

Axiomatická výstavba geometrie – axiomy

1 Hilbertova axiomatizace planimetrie

1.1 Axiomy incidence

NEDEFINOVANÉ POJMY (PRIMITIVNÍ POJMY):

bod

přímka

incidence: "bod B a přímka p jsou incidentní" ("bod B leží na přímce p ", "přímka p prochází bodem B ", " $B \in p$ ")

DEFINICE

Body $B_1, B_2, B_3, \dots$ jsou **kolineární**, pokud existuje přímka se všemi těmito body incidentní.

AXIOMY:

I1 Každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka.

I2 Na každé přímce leží aspoň dva různé body.

I3 Existují tři nekolineární body.

1.2 Axiomy uspořádání

NEDEFINOVANÉ POJMY:

uspořádání bodů: "bod B leží mezi body A a C ", zápis: $A * B * C$

DEFINICE

Nechť A, B jsou body, $A \neq B$. **Úsečka** AB je množina sestávající z bodů A, B a takových bodů X , že $A * X * B$. Body A, B jsou **koncové body úsečky**.

AXIOMY:

- U1 Jestliže $A * B * C$, pak A, B, C jsou tři různé kolineární body a platí také, že $C * B * A$.
- U2 Pro libovolné vzájemně různé body A a C existují body B a D tak, že $A * B * C$ a $A * C * D$.
- U3 Pro libovolné tři vzájemně různé kolineární body právě jeden z nich leží mezi zbylými dvěma.
- U4P (**Paschův axiom**, 1882) Nechť přímka p neprochází žádným z nekolineárních bodů A, B, C . Jestliže p protíná úsečku AB , pak protíná buď úsečku AC nebo úsečku BC .

1.3 Axiomy shodnosti

DEFINICE

Nechť A, B jsou body, $A \neq B$. **Polopřímka** $\overrightarrow{AB}$ je množina bodů úsečky AB spolu s body X takovými, že $A * B * X$.

DEFINICE

Dána je přímka p a body A, B neležící na přímce p . Říkáme, že body A, B **leží na stejné straně od přímky** p , pokud $A = B$ nebo pokud $A \neq B$ a úsečka AB neprotíná přímku p .

DEFINICE

Pro přímku $p = \overleftrightarrow{AB}$ a bod C neležící na této přímce je **polorovina** $\overrightarrow{pC} = \overrightarrow{ABC}$ množina bodů X takových, že C a X leží na stejné straně od přímky p (**vnitřní body poloroviny**) spolu s body přímky p (**hranice poloroviny**).

DEFINICE

Nechť A, B, C jsou nekolineární body. Potom polopřímky $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ a $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ tvoří **úhel při vrcholu** B . Označujeme ho $\angle ABC$, $\angle CBA$, $\angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\angle(\vec{c}, \vec{a})$, případně také $\angle B$, pokud je z kontextu jasné, kterými polopřímkami je určen. Polopřímky $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ nazýváme **ramena úhlu**. **Vnitřek úhlu** (**vnitřní body úhlu**) $\angle ABC$ je průnik vnitřních bodů poloroviny $\overrightarrow{BCA}$ s vnitřními body poloroviny $\overrightarrow{BAC}$. **Vnějšek úhlu** (**vnější body úhlu**) $\angle ABC$ jsou všechny body roviny kromě polopřímek $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ a vnitřku úhlu $\angle ABC$.

NEDEFINOVANÉ POJMY:

shodnost úseček: $AB \simeq CD$ "úsečky AB a CD jsou shodné"

shodnost úhlů: $\angle ABC \simeq \angle DEF$ "úhly $\angle ABC$ a $\angle DEF$ jsou shodné"

AXIOMY:

S1 Pro libovolné dva různé body A, B a polopřímku vycházející z bodu A' existuje na této polopřímce právě jeden bod B' takový, že $A'B' \simeq AB$.

S2 Jestliže $AB \simeq A'B'$ a $AB \simeq A''B''$, pak $A'B' \simeq A''B''$. Navíc, každá úsečka je shodná sama se sebou: $AB \simeq AB$.

S3 Jestliže $A*B*C$, $A'*B'*C'$, $AB \simeq A'B'$ a $BC \simeq B'C'$, pak $AC \simeq A'C'$.

S4 Pro daný úhel $\angle ABC$, danou polopřímku $\overrightarrow{B'A'}$ a danou polorovinu ohraničenou přímkou $\overleftrightarrow{A'B'}$ existuje právě jedna polopřímka $\overrightarrow{B'C'}$ v dané polorovině tak, že $\angle A'B'C' \simeq \angle ABC$.

S5 Jestliže $\angle ABC \simeq \angle A'B'C'$ a $\angle ABC \simeq \angle A''B''C''$, pak $\angle A'B'C' \simeq \angle A''B''C''$. Navíc, každý úhel je shodný sám se sebou: $\angle ABC \simeq \angle ABC$.

S6 Jestliže pro trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \simeq A'B'$, $BC \simeq B'C'$ a $\angle B \simeq \angle B'$, pak $\angle A \simeq \angle A'$ a $\angle C \simeq \angle C'$.

1.4 Axiom rovnoběžnosti

AXIOM:

R Pro každou přímku p a pro každý bod B neležící na přímce p existuje nejvýše jedna přímka q procházející bodem B a rovnoběžná s přímkou p .

1.5 Axiom spojitosti

AXIOM:

D (**Dedekindův axiom**) Nechť všechny body na přímce jsou rozděleny do dvou neprázdných disjunktních množin tak, že žádný bod z jedné množiny neleží mezi dvěma body z druhé množiny. Pak na této přímce existuje právě jeden bod B takový, že jedna z daných množin je polopřímka se začátkem v bodě B a druhá množina je jejím doplňkem.

POZNÁMKA:

Nechť P je množina všech bodů přímky, $P = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$. Zakázaná je tato situace:

$$X * Y * Z, \quad X, Z \in M_i, \quad Y \in M_j, \quad i \neq j$$

1.6 Absolutní geometrie

Geometrie, kterou je možné popsat axiomy incidence, uspořádání, shodnosti a spojitosti, se nazývá **absolutní geometrie**. Tato geometrie je tedy nezávislá na axiomu rovnoběžnosti.

1.7 Euklidovská geometrie

Pokud k absolutní geometrii přidáme axiom R, dostaneme **euklidovskou geometrii**.

1.8 Lobačevského (hyperbolická) geometrie

Pokud k absolutní geometrii přidáme místo axiomu R axiom L, dostaneme **Lobačevského (hyperbolickou) geometrii**.

AXIOM:

L Pro každou přímku p a každý bod B neležící na přímce p existují aspoň dvě přímky q_1, q_2 , $q_1 \neq q_2$, procházející bodem B a rovnoběžné s přímkou p .

2 Tarského axiomatizace geometrie

ALFRED TARSKI (1901 – 1983), narozen ve Varšavě, zemřel v Berkeley, polský logik a matematik.

Na rozdíl od jiných systémů geometrie (jako je například Hilbertův systém), v nichž body, přímky, roviny, atd., jsou všechno primitivní (nedefinované) "geometrické objekty", v Tarského systému je pouze jeden typ primitivního geometrického objektu: body. Jinými slovy, všechny proměnné $x, y, z, \dots$ označují body.

Existují pouze dva primitivní geometrické (tj. ne-logické) pojmy: ternární relace B "mezi" a kvaternární relace D "ekvidistance".

- $B(xyz)$ intuitivně znamená, že bod y leží na úsečce spojující x a z (tj. případy y je x a y je z nejsou vyloučeny)
- $D(xyuv)$ intuitivně znamená, že vzdálenost x od y je stejná jako vzdálenost u od v .

Logickými symboly jazyka jsou

- rovnost $=$
- výrokové spojky konjunkce, disjunkce, negace, implikace, ekvivalence $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
- univerzální kvantifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$

Systém má dvanáct axiomů A1 – A12 a soubor elementárních axiomů spojitosti A13.

$$A1 \forall x \forall y [B(xyx) \rightarrow (x = y)]$$

$$A2 \forall x \forall y \forall z \forall u [B(xyu) \wedge B(yzu) \rightarrow B(xyz)]$$

$$A3 \forall x \forall y \forall z \forall u [B(xyz) \wedge B(xyu) \wedge (x \neq y) \rightarrow B(xzu) \vee B(xuz)]$$

$$A4 \forall x \forall y [D(xyyx)]$$

$$A5 \forall x \forall y \forall z [D(xyzz) \rightarrow (x = y)]$$

$$A6 \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [D(xyzu) \wedge D(xylvw) \rightarrow D(zuvw)]$$

$$A7 \forall t \forall x \forall y \forall z \forall u \exists v [B(xtu) \wedge B(yuz) \rightarrow B(xvy) \wedge B(ztv)]$$

$$A8 \forall t \forall x \forall y \forall z \forall u \exists v \exists w [B(xut) \wedge B(yuz) \wedge (x \neq u) \rightarrow B(xzv) \wedge B(xyw) \wedge B(vtw)]$$

$$A9 \forall x \forall x' \forall y \forall y' \forall z \forall z' \forall u \forall u' [D(xyx'y') \wedge D(yzy'z') \wedge D(xux'u') \wedge D(yuy'u') \wedge B(xyz) \wedge B(x'y'z') \wedge (x \neq y) \rightarrow D(zuz'u')]$$

$$A10 \forall x \forall y \forall u \forall v \exists z [B(xyz) \wedge D(yzuv)]$$

$$A11 \exists x \exists y \exists z [\neg B(xyz) \wedge \neg B(yzx) \wedge \neg B(zxy)]$$

$$A12 \quad \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v [D(xuxv) \wedge D(yuyv) \wedge D(zuzv) \wedge (u \neq v) \rightarrow B(xyz) \vee B(yzx) \vee B(zxy)]$$

A13 Nechť φ je formule, která neobsahuje žádný volný výskyt proměnných y, z, u , a ψ je formule, která neobsahuje žádný volný výskyt proměnných x, z, u . Pak je axiomem univerzální uzávěr formule

$$\exists z \forall x \forall y [\varphi \wedge \psi \rightarrow B(zxy)] \rightarrow \exists u \forall x \forall y [\varphi \wedge \psi \rightarrow B(xuy)]$$