍ

Nechť T je těleso, $m, n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{m,n}$. Platí: $h(A)\leq min\{m, n\}$.

Důkaz:

(α) Poněvadž $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\in T^n$, je $\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle$ podprostor v T^n, takže $h(A)=dim\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle\leq dim\,T^n=n$.

(β) Víme, že z každé konečné množiny generátorů vektorového prostoru lze vybrat bázi (viz 3.1.3 (a)), tedy z vektorů $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ lze vybrat bázi podprostoru $\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle$, což znamená, že $h(A)=dim\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle\leq m$.

Z (α) a (β) plyne $h(A)\leq min\{m, n\}$.

5.3.4. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n\in\mathbb{N}$, $A, A'\in T_{m,n}$. Nechť matice A' vznikla z matice A užitím konečného počtu následujících úprav:

1) nahrazením řádku tímto řádkem plus jiný řádek vynásobený nějakým prvkem tělesa T

2) výměnou dvou řádků

3) vynásobením řádku nějakým nenulovým prvkem tělesa T.

Pak $\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle=\langle\{\vec{a}_1', \vec{a}_2', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$. Specielně, $h(A)=h(A')$.

Důkaz:

(I) Nechť $i, j\in\{1, \ldots, m\}$, $i\neq j$, $c\in T$, $\vec{a}_i'=\vec{a}_i+c\cdot\vec{a}_j$, $\vec{a}_k'=\vec{a}_k$ pro $k\in\{1, \ldots, m\}$, $k\neq i$.

Ukážeme, že $\langle\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle=\langle\{\vec{a}_1', \vec{a}_2', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$.

$\subseteq$: Pro $k\in\{1, \ldots, m\}$, $k\neq i$, je $\vec{a}_k=\vec{a}_k'\in\langle\{\vec{a}_1', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$. Dále, $\vec{a}_i=\vec{a}_i'+(-c)\cdot\vec{a}_j=\vec{a}_i'+(-c)\cdot\vec{a}_j'\in\langle\{\vec{a}_1', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$. Tudíž $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\subseteq\langle\{\vec{a}_1', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$, odkud již snadno plyne požadovaná inkluze.

$\supseteq$: Pro $k\in\{1, \ldots, m\}$, $k\neq i$, je $\vec{a}_k'=\vec{a}_k\in\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle$. Dále $\vec{a}_i'=\vec{a}_i+c\cdot\vec{a}_j\in\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle$. Tudíž $\{\vec{a}_1', \ldots, \vec{a}_m'\}\subseteq\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle$, odkud již snadno plyne požadovaná inkluze.

(II) Nechť $i, j\in\{1, \ldots, m\}$, $i\neq j$, $\vec{a}_i'=\vec{a}_j$, $\vec{a}_j'=\vec{a}_i$, $\vec{a}_k'=\vec{a}_k$ pro $k\in\{1, \ldots, m\}$, $k\neq i$, $k\neq j$.

Pak $\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a_{i-1}}, \vec{a}_i, \overrightarrow{a_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{a_{j-1}}, \vec{a}_j, \overrightarrow{a_{j+1}}, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle$

$=\langle\{\vec{a}_1', \ldots, \overrightarrow{a_{i-1}}', \vec{a}_j', \overrightarrow{a_{i+1}}', \ldots, \overrightarrow{a_{j-1}}', \vec{a}_i', \overrightarrow{a_{j+1}}', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$

$=\langle\{\vec{a}_1', \ldots, \overrightarrow{a_{i-1}}', \vec{a}_i', \overrightarrow{a_{i+1}}', \ldots, \overrightarrow{a_{j-1}}', \vec{a}_j', \overrightarrow{a_{j+1}}', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$

(III) Nechť $i\in\{1, \ldots, m\}$, $c\in T$, $c\neq 0$, $\vec{a}_i'=c\cdot\vec{a}_i$, $\vec{a}_k=\vec{a}_k'$ pro $k\in\{1, \ldots, m\}$, $k\neq i$.

Ukážeme, že $\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle=\langle\{\vec{a}_1', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$.

$\subseteq$: Pro $k\in\{1, \ldots, m\}$, $k\neq i$, je $\vec{a}_k=\vec{a}_k'\in\langle\{\vec{a}_1', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$.

Dále, $\vec{a}_i=\dfrac{1}{c}\cdot\vec{a}_i'\in\langle\{\vec{a}_1', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$. Tudíž $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\subseteq\langle\{\vec{a}_1', \ldots, \vec{a}_m'\}\rangle$, odkud již snadno plyne požadovaná inkluze.

$\supseteq$: Pro $k\in\{1, \ldots, m\}$, $k\neq i$, je $\vec{a}_k'=\vec{a}_k\in\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle$. Dále $\vec{a}_i'=c\cdot\vec{a}_i\in\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle$. Tudíž $\{\vec{a}_1', \ldots, \vec{a}_m'\}\subseteq\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle$, odkud již snadno plyne požadovaná inkluze

Tvrzení věty nyní vyplývají z (I), (II) a (III).

5.3.5. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{m,n}$. Platí: $h(A^T)=h(A)$.

Důkaz: Pokud $A=\mathrm{O}$, je $h(A)=0$, $h(A^T)=0$ a tvrzení platí.

Nechť $A\neq\mathrm{O}$. Stačí ukázat: $h(A^T)\leq h(A)$. Pak totiž $h(A)=h((A^T)^T)\leq h(A^T)$, takže $h(A^T)=h(A)$. Nechť $h(A)=k$, $h(A^T)=l$. Je $k\in\{1, \ldots, m\}$, $l\in\{1, \ldots, n\}$.

Označme $\vec{b}_1=(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$, $\vec{b}_2=(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$, $\ldots$, $\vec{b}_n=(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$.

Existují $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots m\}$ tak, že $\{\vec{a_{i_1}}, \ldots, \vec{a_{i_k}}\}$ je báze prostoru $\langle\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}\}\rangle$. Existují $j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že $\{\vec{b_{j_1}}, \ldots, \vec{b_{j_l}}\}$ je báze prostoru $\langle\{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\}\rangle$.
Označme $\vec{u_1} = (a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_1}, \ldots, a_{i_k j_1})$, $\vec{u_2} = (a_{i_1 j_2}, a_{i_2 j_2}, \ldots, a_{i_k j_2})$, ..., $\vec{u_l} = (a_{i_1 j_l}, a_{i_2 j_l}, \ldots, a_{i_k j_l})$.
Ukážeme, že vektory $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_l}$ jsou lineárně nezávislé.
Nechť $c_1, \ldots, c_l \in T$, $c_1 \cdot \vec{u_1} + \cdots + c_l \cdot \vec{u_l} = \vec{0}$. Chceme: $c_1 = c_2 = \cdots = c_l = 0$.
Ukážeme: $c_1 \cdot \vec{b_{j_1}} + c_2 \cdot \vec{b_{j_2}} + \cdots + c_l \cdot \vec{b_{j_l}} = \vec{0}$. K tomu stačí ukázat,že $c_1 \cdot a_{i j_1} + c_2 \cdot a_{i j_2} + \cdots + c_l \cdot a_{i j_l} = 0$ pro každé $i \in \{1, \ldots, m\} - \{i_1, \ldots, i_k\}$. Buď $i \in \{1, \ldots, m\} - \{i_1, \ldots, i_k\}$. $\{\vec{a_{i_1}}, \ldots, \vec{a_{i_k}}\}$ je báze prostoru $\langle\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}\}\rangle$, a proto existují $d_1, \ldots, d_k \in T$ tak, že $\vec{a_i} = d_1 \cdot \vec{a_{i_1}} + d_2 \cdot \vec{a_{i_2}} + \cdots + d_k \cdot \vec{a_{i_k}}$.
Pak $a_{ij_1} = \sum_{p=1}^{k} d_p \cdot a_{i_p j_1}$, $a_{ij_2} = \sum_{p=1}^{k} d_p \cdot a_{i_p j_2}$, ..., $a_{ij_l} = \sum_{p=1}^{k} d_p \cdot a_{i_p j_l}$. Potom

$$c_1 \cdot a_{i j_1} + c_2 \cdot a_{i j_2} + \cdots + c_l \cdot a_{i j_l} = c_1 \sum_{p=1}^{k} d_p \cdot a_{i_p j_1} + c_2 \sum_{p=1}^{k} d_p \cdot a_{i_p j_2} + \cdots + c_l \sum_{p=1}^{k} d_p \cdot a_{i_p j_l} =$$
$$d_1 \cdot (c_1 a_{i_1 j_1} + c_2 a_{i_1 j_2} + \cdots + c_l a_{i_1 j_l}) + d_2 \cdot (c_1 a_{i_2 j_1} + c_2 a_{i_2 j_2} + \cdots + c_l a_{i_2 j_l}) + \cdots +$$
$$+ d_k \cdot (c_1 a_{i_k j_1} + c_2 a_{i_k j_2} + \cdots + c_l a_{i_k j_l}) = d_1 \cdot 0 + d_2 \cdot 0 + \cdots + d_k \cdot 0 = 0.$$

Protože vektory $\vec{b_{j_1}}, \ldots, \vec{b_{j_l}}$ jsou lineárně nezávislé, jsou $c_1 = c_2 = \cdots = c_l = 0$.
Takže: $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_l}$ jsou lineárně nezávislé vektory v prostoru T^K. Z toho plyne, že $l \leq k$.

5.3.6. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,n}$, $B \in T_{n,p}$. Platí: $h(A \cdot B) \leq min\{h(A), h(B)\}$.
Důkaz: Označme $C = A \cdot B$. Nechť $i \in \{1, \ldots, m\}$. S ohledem na definici násobení matic platí: $\vec{c_i} = a_{i1} \cdot \vec{b_1} + a_{i2} \cdot \vec{b_2} + \cdots + a_{in} \cdot \vec{b_n}$, tedy $\vec{c_i} \in \langle\{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\}\rangle$. Proto $\langle\{\vec{c_1}, \ldots, \vec{c_m}\}\rangle \subseteq \langle\{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\}\rangle$, tedy $h(C) = h(A \cdot B) \leq h(B)$.
Použitím již dokázaného na součin $B^T \cdot A^T$ dostáváme $h(B^T \cdot A^T) \leq h(A^T)$, což podle 5.3.5 znamená $h(A \cdot B) \leq h(A)$ (uvědomme si, že $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$).
Celkem $h(A \cdot B) \leq min\{h(A), h(B)\}$.

5.4. Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus

5.4.1. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,n}$. Nechť matice A je v řádkovém stupňovitém tvaru.
Nechť $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$, $\vec{a_i} \neq \vec{0}$ pro $i \leq k$, $\vec{a_i} = \vec{0}$ pro $i > k$. Platí:
(I) $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}\}$ je báze prostoru $\langle\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}, \ldots, \vec{a_m}\}\rangle$.
(II) $dim\langle\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}\}\rangle = k$.
Důkaz:
(I) Jelikož $\vec{a_i} = \vec{0}$ pro $i > k$, je $\langle\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k}\}\rangle = \langle\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}\}\rangle$. Stačí tedy ukázat, že vektory $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k}$ jsou lineárně nezávislé. Nechť $c_1, \ldots, c_k \in T$, $c_1 \cdot \vec{a_1} + \cdots + c_k \cdot \vec{a_k} = \vec{0}$.
Chceme: $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.
Označme pozice vedoucích jedniček: $(1, j_1)$, $(2, j_2)$, $\cdots$, (k, j_k). Je $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.
Platí: $c_1 \cdot a_{1 j_1} + c_2 \cdot a_{2 j_1} + \cdots + c_k \cdot a_{k j_1} = 0$, dále $c_2 \cdot a_{2 j_2} + c_3 \cdot a_{3 j_2} + \cdots + c_k \cdot a_{k j_2} = 0$

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 = 0 \qquad c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 = 0$$
$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0.$$

Obdobně také $c_3 = c_4 = \cdots = c_k = 0$.
(II) Tvrzení (II) ihned plyne z (I).

5.4.2. GAUSSŮV-JORDANŮV ELIMINAČNÍ ALGORITMUS

VSTUP: Matice A typu (m,n) nad tělesem T.
VÝSTUP: Matice $\bar{A}$ typu (m,n) nad tělesem T s těmito vlastnostmi:

(I) $\overline{A}$ je v řádkovém stupňovitém tvaru.
(II) $\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle = \langle\{\vec{\overline{a}}_1, \ldots, \vec{\overline{a}}_m\}\rangle$.
NEBO
Matice $\overline{\overline{A}}$ typu (m, n) nad tělesem T s těmito vlastnostmi:
(I') $\overline{\overline{A}}$ je v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru.
(II') $\langle\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}\rangle = \langle\{\vec{\overline{\overline{a}}}_1, \ldots, \vec{\overline{\overline{a}}}_m\}\rangle$.
VÝPOČET:
1. Najděte nejlevější sloupec, jenž neobsahuje samé nuly.
2. Je-li to nutné vyměňte první řádek s řádkem, jenž obsahuje nenulový prvek a ve sloupci nalezeném v kroku 1.
3. Jestliže prvek a není 1, vynásobte první řádek prvkem $\frac{1}{a}$, abyste získali vedoucí jedničku prvního řádku.
4. Použijte první řádek k získání nul pod vedoucí jedničkou prvního řádku (použitím úpravy (1) z věty 5.3.4.).
5. Zakryjte první řádek a aplikujte první 4 kroky na zbývající podmatici. Pokračujte tak dlouho, až celá matice je v řádkovém stupňovitém tvaru. To bude matice $\overline{A}$.
6. Použijte poslední nenulový řádek k získání nul nad vedoucí jedničkou tohoto řádku. Použijte předposlední nenulový řádek k získání nul nad vedoucí jedničkou tohoto řádku. Pokračujte tak dlouho, až matice je v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru. To bude matice $\overline{\overline{A}}$.

(Je – li $A = \mathrm{O}$, výpočet neproběhne a $A = \overline{A} = \overline{\overline{A}} = 0$.)

Důkaz korektnosti algoritmu: Fakta (I) a (I') jsou zřejmá po krátké úvaze. Fakta (II) a (II') zdůvodníme takto:
Jednotlivé kroky algoritmu upravují výchozí matici A:
Krok 1: K úpravě nedochází.
Krok 2: K úpravě nedochází nebo je použita úprava (2) z věty 5.3.4.
Krok 3: K úpravě nedochází nebo je použita úprava (3) z věty 5.3.4.
Krok 4: Je použita konečně mnohokrát úprava (1) z věty 5.3.4.
Krok 5: Konečně mnohokrát se opakují kroky 1 až 4, je tedy použito konečně mnoho úprav (1), (2), (3) z věty 5.3.4.
Krok 6: Je použita konečně mnohokrát úprava (1) z věty 5.3.4.
Shrnutí: Při výpočtu matic $\overline{A}$ a $\overline{\overline{A}}$ se výchozí matice A upravuje pomocí konečně mnoha úprav (1), (2), (3) z věty 5.3.4. Rovnosti (II) a (II') nyní plynou bezprostředně z věty 5.3.4.

5.4.3. PŘÍKLAD

Nechť $A \in R_{4,5}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. Vypočtěte matice $\overline{A}$ a $\overline{\overline{A}}$.

Řešení: Použijeme Gaussův – Jordanův eliminační algoritmus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} \overset{krok\,4}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & -60 \end{pmatrix} \overset{krok\,3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & -60 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{krok\,4}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{krok\,6}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Tedy:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ \overline{\overline{A}}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

5.4.4. POZNÁMKA

Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus lze použít při řešení této standardní úlohy:
Je dáno těleso T, přirozená čísla m, n a vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m} \in T^n$. Má se určit dimenze a (nějaká) báze prostoru $V=\langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}\rangle$. Postupujme následovně:
Nechť

$$\vec{v_1}=(v_1^1, v_2^1, \ldots, v_n^1)$$
$$\vec{v_2}=(v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2)$$
$$\vdots$$
$$\vec{v_m}=(v_1^m, v_2^m, \ldots, v_n^m).$$

Sestrojíme matici $A\in T_{m,n}$, $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=v_j^i$. Vypočteme matici $\overline{A}$.
Víme: $V=\langle\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_m}\}\rangle=\langle\{\vec{\overline{a}_1}, \vec{\overline{a}_2}, \ldots, \vec{\overline{a}_m}\}\rangle$, $\overline{A}$ je v řádkovém stupňovitém tvaru.
Dle 5.4.1. pak $dim\,V=k$ a $\{\vec{\overline{a}_1}, \vec{\overline{a}_2}, \ldots, \vec{\overline{a}_k}\}$ je báze prostoru V, přičemž číslo k je počet nenulových řádků matice $\overline{A}$ (tj. $\vec{\overline{a}_i}\neq\vec{0}$ pro $i\leq k$, $\vec{\overline{a}_i}=\vec{0}$ pro $i>k$). Obdobně lze použít matici $\overline{\overline{A}}$.
Konkrétně, nechť v prostoru R^5 jsou dány vektory $\vec{v_1}=(1, 2, 3, 4, 5)$, $\vec{v_2}=(6, 7, 8, 9, 10)$, $\vec{v_3}=(11, 12, 13, 14, 15)$, $\vec{v_4}=(16, 17, 18, 19, 20)$. Nechť $V=\langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}\rangle$. Má se určit $dim\,V$ a nějaká báze prostoru V. Sestrojíme tedy matici A.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\\16&17&18&19&20\end{pmatrix}$$

V 5.4.3. jsme spočítali, že $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $\overline{\overline{A}}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Dostáváme tedy tuto odpověď: $dim V=2$, $\{(1, 2, 3, 4, 5), (0, 1, 2, 3, 4)\}$ je báze V, $\{(1, 0, -1, -2, -3), (0, 1, 2, 3, 4)\}$ je báze V.

5.5. Matice regulární a singulární

5.5.1. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{n,n}$.
Matice A se nazývá regulární, když $h(A)=n$.
Matice A se nazývá singulární, není-li regulární.

5.5.2. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{m,m}$, $B\in T_{m,n}$. Jestliže A je regulární, pak maticová rovnice $A\cdot X=B$ má právě jedno řešení mezi maticemi typu (m, n) nad tělesem T.

Důkaz: Použijeme toto označení:
$\vec{v_1}=(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$, $\vec{v_2}=(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$, $\ldots$, $\vec{v_m}=(a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{mm})$
Uvědomme si tato tři fakta:
(I) $dim\langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}\rangle=h(A^T)$
(dle definice transponované matice a dle definice hodnosti matice)
(II) $h(A^T)=h(A)$ (dle 5.3.5.)
(III) $h(A)=m$ (matice A je regulární)
Shrneme-li, dostaneme $dim\langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}\rangle=m$. Zřejmě $\langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}\rangle\subseteq T^m$, $dim\,T^m=m$. Tudíž $\langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}\rangle=T^m$, $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$ je báze prostoru T^m.
Porovnejme j-tý sloupec matice $A\cdot X$ a j-tý sloupec matice B ($j\in\{1, \ldots, n\}$).

Dostaneme
$$\begin{array}{c}
a_{11}\cdot x_{1j}+a_{12}\cdot x_{2j}+\cdots+a_{1m}\cdot x_{mj}=b_{1j}\\
a_{21}\cdot x_{1j}+a_{22}\cdot x_{2j}+\cdots+a_{2m}\cdot x_{mj}=b_{2j}\\
\vdots\\
a_{m1}\cdot x_{1j}+a_{m2}\cdot x_{2j}+\cdots+a_{mm}\cdot x_{mj}=b_{mj}
\end{array}$$
neboli vektorově $x_{1j}\cdot\vec{v_1}+x_{2j}\cdot\vec{v_2}+\cdots+x_{mj}\cdot\vec{v_m}=\vec{w_j}$, kde $\vec{w_j}=(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj})$.
Řešit rovnici $A\cdot X=B$ tedy znamená řešit soustavu

$$x_{1j}\cdot\vec{v_1}+x_{2j}\cdot\vec{v_2}+\cdots+x_{mj}\cdot\vec{v_m}=\vec{w_j}, \ (j=1, \ldots, n) \qquad (*)$$

(dány jsou $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}, \vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_n}$, neznámé jsou x_{ij} pro $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$).

Vzhledem k tomu, že $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$ je báze prostoru T^m, soustava ($*$) má právě jedno řešení.

5.5.3. POZNÁMKA

Nechť T je těleso, $m, n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{m,m}$, $B\in T_{m,n}$, A je regulární. Má se vyřešit rovnice $A\cdot X=B$. Matici X lze určit pomocí Gaussova-Jordanova eliminačního algoritmu. Tento algoritmus, aplikovaný na matici A, postupně pomocí úprav $U_1, U_2, \ldots, U_k$ (jde o úpravy (1), (2), (3) z věty 5.3.4.) vypočte matici $\bar{\bar{A}}$. Uvědomme si, že matice $\bar{\bar{A}}$ má všechny řádky nenulové, takže každý její řádek má svou vedoucí jedničku. Protože $\bar{\bar{A}}$ je v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru, je $\bar{\bar{A}}=E$. Aplikujeme postupně úpravy $U_1, U_2, \ldots, U_k$ na matici B. Výslednou matici označme C.
$B\underset{U_1}{\rightarrow}\cdots\underset{U_k}{\rightarrow}C$
Tvrdíme, že matice C je jediné řešení rovnice $A\cdot X=B$. Nechť tedy $A\cdot X=B$. Je třeba ukázat, že $X=C$. Zvolme libovolně $j\in\{1, 2, \ldots, n\}$. Matice $A\cdot X$ má tento j-tý sloupec:

$$\begin{array}{c}
a_{11}\cdot x_{1j}+a_{12}\cdot x_{2j}+\cdots+a_{1m}\cdot x_{mj}\\
a_{21}\cdot x_{1j}+a_{22}\cdot x_{2j}+\cdots+a_{2m}\cdot x_{mj}\\
\vdots\\
a_{m1}\cdot x_{1j}+a_{m2}\cdot x_{2j}+\cdots+a_{mm}\cdot x_{mj}
\end{array}$$

Tento sloupec bude postupnou aplikací úprav $U_1, U_2, \ldots, U_k$ na matici $A\cdot X$ převeden na tvar

$$\begin{array}{c}
\bar{\bar{a}}_{11}\cdot x_{1j}+\bar{\bar{a}}_{12}\cdot x_{2j}+\cdots+\bar{\bar{a}}_{1m}\cdot x_{mj}\\
\bar{\bar{a}}_{21}\cdot x_{1j}+\bar{\bar{a}}_{22}\cdot x_{2j}+\cdots+\bar{\bar{a}}_{2m}\cdot x_{mj}\\
\vdots\\
\bar{\bar{a}}_{m1}\cdot x_{1j}+\bar{\bar{a}}_{m2}\cdot x_{2j}+\cdots+\bar{\bar{a}}_{mm}\cdot x_{mj}
\end{array}, \text{ čili } \begin{array}{c}
1\cdot x_{1j}+0\cdot x_{2j}+\cdots+0\cdot x_{mj}\\
0\cdot x_{1j}+1\cdot x_{2j}+\cdots+0\cdot x_{mj}\\
\vdots\\
0\cdot x_{1j}+0\cdot x_{2j}+\cdots+1\cdot x_{mj}
\end{array}, \text{ čili } \begin{array}{c}
x_{1j}\\
x_{2j}\\
\vdots\\
x_{mj}
\end{array}.$$

Uvažme nyní, že $A\cdot X=B$. Tudíž

$$\begin{array}{c} x_{1j}=c_{1j} \\ x_{2j}=c_{2j} \\ \vdots \\ x_{mj}=c_{mj} \end{array}$$

$X=C$.

5.5.4. PŘÍKLAD.

Nechť $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -100 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ jsou matice nad tělesem $\mathbb{R}$ l

Vyřešte maticovou rovnici $A\cdot X=B$.

Řešení: Použijeme postup popsaný v poznámce 5.5.3.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -100 & 2 & 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & -3 & 10 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 102 & 0 & 105 & 206 & 307 & 408 \\ 0 & 0 & 10 & 12 & 16 & 20 & 24 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{105}{102} & \frac{206}{102} & \frac{307}{102} & \frac{408}{102} \\ 0 & 0 & 10 & 12 & 16 & 20 & 24 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{105}{102} & \frac{206}{102} & \frac{307}{102} & \frac{408}{102} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{10} & \frac{16}{10} & \frac{20}{10} & \frac{24}{10} \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{102} & \frac{-2}{102} & \frac{-1}{102} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{105}{102} & \frac{206}{102} & \frac{307}{102} & \frac{408}{102} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{10} & \frac{16}{10} & \frac{20}{10} & \frac{24}{10} \end{array}\right).$$

Tedy $X=\begin{pmatrix} \frac{-3}{102} & \frac{-2}{102} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{105}{102} & \frac{206}{102} & \frac{307}{102} & \frac{408}{102} \\ \frac{12}{10} & \frac{16}{10} & \frac{20}{10} & \frac{24}{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{34} & \frac{-1}{51} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{35}{34} & \frac{103}{51} & \frac{307}{102} & 4 \\ \frac{6}{5} & \frac{8}{5} & 2 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$.

Zkouška:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -100 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-1}{34} & \frac{-1}{51} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{35}{34} & \frac{103}{51} & \frac{307}{102} & 4 \\ \frac{6}{5} & \frac{8}{5} & 2 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}=B .$$

Pomocné výpočty:

$\frac{-1}{34}+\frac{35}{34}=\frac{34}{34}=1$,

$\frac{-1}{51}+\frac{103}{51}=\frac{102}{51}=2$,

$\frac{-1}{102}+\frac{307}{102}=\frac{306}{102}=3$,

$0+4=4$,

$\frac{100}{34}+\frac{70}{34}=\frac{170}{34}=5$,

$\frac{100}{51}+\frac{206}{51}=\frac{306}{51}=6$,

$\frac{100}{102}+\frac{614}{102}=\frac{714}{102}=7$

$0+8=8$

$\frac{3}{34}-\frac{105}{34}+\frac{60}{5}=\frac{-102}{34}+12=-3+12=9$

$\frac{3}{51}-\frac{309}{51}+\frac{80}{5}=\frac{-306}{51}+16=-6+16=10$

$\frac{3}{102}-\frac{921}{102}+20=\frac{-918}{102}+20=-9+20=11$

$0-12+\frac{120}{5}=-12+24=12$

5.6. **Matice inverzní**

5.6.1. LEMMA

Nechť T je těleso, $n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{n,n}$. Platí: existuje nejvýše jedna matice $X\in T_{n,n}$ tak, že $A\cdot X=X\cdot A=E$.

Důkaz: Nechť X , $Y\in T_{n,n}$, $A\cdot X=X\cdot A=E$, $A\cdot Y=Y\cdot A=E$.

Chceme: $X=Y$. Počítejme: $X=X\cdot E=X\cdot(A\cdot Y)=(X\cdot A)\cdot Y=E\cdot Y=Y$.

5.6.2. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n\in\mathbb{N}$, A , $X\in T_{n,n}$.

Matice X se nazývá matice inverzní k matici A , platí-li:

$A\cdot X=X\cdot A=E$.

Označení: $X=A^{-1}$.

5.6.3. VĚTA

Nechť T je těleso, $n\in\mathbb{N}$, A , $X\in T_{n,n}$. Jestliže $A\cdot X=E$, pak $X\cdot A=E$ a tedy $X=A^{-1}$.

Důkaz: $n=h(E)=h(A\cdot X)\leq min\{h(A),\ h(X)\}\leq h(X)\leq n$. (Použili jsme větu 5.3.6.) Odtud $h(X)=n$, X je regulární matice. Dle 5. 5.2. existuje právě jedna matice $Y\in T_{n,n}$ splňující $X\cdot Y=E$.

Potom
$$\begin{aligned} A\cdot X&=E \quad / \cdot Y\\ (A\cdot X)\cdot Y&=E\cdot Y\\ A\cdot(X\cdot Y)&=Y\\ A\cdot E&=Y\\ A&=Y \end{aligned}$$

Takže $E=X\cdot Y=X\cdot A$.

5.6.4. VĚTA

Nechť T je těleso $n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{n,n}$. Platí:

Matice A^{-1} existuje právě tehdy, když matice A je regulární.

Důkaz:

(I) Nechť A^{-1} existuje. Chceme: A je regulární, tj. $h(A)=n$.

$n=h(E)=h(A\cdot A^{-1})\leq min\{h(A),\ h(A^{-1})\}\leq h(A)\leq n$ (použili jsme větu 5.3.6.).

Odtud $h(A)=n$.

(II) Nechť A je regulární. Chceme: A^{-1} existuje.

Dle 5.5.2. existuje právě jedna matice $X\in T_{n,n}$ tak, že $A\cdot X=E$. Dle 5.6.3. pak $X=A^{-1}$.

5.6.5. POZNÁMKA

Nechť T je těleso, $n\in\mathbb{N}$, $A\in T_{n,n}$, A je regulární. Má se určit matice A^{-1}. S ohledem na 5.6.3. to znamená vyřešit maticovou rovnici $A\cdot X=E$ ($X\in T_{n,n}$). K tomu lze použít Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus, jak je vyloženo v poznámce 5.5.3.

5.6.6. PŘÍKLAD

Nechť $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -100 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ je matice nad tělesem $\mathbb{R}$. Určete matici A^{-1}.

Řešení: Použijeme postup popsaný v poznámce 5.6.5.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 102 & 0 & 100 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{100}{102} & \frac{1}{102} & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{100}{102} & \frac{1}{102} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{102} & \frac{-1}{102} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{100}{102} & \frac{1}{102} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{array}\right). \text{ Tedy } A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{102} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{100}{102} & \frac{1}{102} & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{51} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{50}{51} & \frac{1}{102} & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Zkouška:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -100 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{51} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{50}{51} & \frac{1}{102} & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Pomocné výpočty:

$$\frac{1}{51}+\frac{50}{51}=\frac{51}{51}=1$$

$$\frac{-1}{102}+\frac{1}{102}=0$$

$$0+0=0$$

$$\frac{-100}{51}+\frac{100}{51}=0$$

$$\frac{100}{102}+\frac{2}{102}=\frac{102}{102}=1$$

$$0+0=0$$

$$\frac{-3}{51}-\frac{150}{51}+\frac{30}{10}=\frac{-30-1500+1530}{510}=0$$

$$\frac{3}{102}-\frac{3}{102}+0=0$$

$$10\cdot\frac{1}{10}=1$$

5.6.7. VĚTA

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, A, $B \in T_{n,n}$, A, B jsou regulární. Pak

(a) A^{-1} je regulární a $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) A^T je regulární a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(c) $A \cdot B$ je regulární a $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Důkaz:

(a) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, takže $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) $A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E^T = E$, $(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = E^T = E$, takže $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(c) $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$,
$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E$, takže $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.