Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.
KMA – Katedra matematiky PřF

13.3.2024

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Kooperativní hry dvou hráčů

Kooperativní hry

- Předpokládejme nyní, že hráči mohou spolupracovat (ale nemusí).
- Před hrou mohou uzavírat závazné dohody.
- Je zřejmé, že hráči budou inklinovat k spolupráci a uzavření dohody, pokud to bude pro oba přínosné, tj. pokud tím oba získají větší výhru, než kdyby nespolupracovali.
- Spolupráce má význam pouze u her s nenulovým součtem.

Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou

Začněme zkoumáním her, kde hráči mají možnost uzavřít závazné dohody před začátkem hry, přičemž výsledný zisk, který vytvoří, nemůže být následně přerozdělen.

Definice

Uvažujme dvoumaticovou hru dvou hráčů s výplatními maticemi A, B typu $m \times n$. **Společná strategie** je matice pravděpodobností $P = (p_{ij})$ typu $m \times n$, tj.

$$p_{ij} \geq 0 \text{ pro } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Společná strategie přiřazuje pravděpodobnost každé dvojici ryzích strategií. Potom očekávané hodnoty výplatní funkce jsou

$$v_1(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{ij}, v_2(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_{ij}$$

Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou - příklad

Mějme hru dvou hráčů určenou dvoumaticí

$$\begin{pmatrix} 2;0 & -1;-1 & 0;3 \\ -2;-1 & 3;-1 & 0;2 \end{pmatrix}.$$

Jedna možná společná strategie by byla určená maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Očekávané výhry prvního, resp. druhého hráče by byly

$$v_1(P) = \frac{1}{8}\cdot 2 + 0\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-2) + \frac{5}{24}\cdot 3 + \frac{1}{12}\cdot 0 = \frac{3}{8}$$

$$v_2(P) = \frac{1}{8}\cdot 0 + 0\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{5}{24}\cdot(-1) + \frac{1}{12}\cdot 2 = \frac{17}{24}$$

Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou

V kooperativní hře hráči uzavírají dohodu ohledně společné strategie, kterou mají zvolit.

Definice

Kooperativní výplatní oblast je množina

$$K = \{(v_1(P), v_2(P)) : P \text{ je společná strategie}\}.$$

K je konvexní, uzavřená a omezená množina obsahující odpovídající nekooperativní oblast.

Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou - příklad

Vraťme se ke konfliktu typu manželský spor.

$$\begin{pmatrix} 2;1 & -1;-1 \\ -1;-1 & 1;2 \end{pmatrix}$$

Řešili jsme jako nekooperativní hru. Máme dva rovnovážné body v ryzích strategiích a jeden rovnovážný bod ve smíšených strategiích.

$$\mathbf{x}'^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}'^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}''^0 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \mathbf{y}''^0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou - příklad

Přitom očekávané hodnoty výhry jsme určili takto.

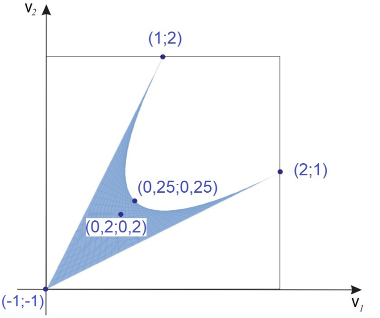
$$v_1(x_1, y_1) = x_1(5y_1 - 2) - 2y_1 + 1$$

$$v_2(x_1, y_1) = y_1(5x_1 - 3) - 3x_1 + 2$$

Rovnovážný bod	Očekávaná hodnota výhry
((1;0),(1;0))	(2;1)
((0,6;0,4),(0,4;0,6))	(0,2;0,2)
((0;1),(0;1))	(1;2)

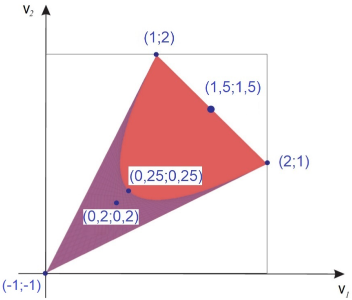
Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou - příklad

Potom všechny dvojice výplatních funkcí, tj. dosažitelné body v rámci nekooperativní hry lze zobrazit takto:



Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou - příklad

Potom kooperativní výplatní oblast této hry vypadá takto:



Zobrazený bod (1,5;1,5) je pro společnou strategii

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

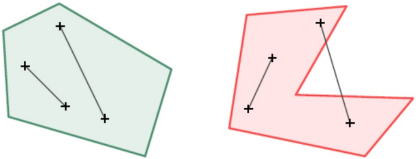
Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou

Abychom mohli vyslovit důležitou větu, připomeneme si základní pojmy týkající se konvexních množin.

Definice

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **konvexní**, jestliže pro každé $x, y \in M$ a každé reálné číslo $t, 0 \leq t \leq 1$, platí

$$tx + (1 - t)y \in M$$



Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou

Definice

Nechť $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ je konečná podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexní kombinací** množiny N se rozumí vektor

$$w = \sum_{i=1}^{k} t_i x_i, \text{kde } t_1 + \ldots + t_k = 1, \forall i : t_i \geq 0.$$

Definice

Nechť A je libovolná podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexním uzávěrem** množiny A se rozumí množina všech konvexních kombinací konečných podmnožin množiny A.

Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou

Platí následující věta.

Věta

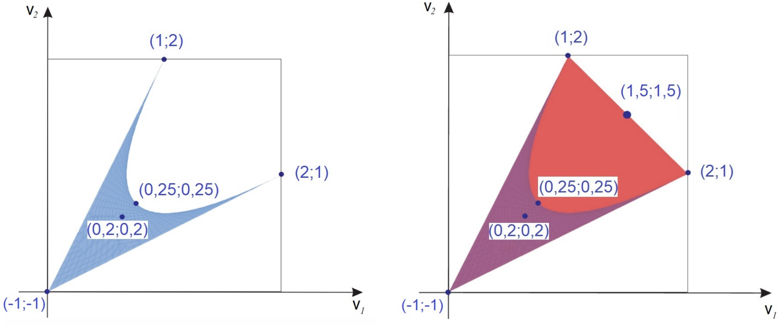
Uvažujme hru dvou hráčů určenou maticemi A a B typu $m \times n$. Kooperativní výplatní oblast je konvexní uzávěr množiny bodů v $\mathbb{R}^2$, jejichž souřadnice jsou prvky dvoumatice tvořené maticemi A a B.

Důkaz je zřejmý. Je-li P společná strategie, pak odpovídající dvojice hodnot výplatních funkcí jsou

$$(v_1(P), v_2(P)) = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}a_{ij}, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}b_{ij}).$$

Všechny tyto body vytvoří konvexní uzávěr množiny $\{(a_{ij}, b_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. A naopak jakýkoli bod konvexního uzávěru této množiny je výplatní dvojicí.

Konflikt manželský spor:



Kooperativní hra s přenosnou výhrou

Nyní předpokládejme **přenosnou výhru**, tj. že hráči si společnou výhru mohou přerozdělit dle dohody.

- V případě, kdy výplatou je například užitek (jak je to ve hře manželský spor), není možné tento užitek přenést z jednoho hráče na druhého.
- Pokud je výplatou například zisk v penězích, hráči mají možnost tento zisk libovolně přerozdělovat.
- Toto otevírá možnost situace, kdy jeden hráč by při kooperaci získal dle výplatní matice menší výhru než při nekooperaci. Nicméně, vzhledem k přenosnosti výhry může druhý hráč přispět částí svého zisku, aby ho přiměl ke spolupráci.

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

Uvažujme následující dvoumaticovou hru, kdy výplatami si představíme například výhru v korunách.

$$\begin{pmatrix} 1;5 & 4;2 & 2;3 \\ 2;2 & 1;9 & 1;4 \\ 3;4 & 3;1 & 4;0 \end{pmatrix}$$

Nejprve nás zajímá zaručená výhra, tj. kolik hráč získá bez spolupráce.

- rovnovážná zaručená výhra – Nashův rovnovážný bod, je-li právě jeden
- maximinová zaručená výhra – zaručená výhra hráče, pokud se mu ten druhý bude snažit co nejvíce uškodit

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

Rovnovážná zaručená výhra:

- hráči se dohodli, že spolupracovat nebudou
- zvolí tedy sedlový prvek – Nashovu rovnováhu
- zaručená výhra 1. hráče, označíme $v(\{1\})$
- zaručená výhra 2. hráče, označíme $v(\{2\})$

$$\begin{pmatrix} 1;[5] & (4);2 & 2;3 \\ 2;2 & 1;[9] & 1;4 \\ (3);[4] & 3;1 & (4);0 \end{pmatrix}$$

tedy

- $v(\{1\}) = 3$ Kč
- $v(\{2\}) = 4$ Kč

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

Maximinová zaručená výhra:

- hráči se dohodnou, že spolupracovat budou, ale co když protihráč dohodu nedodrží
- kolik dokáže hráč získat, i když mu protihráč bude dělat naschvály
- zaručená výhra 1. hráče $v(\{1\}) = \max_i \min_j a_{ij}$
- zaručená výhra 2. hráče $v(\{2\}) = \max_j \min_i a_{ij}$

$$
\begin{array}{cccl}
1;5 & 4;2 & 2;3 & \longrightarrow 1 \\
2;2 & 1;9 & 1;4 & \longrightarrow 1 \\
3;4 & 3;1 & 4;0 & \longrightarrow 3 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
2 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

tedy

- $v(\{1\}) = 3$ Kč
- $v(\{2\}) = 2$ Kč

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

- nyní budeme hledat celkovou výhru hráčů při spolupráci
- jejich společnou výhru označíme $v(\{1,2\})$
- kolik získají celkem při strategii x_1 a y_2, kolik při strategii x_3 a y_3?

$$\begin{pmatrix} 1;5 & 4;2 & 2;3 \\ 2;2 & 1;9 & 1;4 \\ 3;4 & 3;1 & 4;0 \end{pmatrix}$$

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 4 & \mathbf{10} & 5 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Pak $v(\{1,2\}) = \max_i \max_j (a_{ij} + b_{ij}) = 10$ Kč.

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

- Rovnovážná zaručená výhra
  $v(\{1\}) = 3$ Kč
  $v(\{2\}) = 4$ Kč
  $10 > 3 + 4$, tedy spolupráce se vyplatí
- Maximinová zaručená výhra
  $v(\{1\}) = 3$ Kč
  $v(\{2\}) = 2$ Kč
  $10 > 3 + 2$, tedy spolupráce se vyplatí

Takže první hráč zvolí druhou strategii a druhý hráč také zvolí druhou strategii, čímž dohromady získají 10 Kč. Otázkou zůstává, jak si tuto výhru rozdělit mezi sebou.

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

- Celkový zisk musí být rozdělen mezi hráče, označme a_1 zisk prvního hráče a a_2 zisk druhého hráče.
- Platí tedy rovnice $a_1 + a_2 = v(1,2)$, kde $v(1,2)$ je celkový zisk.
- První hráč musí dostat alespoň svou zaručenou výhru, což znamená $a_1 \geq v(1)$.
- Stejně tak druhý hráč musí dostat alespoň svou zaručenou výhru, což znamená $a_2 \geq v(2)$.

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

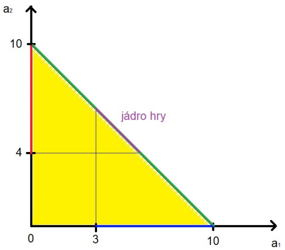
Uvažujme rovnovážnou zaručenou výhru.

$a_1 + a_2 = v(\{1,2\}) = 10$ Kč

$a_1 \geq v(\{1\}) = 3$ Kč

$a_2 \geq v(\{2\}) = 4$ Kč

jádro hry = všechny dvojice (a_1, a_2), které splňují uvedené vztahy



Kterou možnost z jádra hry vybrat?

Teorie vyjednávání

- Teorie vyjednávání, jako odvětví teorie her, se zabývá procesem dohody a spolupráce mezi hráči.
- Základy této teorie byly položeny Johnem Nashem v jeho článcích z let 1950 a 1953.
- Při analýze vyjednávání předpokládáme existenci **množiny přípustných dohod**, které jsou možné mezi hráči.
- Zároveň existuje **bod nedohody**, který představuje situaci, kdy hráči nedosáhnou dohody.
- Před vyjednáváním je hráčům znám bod nedohody, který můžeme určit na základě maximinové nebo rovnovážné zaručené výhry.
- Hráči při vyjednávání hledají řešení, které je pro ně výhodnější než nedohoda.

Teorie vyjednávání

Vyjednávací problém je charakterizován

- množinou hráčů $\{1, 2, \ldots, n\}$, my budeme nadále uvažovat pouze dva hráče $\{1, 2\}$
- množinou přípustných dohod P
- bodem nedohody
- množinou užitkových funkcí, které každé přípustné dohodě i bodu nedohody přiřadí užitek pro i-tého hráče

Ukážeme si následně čtyři typy řešení:

- Nashovo vyjednávací řešení
- rovnostářské vyjednávací řešení
- utilitární vyjednávací řešení
- vyjednávací řešení Kalai-Smorodinského

Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

Uvažujeme vyjednávací hru se dvěma hráči, označíme

- užitkovou funkci prvního hráče $u_1(x)$
- užitkovou funkci druhého hráče $u_2(y)$
- Nashovo vyjednávací řešení (x^*, y^*)
- bod nedohody (x^0, y^0)

Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

Na základě von Neumannovy a Morgensternovy teorie užitečnosti Nash stanovil následující axiomy, které musí (x^*, y^*) splňovat:

- paretovská optimalita
- symetrie
- nezávislost na lineární transformaci
- nezávislost na irelevantních alternativách

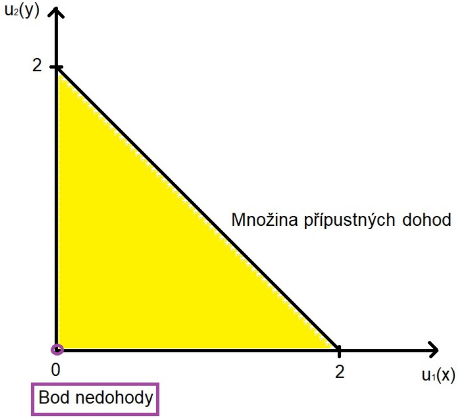
Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

Příklad

Význam axiomů si ukážeme rovnou na příkladu

- dva hráči si mají mezi sebe jakkoliv rozdělit částku 2 Kč
- pokud se nedohodnou, dostane každý 0 Kč (**bod nedohody**)
- pro jednoduchost předpokládejme, že užitek obou hráčů odpovídá finančnímu zisku
- $u_1(x) = x$
- $u_2(y) = y$
- hledáme Nashovo vyjednávací řešení (x^*, y^*)

Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

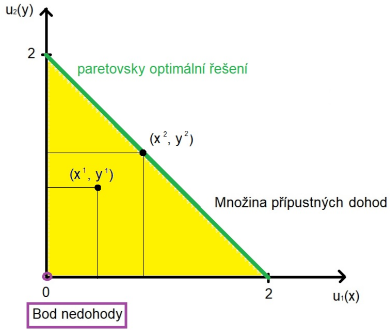


Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

1. axiom - paretovská optimalita

Uvažujme přípustné dohody (x^1, y^1) *a* (x^2, y^2), *pokud* $u_1(x^2) > u_1(x^1)$ *a zároveň* $u_2(y^2) > u_2(y^1)$, *pak* (x^1, y^1) *nemůže být vyjednávacím řešením* (x^*, y^*).

- vyjadřuje maximalizaci užitku obou hráčů
- řešení, které je dominované, nemůže být vyjednávacím řešením

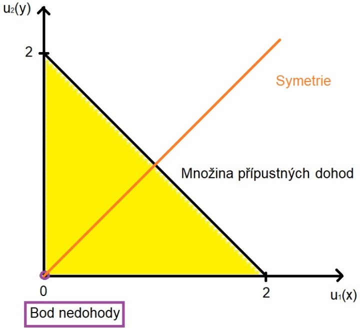


Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

2. axiom - symetrie

Je-li množina přípustných dohod symetrická (tj. $(u_1(x), u_2(y)) \in P \Leftrightarrow (u_2(y), u_1(x)) \in P$) a $u_1(x^0) = u_2(y^0)$, pak $u_1(x^*) = u_2(y^*)$

- pokud je problém symetrický, pak v Nashově rovnovážném řešení musí mít oba hráči stejný užitek
- oba hráči mají stejné vyjednávací schopnosti



Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

3. axiom - nezávislost na lineární transformaci

Pokud transformujeme původní užitkové funkce pomocí lineární transformace:

$$u_1'(x) = au_1(x) + b$$

$$u_2'(y) = cu_2(y) + d,$$

kde $a, c > 0$, *pak vyjednávacím řešením nového problému je opět* (x^*, y^*) *s užitky* $u_1'(x^*) = au_1(x^*) + b$ *a* $u_2'(y^*) = cu_2(y^*) + d$.

- je to obdobné jako u ekvivalentní hry, vynásobením kladnou konstantou a přičtením libovolné konstanty se rovnovážné strategie nezmění

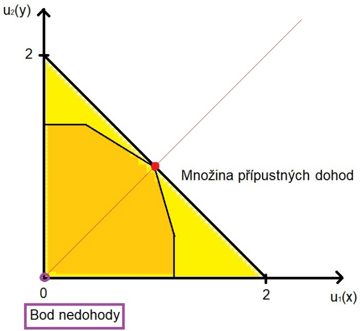
Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

4. axiom - nezávislost na irelevantních alternativách

Je-li $P^{'} \subseteq P$ množina přípustných dohod a $(x^*, y^*) \in P^{'}$, pak se Nashovo vyjednávací řešení (x^*, y^*) nezmění.

- pokud je nová množina přípustných dohod podmnožinou té původní a zároveň obsahuje Nashovo vyjednávací řešení, pak se řešení nezmění
- $P \backslash P^{'}$ tvoří irelevantní alternativy, jejichž přítomnost nebo nepřítomnost ve vyjednávací množině nesmí mít vliv na výsledek vyjednávání.

Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení



- v každém vyjednávacím problému **existuje právě jedno vyjednávací řešení, které splňuje výše uvedené axiomy**
- toto jediné vyjednávací řešení ve hře dvou hráčů, které splňuje všechny axiomy, maximalizuje hodnotu **Nashova součinu**

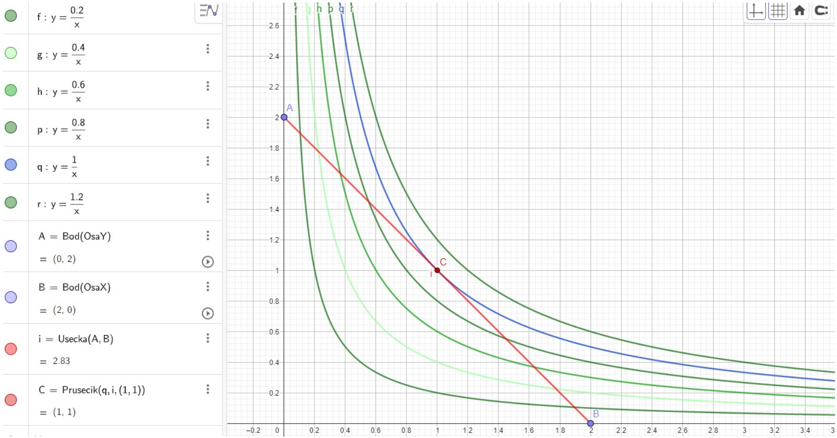
$$(u_1(x^*) - u_1(x^0))(u_2(y^*) - u_2(y^0)).$$

Když se vrátíme k našemu příkladu, spočítáme Nashův součin:

$$(u_1(x^*)-u_1(x^0))(u_2(y^*)-u_2(y^0)) = (u_1(x^*)-0)(u_2(y^*)-0) = u_1(x^*)u_2(y^*).$$

Množina přípustných dohod je omezena nerovnicí $u_1(x) + u_2(y) \leq 2$ a Nashův součin tak nabývá maxima v bodě $(u_1(1), u_2(1)) = (1, 1)$.

Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení



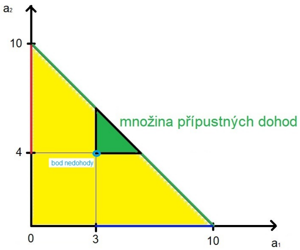
Připomeňme si hru z předchozí kapitoly.

$a_1 + a_2 = v(\{1,2\}) = 10$ Kč

$a_1 \geq v(\{1\}) = 3$ Kč

$a_2 \geq v(\{2\}) = 4$ Kč

jádro hry = všechny dvojice (a_1, a_2), které splňují uvedené vztahy



Nashův součin $(x^* - 3)(y^* - 4)$ nabývá maxima v bodě $\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right)$

Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

Ilustrativní příklad vyjednávacího problému z Nashova článku (1950): Bill a Jack jsou dva kamarádi, kteří mají různé věci, které mohou mezi sebou vyměňovat. Jakého nejvýhodnějšího řešení mohou chlapci výměnou dosáhnout?

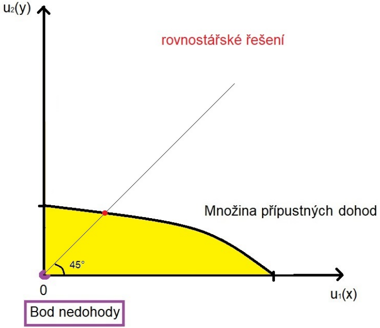
Billovy věci	**Užitek pro Billa**	**Užitek pro Jacka**
knížka	2	4
káča	2	2
míč	2	1
pálka	2	2
krabička	4	1
Jackovy věci		
psací pero	10	1
hračka	4	1
nůž	6	2
čapka	2	2

Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

Nashův součin nabývá svého maxima pro směnu, ve které Bill dá Jackovi knížku a káču, míč a pálku výměnou za psací pero, hračku a nůž. Užitky Billa a Jacka budou 24 a 11 a Nashův součin bude mít hodnotu $(24\text{-}12)(11\text{-}6)=60$. Můžete si ověřit, že není možné najít jinou směnu, která by dosahovala vyšší hodnoty Nashova součinu.

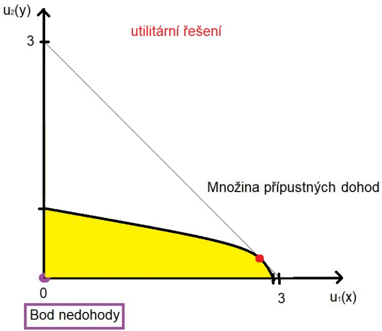
Teorie vyjednávání - rovnostářské vyjednávací řešení

- obvykle lidé očekávají určitou "spravedlnost"v rozdělování
- rovnostářské řešení předpokládá pro všechny hráče shodné užitky z jejich kooperace, tedy
- $(u_1(x^*) - u_1(x^0)) = (u_2(y^*) - u_2(y^0))$
- toto řešení je v rozporu s Nashovým axiomem č. 3 - nezávislost na lineární transformaci



Teorie vyjednávání - utilitární vyjednávací řešení

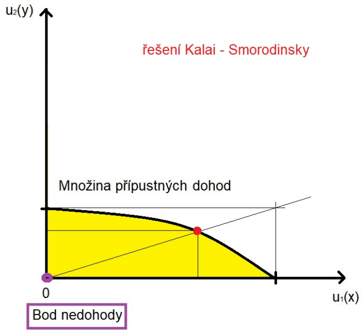
- utilitární vyjednávací řešení vyžaduje maximalizaci celkového užitku pro společnost (veřejné blaho)
- maximalizujeme součet $(u_1(x^*) - u_1(x^0)) + (u_2(y^*) - u_2(y^0))$
- stejně jako rovnostářské řešení je v rozporu s Nashovým axiomem č. 3 - nezávislost na lineární transformaci



Teorie vyjednávání - vyjednávací řešení Kalai-Smorodinského

- jedná se o řešení vycházející z nejoptimističtějších očekávání
- kritizují Nashovo řešení, vyřazení 4. axiomu - nezávislost na irelevantních alternativách
- místo něj axiom 5 - monotónnost
- *pokud dojde k rozšíření množiny připustných dohod, užitek hráče se zlepší nebo zůstane stejný*
- poměr nárůstu užitků pro hráče je stejný s poměrem nárůstu užitků v případě, že by hráči dosáhli maximálního možného užitku
- $\frac{u_1(x^*)-u_1(x^0)}{u_2(y^*)-u_2(y^0)} = \frac{\max(u_1(x)-u_1(x^0)}{\max(u_2(y))-u_2(y^0)}$

Teorie vyjednávání - vyjednávací řešení Kalai-Smorodinsky



Teorie vyjednávání - bod nedohody

- Všechna čtyři zmíněná řešení vyjednávacího problému pracují s bodem nedohody.
- Změna tohoto bodu nedohody má za následek změnu vyjednávacího řešení.
- Zdá se tedy, že klíčovým strategickým tahem hráče, ještě před samotným začátkem vyjednávání, je získání výhodnějšího postavení prostřednictvím manipulace s bodem nedohody. Toho lze dosáhnout například hrozbou nebo manipulací faktů apod.

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Nyní všechno spojíme do konkrétního příkladu. Uvažujme maticovou hru 3x2, výplaty jsou výhry v korunách.

$$\begin{pmatrix} 1;6 & 3;2 \\ 3;4 & 2;6 \\ 4;4 & 1;6 \end{pmatrix}$$

Jako bod nedohody budeme uvažovat maximinovou výhru

- zaručená výhra 1. hráče $v(\{1\}) = \max_i \min_j a_{ij}$
- zaručená výhra 2. hráče $v(\{2\}) = \max_j \min_i a_{ij}$

$$\begin{array}{ccc} 1;6 & 3;2 & \longrightarrow 1 \\ 3;4 & 2;6 & \longrightarrow 2 \\ 4;4 & 1;6 & \longrightarrow 1 \\ \downarrow & \downarrow & \\ 4 & 2 & \end{array}$$

tedy

- $v(\{1\}) = 2$ Kč
- $v(\{2\}) = 4$ Kč

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Dále zjistíme celkovou výhru hráčů při spolupráci

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & \mathbf{8} \\ \mathbf{8} & 7 \end{pmatrix}$$

$v(\{1,2\}) = \max_i \max_j (a_{ij} + b_{ij}) = 8$ Kč.

Rozdělení mezi hráče musí splňovat následující:

- $a_1 + a_2 = 8$
- $a_1 \geq 2$
- $a_2 \geq 4$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Pro rozdělení výhry pomocí teorie vyjednávání musíme znát užitkové funkce jednotlivých hráčů. Podle vztahu k riziku rozlišujeme hráče (vztah zisk-užitek)

- neutrální k riziku: $u(x) = x$
- citlivý k riziku: $u(x) = \sqrt{x}$
- vyhledávající riziko $u(x) = x^2$

Zde budeme uvažovat prvního hráče neutrálního k riziku a druhého hráče vyhledávajícího riziko.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x \\ u_2(y) &= y^2 \end{aligned}$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Nejprve sestrojíme množinu přípustných dohod.

$$\begin{aligned} (x^0, y^0) &= (2, 4) \\ (u_1(x^0), u_2(y^0)) &= (2, 16) \end{aligned}$$

přitom

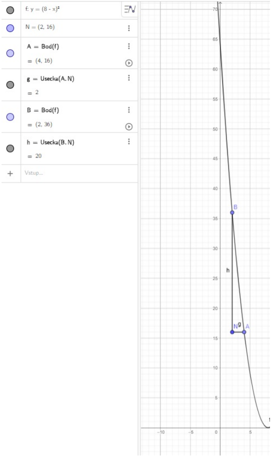
$$x^* + y^* = 8$$

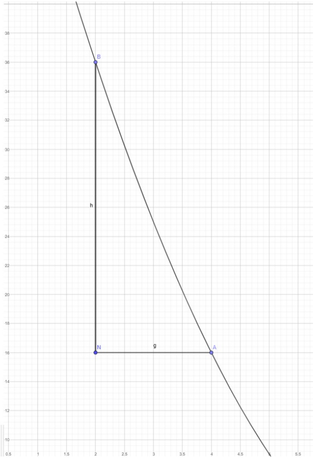
Graf užitkových funkcí $u_1(x)$ a $u_2(y)$ je dán vztahem

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x \\ u_2(y) &= y^2 = (8 - x)^2 = (8 - u_1(x))^2 \end{aligned}$$

Na ose x zobrazíme $u_1(x)$ a na ose y zobrazíme $u_2(y)$.

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení





Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Nashovo řešení

Vyjádříme Nashův součin:

$$(u_1(x^*) - u_1(x^0))(u_2(y^*) - u_2(y^0)) = (x^* - 2)((y^*)^2 - 16) =$$

$$= (8 - y^* - 2)((y^*)^2 - 16) = (6 - y^*)((y^*)^2 - 16) = -(y^*)^3 + 6(y^*)^2 + 16y^* - 96$$

Hledáme maximum, tedy položíme první derivaci rovnu nule.

$$-3(y^*)^2 + 12y^* + 16 = 0$$

Kvadratická rovnice má jedno kladné řešení y^*:

$$\begin{aligned} y^* &= 2 + \sqrt{4 + \frac{16}{3}} \doteq 5,055 \\ x^* &= 8 - 2 - \sqrt{4 + \frac{16}{3}} = 6 - \sqrt{4 + \frac{16}{3}} \doteq 2,945 \end{aligned}$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Nashovo vyjednávací řešení $(x^*, y^*) = (5,055; 2,945)$ s užitky pro jednotlivé hráče

$$\begin{aligned} u_1(x^*) &= 6 - \sqrt{4 + \frac{16}{3}} \doteq 2,945 \\ u_2(y^*) &= (2 + \sqrt{4 + \frac{16}{3}})^2 \doteq 25,554 \end{aligned}$$

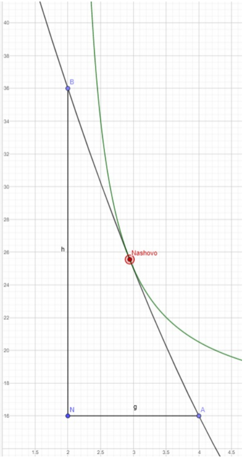
a hodnotou Nashova součinu

$$(u_1(x^*) - u_1(x^0))(u_2(y^*) - u_2(y^0)) = (2,945 - 2)(25,554 - 16) = 9,029.$$

Do grafu zakreslíme jako

$$\begin{aligned} (u_1(x^*) - 2)(u_2(y^*) - 16) &= 9,029 \\ u_2(y^*) &= 16 + \frac{9,029}{u_1(x^*) - 2} \end{aligned}$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení



Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

rovnostářské řešení

U rovnostářského řešení požadujeme rovnost

$$\begin{aligned} u_1(x^*) - u_1(x^0) &= u_2(y^*) - u_2(y^0) \\ x^* - 2 &= (y^*)^2 - 16 \\ 8 - y^* - 2 &= (y^*)^2 - 16 \end{aligned}$$

Tedy

$$(y^*)^2 + y^* - 22 = 0$$

Kvadratická rovnice má jedno kladné řešení y^*:

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{-1+\sqrt{89}}{2} \doteq 4,217 \\ x^* &= 8 - \frac{-1+\sqrt{89}}{2} \doteq 3,783 \end{aligned}$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Rovnostářské vyjednávací řešení $(x^*, y^*) = (3,783; 4,217)$ s užitky pro jednotlivé hráče

$$
\begin{aligned}
u_1(x^*) &= 8 - \frac{-1+\sqrt{89}}{2} \doteq 3,783 \\
u_2(y^*) &= (\frac{-1+\sqrt{89}}{2})^2 \doteq 17,783
\end{aligned}
$$

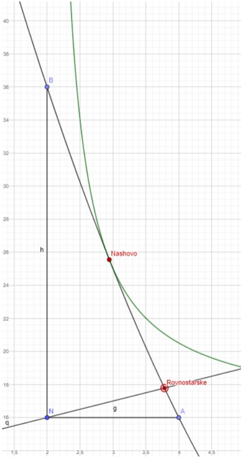
Do grafu zakreslíme jako

$$y = x + k,$$

konstantu k určíme tak, že přímka musí procházet bodem nedohody $(2,16)$, tedy

$$y = x + 14.$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení



Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

utilitární řešení

Maximalizujeme součet

$$\begin{aligned}(u_1(x^*) - u_1(x^0)) + (u_2(y^*) - u_2(y^0)) &= (x^* - 2) + ((y^*)^2 - 16) \\ &= 8 - y^* - 2 + (y^*)^2 - 16 \\ &= (y^*)^2 - y^* - 10\end{aligned}$$

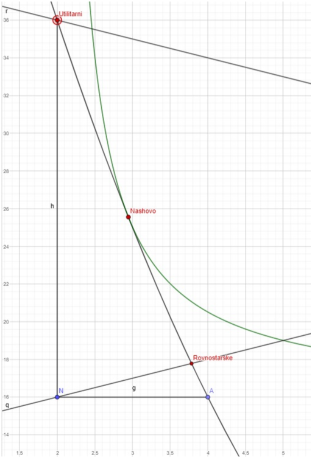
Tato funkce nabývá svého maxima na intervalu $y^* \in [4, 6]$ v bodě $y^* = 6$.

$$\begin{aligned}y^* &= 6 \\ x^* &= 2 \\ u_1(x^*) &= 2 \\ u_2(y^*) &= 36\end{aligned}$$

Do grafu zakreslíme jako $y = -x + k$, konstantu k určíme tak, že přímka musí procházet bodem utilitárního řešení $(2, 36)$, tedy

$$y = -x + 38.$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení



Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Kalai-Smorodinského řešení

$$
\begin{aligned}
\frac{u_1(x^*) - u_1(x^0)}{u_2(y^*) - u_2(y^0)} &= \frac{\max(u_1(x)) - u_1(x^0)}{\max(u_2(y)) - u_2(y^0)} \\
\frac{u_1(x^*) - 2}{u_2(y^*) - 16} &= \frac{4-2}{36-16} \\
u_1(x^*) - 2 &= \frac{1}{10}(u_2(y^*) - 16) \\
u_2(y^*) &= 10u_1(x^*) - 4 \\
(y^*)^2 &= 10(8 - y^*) - 4 \\
(y^*)^2 + 10y^* - 76 &= 0
\end{aligned}
$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Kvadratická rovnice má jedno kladné řešení y^*:

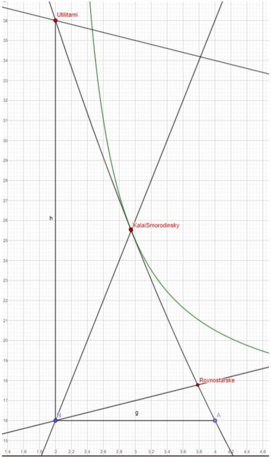
$$\begin{aligned} y^* &= -5 + \sqrt{101} \doteq 5,050 \\ x^* &= 8 + 5 - \sqrt{101} \doteq 2,950 \end{aligned}$$

Kalai-Smorodinského vyjednávací řešení $(x^*, y^*) = (2,950; 5,050)$ s užitky pro jednotlivé hráče

$$\begin{aligned} u_1(x^*) &= 13 - \sqrt{101} \doteq 2,950 \\ u_2(y^*) &= \left(-5 + \sqrt{101}\right)^2 \doteq 25,501 \end{aligned}$$

Do grafu zakreslíme jako $u_2(y^*) = 10u_1(x^*) - 4$.

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení



Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Shrnutí hry

$$\begin{pmatrix} 1;6 & 3;2 \\ 3;4 & 2;6 \\ 4;4 & 1;6 \end{pmatrix}$$

Hráči zvolí strategie (x_2, y_2) nebo (x_3, y_1), v obou případech získají 8 Kč.
Možné rozdělení výhry je následující:

- Nashovo řešení: (2,945; 5,055)
- rovnostářské řešení: (3,783;4,217)
- utilitární řešení: (2;6)
- Kalai-Smorodinského řešení (2,950;5,050)

Děkuji za pozornost.