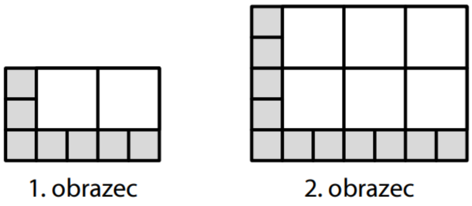
Zadání úloh

Poznámka: Číslo n je vždy kladné celé číslo.

1. Každý obrazec je složen ze šedých (menších) a bílých (větších) vždy stejných čtverců. Každý bílý čtverec má stranu dlouhou jako dva šedé čtverce. První obrazec je tvořen dvěma bílými čtverci vedle sebe, které jsou zdola a z levé strany obklopeny šedými čtverci. Druhý obrazec je tvořen šesti bílými čtverci uspořádanými do obdélníku 3×2 a který je zdola a z levé strany obklopen šedými čtverci.



   Určete počet všech čtverců v n-tém obrazci. Vyjádřete předpisem pro n-tý člen a určete rekurenci, včetně počátečních podmínek.

2. Na kolik nejvýše oblastí rozdělí rovinu n přímek, které prochází jedním bodem, a každé dvě jsou navzájem různé? (Tedy jaký je maximální počet oblastí?)

   Vyjádřete předpisem pro n-tý člen a určete rekurenci, včetně počátečních podmínek.

3. Na kolik nejvýše oblastí rozdělí rovinu n přímek, přičemž žádné tři přímky neprocházejí týmž bodem a žádné dvě přímky nejsou totožné? (Tedy jaký je maximální počet oblastí?)

   Vyjádřete předpisem pro n-tý člen a určete rekurenci, včetně počátečních podmínek.

4. Na kolik nejvýše částí dělí třírozměrný prostor n rovin?

   Určete rekurenci, včetně počátečních podmínek.

5. V rovině je nakresleno n kružnic, kde žádné tři kružnice neprocházejí týmž bodem a každé dvě kružnice se protínají právě ve dvou bodech.

   Určete rekurenci, včetně počátečních podmínek, pro počet oblastí roviny vytvořených danými kružnicemi.

   K úloze je možné přistoupit i následovně: Na kolik maximálně částí dělí rovinu n kružnic?

6. Najděte rekurenci včetně počátečních podmínek, pro počet výstupů, jak vystoupat po n schodech, pokud jedním krokem vezmeme jeden nebo dva schody.

7. Najděte rekurenci včetně počátečních podmínek pro počet binárních posloupností délky n obsahujících alespoň jednu dvojici po sobě jdoucích nul.

8. Budeme lepit ozdobnou řadu kachliček o rozměru $1 \times n$. K dispozici máme:

   - kachličky šesti různých barev o rozměru 1×1,
   - kachličky sedmi různých barev o rozměru 1×2.

Kolika způsoby můžeme vykachličkovat řadu kachliček o rozměru $1 \times n$ kachliček? Kachličky jsou navzájem dobře rozlišitelné, tedy situace (ve stejné barvě) 1×1 a 1×2 je jiná, než 1×2 a 1×1.

Určete rekurenci včetně počátečních podmínek.

9. (*Problém Hanojských věží*)Jsou dány tři trny (jehly, tyče, ...) A, B a C, přičemž na prvním trnu je navlečeno n navzájem různě velkých disků v pořadí od největšího disku (vespod) po nejmenší (zcela navrchu). Najděte rekurenci včetně počátečních podmínek, pro počet pohybů, které musíme udělat, abychom přesunuli všechny disky z trnu A na trn B, přičemž musíme dodržovat následující pravidla:
   - jedním pohybem můžeme přenést z jednoho trnu na jiný trn pouze jeden disk;
   - není možné položit větší disk na menší.

10. (*Paralelní verze problému Hanojských věží*) Jsou dány tři trny (jehly, tyče, ...) A, B a C, přičemž na prvním trnu je navlečeno n navzájem různě velkých disků v pořadí od největšího disku (vespod) po nejmenší (zcela navrchu). Najděte rekurenci včetně počátečních podmínek, pro počet kroků, které musíme udělat, abychom přesunuli všechny disky z trnu A na trn B, přičemž musíme dodržovat následující pravidla:
    - v jednom kroku můžeme přenést více disků, přičemž:
      - v každém kroku z každého trnu odebereme nejvýše jeden disk;
      - v každém kroku na každý trn navlékneme nejvýše jeden disk;
    - není možné položit větší disk na menší.