Algebra I – úlohy k procvičení – 7.10.2020 – řešení

1. Nechť S je neprázdná množina. Na množině S je dána binární operace $*$, která splňuje následující podmínky:

   (a) pro všechna $a, b \in S$ je $a * b = a$

   (b) pro všechna $a, b \in S$ je $a * b = b * a$

   Dokažte, že množina S je jednoprvková.

   Řešení. Zvolíme libovolně $x, y \in S$. Chceme: $x = y$. Počítejme:

   $$x \underset{(a)}{=} x * y \underset{(b)}{=} y * x \underset{(a)}{=} y, \text{ tj.} x = y$$

2. Uveďte příklady binárních operací $*$, $\circ$, $\square$, $\triangle$ na množině $\mathbb{Z}$ (množina všech celých čísel) tak, aby platilo:

   (a) operace $*$ je asociativní a je komutativní

   (b) operace $\circ$ je asociativní a není komutativní

   (c) operace $\square$ není asociativní a je komutativní

   (d) operace $\triangle$ není asociativní a není komutativní

   Řešení.

   (a) Pro $a, b \in \mathbb{Z}$ položíme $a * b = a + b$. Je dobře známo, že operace sčítání celých čísel je asociativní a komutativní.

   (b) Pro $a, b \in \mathbb{Z}$ položíme $a \circ b = a$.

   - operace $\circ$ je asociativní: Zvolme libovolně $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Chceme: $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$. Počítejme:

     $$x \circ (y \circ z) = x \circ y = x, \ (x \circ y) \circ z = x \circ z = x$$

   - operace $\circ$ není komutativní: $1 \circ 2 = 1$, $2 \circ 1 = 2$.

(c) Pro $a, b \in \mathbb{Z}$ položíme $a\Box b = |a - b|$.

- operace $\Box$ není asociativní: $(1\Box 2)\Box 3 = |1-2|\Box 3 = |-1|\Box 3 = 1\Box 3 = |1-3| = |-2| = 2$, $1\Box(2\Box 3) = 1\Box|2-3| = 1\Box|-1| = 1\Box 1 = |1-1| = |0| = 0$.
- operace $\Box$ je komutativní: Zvolme libovolně $x, y \in \mathbb{Z}$. Chceme: $x\Box y = y\Box x$. Počítejme:

$$x\Box y = |x-y| = |(-1)\cdot(y-x)| = |-1|\cdot|y-x| = 1\cdot|y-x| = |y-x| = y\Box x$$

(d) Pro $a, b \in \mathbb{Z}$ položíme $a\triangle b = a - b$.

- operace $\triangle$ není asociativní: $1\triangle(2\triangle 3) = 1\triangle(2-3) = 1\triangle(-1) = 1-(-1) = 1+1 = 2$, $(1\triangle 2)\triangle 3 = (1-2)\triangle 3 = (-1)\triangle 3 = (-1)-3 = -4$.
- operace $\triangle$ není komutativní: $1\triangle 2 = 1-2 = -1$, $2\triangle 1 = 2-1 = 1$.

3. Na množině $\mathbb{R}^+$ (množina všech kladných reálných čísel) jsou definovány binární operace $\Box$ a $*$ takto: pro $x, y \in \mathbb{R}^+$ je

$$x\Box y = \sqrt{xy},\ x * y = \frac{x+y}{2}$$

Rozhodněte, zda operace $\Box$ je distributivní vzhledem k operaci $*$. Rozhodnutí zdůvodněte.

Řešení. Operace $\Box$ není distributivní vzhledem k operaci $*$.
Zdůvodnění:
Vezměme $x = 1$, $y = 4$, $z = 16$. Pak $x\Box(y*z) = 1\Box(4*16) = 1\Box\frac{4+16}{2} = 1\Box\frac{20}{2} = 1\Box 10 = \sqrt{1\cdot 10} = \sqrt{10}$, $(x\Box y)*(x\Box z) = (1\Box 4)*(1\Box 16) = \sqrt{1\cdot 4}*\sqrt{1\cdot 16} = \sqrt{4}*\sqrt{16} = 2*4 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Stačí si teď uvědomit, že $\sqrt{10} \neq 3$ ($\sqrt{10} = 3$ by dalo $10 = 9$, což není pravda).

4. Na množině $\mathbb{Z}$ je definována binární operace $*$ takto:

$$a * b = a + b + ab$$

(pro $a, b \in \mathbb{Z}$)

Rozhodněte, zda $\mathbb{Z}$ s operací $*$ je grupa. Rozhodnutí zdůvodněte.

Řešení. Množina $\mathbb{Z}$ s operací $*$ není grupa.
Zdůvodnění:
Předpokládejme, že $\mathbb{Z}$ s operací $*$ je grupa. Nechť e je neutrální prvek této grupy. Pak $e*0 = 0$, takže $e+0+e\cdot 0 = 0$, $e+0+0 = 0$, $e = 0$. Neutrální prvek tedy je číslo 0. Nechť y je inverzní prvek k číslu 1. Samozřejmě $y \in \mathbb{Z}$. Pak $1*y = e$, $1*y = 0$, $1+y+1\cdot y = 0$, $1+y+y = 0$, $1+2y = 0$, $2y = -1$, -1 je sudé číslo, spor.

5. Jestliže G je grupa, ve které $a^2 = 1$ pro všechna $a \in G$, pak G je komutativní grupa. Dokažte. (Používáme zde multiplikativní symboliku, takže 1 značí neutrální prvek grupy G.)

   Řešení. Nechť $a, b \in G$. Chceme: $ab = ba$. Počítejme:

   $$ab = ab \cdot 1 = ab(ba)^2 = abbaba = ab^2aba = a \cdot 1 \cdot aba = aaba = a^2ba = 1 \cdot ba = ba$$

   Takže opravdu $ab = ba$.