

Úlohy 1

Na případné chyby mě prosím upozorněte. Děkuji.

1. Rozhodněte a zdůvodněte, zda následující sousloví jsou výroky. Pokud odpovíte kladně, určete pravdivostní hodnotu výroku za předpokladu, že je to možné.

(a) Úhlopříčky čtverce jsou navzájem kolmé.

Řešení: Toto tvrzení je výrok. Výrok je tvrzení, o kterém má smysl rozhodovat, zda je pravdivé či nepravdivé. Toto tvrzení se týká geometrického vztahu úhlopříček čtverce a protože popisuje matematickou vlastnost čtverce, můžeme rozhodnout o jeho pravdivostní hodnotě. Pravdivostní hodnota: V případě čtverce platí, že jeho úhlopříčky jsou skutečně navzájem kolmé.

(b) Praha je hlavní město ČSSR.

(c) Praha byla hlavní město ČSSR.

(d) Číslo 8 je liché.

(e) Řešte nerovnici!

(f) Paříž je hlavní město Španělska.

(g) Která čísla dělí nulu?

(h) Nikde tu není.

2. Utvořte negaci výroku. Snažte se utvořený výrok vyjádřit pozitivně.

(a) Trojúhelník ABC je ostroúhlý.

Řešení: Negace výroku bude tvrdit opak, tj. „trojúhelník není ostroúhlý“. Snažíme se však vyjádřit negaci pozitivně, tedy formulovat výrok, který popisuje situaci, kdy trojúhelník není ostroúhlý. Pozitivní negace: „Trojúhelník ABC je tupoúhlý nebo pravoúhlý.“

(b) Trojúhelník ABC není ostroúhlý.

(c) $|5 - 7| < |5| + |-7|$.

(d) Délka úhlopříčky jednotkového čtverce je číslo racionální.

(e) $\sqrt{4} + \sqrt{9} \leq 5$.

(f) Množina M má alespoň k prvků.

Řešení: Množina M má nejvýše $k - 1$ prvků.

(g) Množina M má nejvýše k prvků.

Řešení: Množina M má alespoň $k + 1$ prvků.

(h) Množina M má alespoň 0 prvků.

(i) Množina M má nejvýše 0 prvků.

(j) Kružnice k_1 a k_2 se protínají.

(k) Kružnice k_1 a k_2 se dotýkají.

- (l) Přímka t má s kružnicí k jediný společný bod.
- (m) Rovnice $x^8 - 1 = 0$ má alespoň dva reálné kořeny.
- (n) Nejvýše tři prvočísla jsou jednociferná čísla.
- (o) Pravidelný dvanáctistěn má alespoň 20 vrcholů.
- (p) Číslo 30 je dělitelné alespoň třemi prvočíslly.
- (q) V této přihrádce je nejvýše $n + 1$ předmětů.
- (r) Daná množina má alespoň $n + 2$ prvků.

3. Sestavte tabulku pravdivostních hodnot a interpretujte výsledek.

- (a) $\neg(\neg a)$
- (b) $a \vee a$
- (c) $a \wedge a$
- (d) $a \Rightarrow a$
- (e) $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$

Řešení:

a	b	$\neg(a \vee b)$	$(\neg a \wedge \neg b)$	$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

Závěr: tautologie.

- (f) $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (b \Rightarrow a)$
- (g) $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$
- (h) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$
- (i) $((a \Rightarrow b) \wedge a) \Leftrightarrow b$
- (j) $((a \Rightarrow b) \wedge b) \Leftrightarrow a$
- (k) $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$
- (l) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (b \Rightarrow a)$
- (m) $(a \vee \neg a) \wedge (a \wedge \neg a)$
- (n) $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow b)$
- (o) $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$
- (p) $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$
- (q) $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow a)$
- (r) $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Leftrightarrow (a \Rightarrow c)$

Řešení:

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	(φ)	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$	(ψ)	$a \Rightarrow c$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1		1	1	1	1
1	1	0	1	0		0	0	0	1
1	0	1	0	1		0	1	0	0
1	0	0	0	1		0	0	0	1
0	1	1	1	1		1	1	1	1
0	1	0	1	0		0	1	0	0
0	0	1	1	1		1	1	1	1
0	0	0	1	1		1	1	1	1

Závěr: výrok je nepravdivý pro hodnoty

$\text{ph}(a) = 1, \text{ph}(b) = 0$ a $\text{ph}(c) = 1$

a pro hodnoty

$\text{ph}(a) = 0, \text{ph}(b) = 1$ a $\text{ph}(c) = 0$.

V ostatních případech je pravdivý.

- (s) $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$
(t) $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$
(u) $((a \vee b) \vee c) \Leftrightarrow (a \vee (b \vee c))$
(v) $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$
(w) $((a \wedge b) \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge (b \wedge c))$

4. Zjednodušte následující výroky (tj. vyjádřete je pomocí menšího počtu symbolů, než je uvedeno – snažte se o minimální možný počet symbolů).

(a) $((a \wedge (b \vee \neg c)) \vee (b \wedge \neg a)) \vee (\neg a \wedge \neg c)$

Řešení:

$$\begin{aligned}
& ((a \wedge (b \vee \neg c)) \vee (b \wedge \neg a)) \vee (\neg a \wedge \neg c) \equiv \\
& \equiv (((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg c)) \vee (b \wedge \neg a)) \vee (\neg a \wedge \neg c) \equiv && \text{Distribuce} \\
& \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg a) \vee (\neg a \wedge \neg c) \equiv && \text{Sloučení} \\
& \equiv ((a \wedge b) \vee (b \wedge \neg a)) \vee ((a \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg c)) \equiv && \text{Seřazení} \\
& \equiv b \vee \neg c && \text{Zjednodušení}
\end{aligned}$$

(b) $((a \wedge b) \Rightarrow (b \vee a)) \vee \neg a$

(c) $((a \vee b) \wedge (a \wedge b)) \vee ((\neg a \wedge \neg b) \wedge (a \Rightarrow \neg b))$

5. Vyjádřete dané výroky jen za použití výrokových spojek \neg a \vee .

(a) $a \wedge b$

Řešení: $a \wedge b \equiv \neg(\neg a \vee \neg b)$

(b) $a \Rightarrow b$

(c) $a \Leftrightarrow b$

(d) $(a \wedge \neg b) \Rightarrow (b \vee \neg a)$

6. Vyjádřete dané výroky jen za použití výrokových spojek \neg a \wedge .

(a) $a \vee b$

(b) $a \Rightarrow b$

Řešení: $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b \equiv \neg(\neg(\neg a \vee b)) \equiv \neg(a \wedge \neg b)$

(c) $a \Leftrightarrow b$

(d) $(a \wedge \neg b) \Rightarrow (b \vee \neg a)$

7. Vyjádřete dané výroky jen za použití Shefferova operátoru \uparrow .

(a) $\neg a$

Řešení: $\neg a \equiv \neg(a \wedge a) \equiv a \uparrow a$

(b) $a \wedge b$

(c) $a \vee b$

(d) $a \Rightarrow b$

(e) $a \Leftrightarrow b$

8. Vyjádřete dané výroky jen za použití Piercova operátoru \downarrow .

(a) $\neg a$

(b) $a \wedge b$

Řešení:

$$a \wedge b \equiv \neg(\neg(a \wedge b))$$

$$\equiv \neg(\neg a \vee \neg b)$$

$$\equiv \neg a \downarrow \neg b$$

$$\equiv (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)$$

De Morganova pravidla

Definice Piercova operátoru

Použití $\neg a \equiv a \downarrow a$

(c) $a \vee b$

(d) $a \Rightarrow b$

(e) $a \Leftrightarrow b$

9. Za předpokladu, že je to možné, uveďte příklad výroku, který není možné vyjádřit jen pomocí spojek \neg a \Rightarrow .

10. K následujícím výroky sestrojte syntaktický strom.

(a) $(a \wedge (b \vee c)) \Rightarrow ((\neg a \vee b) \Rightarrow (c \Rightarrow \neg b))$

(b) $((\neg(a \wedge b) \Rightarrow c) \wedge (d \Rightarrow a)) \Rightarrow (c \Rightarrow \neg b)$

(c) $((a \vee \neg b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (\neg a \vee (c \Rightarrow b))$

(d) $((a \vee b) \Rightarrow (c \wedge d)) \Rightarrow (\neg c \vee b \Rightarrow (a \wedge \neg d))$

(e) $((a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d)) \vee (e \Rightarrow f) \Rightarrow ((a \wedge c) \Rightarrow (b \vee d))$