Funkce více proměnných – úlohy

Definiční obor funkce

Určete a zakreslete definiční obor následujících funkcí:

1) $f(x, y) = \frac{1}{xy}$

2) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

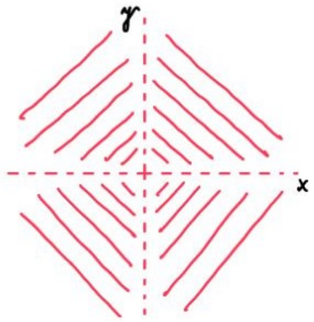
3) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$

4) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

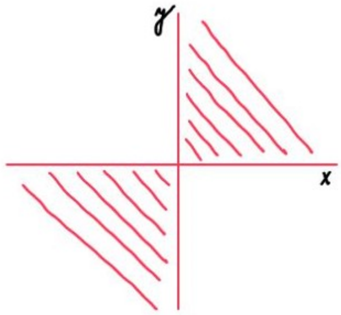
5) $f(x, y) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

6) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 + y) + \ln(1 - x^2 - y)$

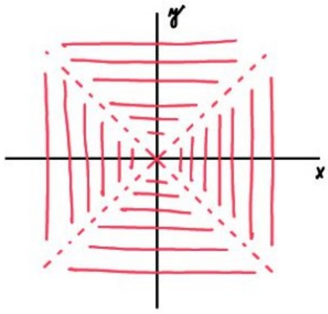
Výsledky:



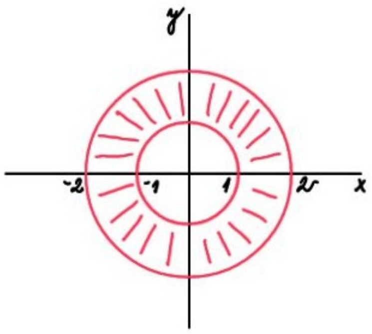
Řešení úlohy 1)



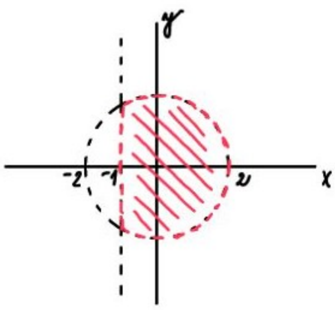
Řešení úlohy 2)



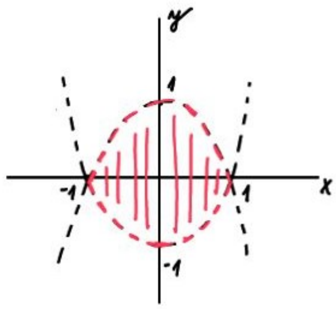
Řešení úlohy 3)



Řešení úlohy 4)



Řešení úlohy 5)



Řešení úlohy 6)

1) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; xy \neq 0\}$

2) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x \geq 0 \land y \geq 0) \lor (x \leq 0 \land y \leq 0)\}$

3) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 \neq y^2\}$

4) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

5) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > -1 \wedge x^2 + y^2 < 4\}$

6) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 + x^2 < y < 1 - x^2\}$

Graf funkce dvou proměnných

Načrtněte grafy následujících funkcí:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2$

2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

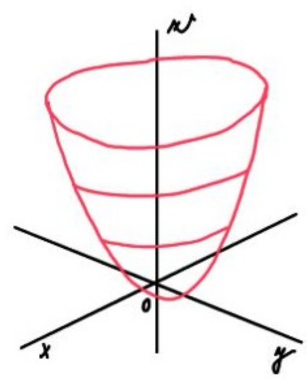
3) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

4) $f(x, y) = xy$

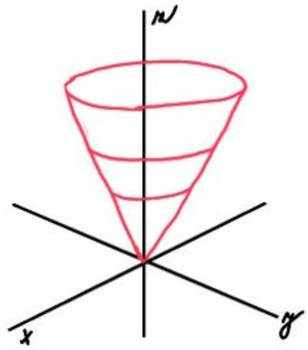
5) $f(x, y) = \frac{1}{|x|}$

6) $f(x, y) = \sin y$

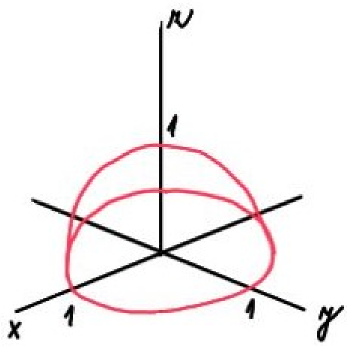
Výsledky:



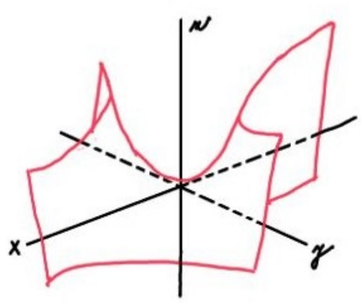
Řešení úlohy 1)



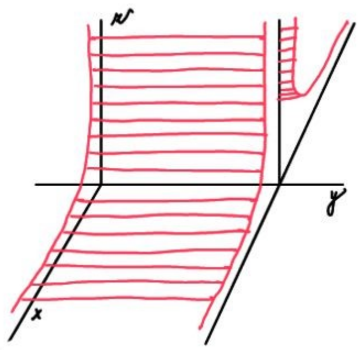
Řešení úlohy 2)



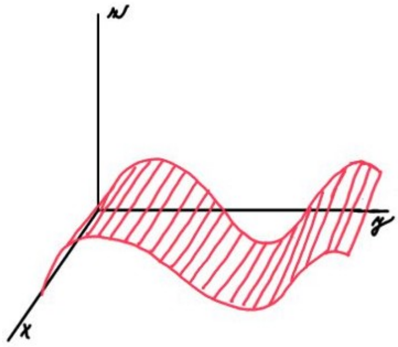
Řešení úlohy 3)



Řešení úlohy 4)



Řešení úlohy 5)



Řešení úlohy 6)

Parciální derivace

Vypočítejte parciální derivaci funkce podle všech proměnných:

1) $f(x,y) = x^3y + 4xy - 2y^3$
2) $f(x,y) = x\sqrt[3]{y} + \frac{y^2}{\sqrt{x}}$
3) $f(x,y) = x^y$
4) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$
5) $g(x,y,z) = 3x^2 + \frac{x-y}{x+y} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}$

Výsledky:

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 4y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 4x - 6y^2$
2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt[3]{y} + y^2(-\frac{1}{2})y^{-\frac{3}{2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}xy^{-\frac{2}{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}}y$
3) $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$
4) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+\ln y}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+\ln y} \cdot \frac{1}{y}$
5) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x + \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} + 2\mathrm{e}^{x-2y+3z}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -3\mathrm{e}^{x-2y+3z}$

Určete parciální derivace podle obou proměnných funkce $f(s,t) = \cos\frac{s^2}{t}$ v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$.

Výsledky: $\frac{\partial f}{\partial s}([\frac{\pi}{2}, 1]) = -\pi \sin\frac{\pi^2}{4}$; $\frac{\partial f}{\partial t}([\frac{\pi}{2}, 1]) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi^2}{4}$

Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu dané funkce:

1) $f(x,y) = x^3y + 4xy - 2y^3$
2) $f(x,y) = \sin(xy)$
3) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2y}$

Výsledky:

1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy$
   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy$
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 + 4$
2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y[-\sin(xy)]y$
   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x[-\sin(xy)]x$
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = [-\sin(xy)]xy + \cos(xy) \cdot 1$

3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y[\mathrm{e}^{x^2y} \cdot 2xy \cdot x + \mathrm{e}^{x^2y} \cdot 1]$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 \cdot \mathrm{e}^{x^2y} \cdot x^2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x[\mathrm{e}^{x^2y} \cdot x^2 \cdot y + \mathrm{e}^{x^2y} \cdot 1]$

Vypočtěte $\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial x \partial y}$ pro funkci $f(x,y) = 2x\mathrm{e}^y + 3y\mathrm{e}^x$.

Výsledky: $\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial x \partial y} = 0$

Tečná rovina

Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y) = xy + y^2$ v bodě $[1,2]$.

Výsledky: $2x + 5y - z - 6 = 0$