UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Základy matematiky KMA/ZAM
Teoretické základy informatiky I KI/TZI1

Přednáška 01
Výrokový počet

jiri.cihlar@ujep.cz

O čem budeme hovořit:

- Výroky
- Logická struktura výroků, formule
- Pravdivostní ohodnocení formulí
- Některé důležité tautologie
- Logicky ekvivalentní formule
- Logické vyplývání, úsudky

Výroky a jejich logická struktura
Formule výrokového počtu

Výroky

Každé sdělení, o kterém lze rozhodnout, zda je pravdivé anebo nepravdivé, se nazývá výrok.

Příklady výroků:

- Číslo 2 je nejmenší prvočíslo.
- Není pravda, že číslo 13 je sudé.
- Jestliže je číslo dělitelné třemi, pak je dělitelné i šesti.
- Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník má dva úhly o velikosti 45^0.

Jaká sdělení nejsou výroky?

U těchto sdělení nelze rozhodnout, zda jsou pravdivá anebo nepravdivá.

Příklady sdělení, která nejsou výroky:

- Druhá odmocnina ze středu kružnice, která je kolmá na číslo 3, je rostoucí sjednocení.
- Číslo x je prvočíslo.
- Existuje kladné číslo menší než číslo y.
- Trojúhelník má shodné úhly.

Spojování výroků

Základní logické spojky jsou v následující tabulce:

Název	Symbolický zápis	Slovní vyjádření
Negace	$\neg A$	Není pravda, že A.
Konjunkce	$A \wedge B$	A a (současně) B.
Disjunkce	$A \vee B$	A nebo B.
Implikace	$A \rightarrow B$	Jestliže A, pak B.
Ekvivalence	$A \leftrightarrow B$	A právě tehdy, když B.

Formule výrokového počtu

Nejjednoduššími formulemi jsou tzv. prvoformule, či též výrokové proměnné. Budeme je značit A, B, C, …

Prvoformule představují výroky, jejichž vnitřní strukturu dále nezkoumáme, zajímá nás pouze jejich pravdivost či nepravdivost a logické vztahy mezi nimi. Ty zachycujeme logickými spojkami a závorkami.

Negace libovolné formule je také formulí.

Konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence libovolných dvou formulí je také formulí.

Nic jiného není formulí výrokového počtu.

Příklady

Následující sledy znaků jsou formulemi výrokového počtu:

$$A \vee (\neg A)$$

$$(\neg (A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$$

$$\neg ((\neg A) \rightarrow (B \wedge C))$$

Následující sledy znaků nejsou formulemi výrokového počtu:

$$A \vee (\neg)$$

$$\neg (A \wedge)) \leftrightarrow (\neg A)(\neg B)$$

$$\neg ((\neg A) \rightarrow (B\ C))$$

Pravdivostní ohodnocení formulí
Tautologie

Pravdivostní hodnoty logických spojení

Základní pravidla jsou
v následujících tabulkách:

A	¬ A
0	1
1	0

A	B	A ∧ B	A ∨ B	A → B	A ↔ B
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Příklad pravdivostního ohodnocení formulí bez kvantifikátorů

A	B	C	$\neg($	$\neg A$	$\rightarrow$	$B \wedge C$	$)$
0	0	0	**1**	1	0	0	
0	0	1	**1**	1	0	0	
0	1	0	**1**	1	0	0	
0	1	1	**0**	1	1	1	
1	0	0	**0**	0	1	0	
1	0	1	**0**	0	1	0	
1	1	0	**0**	0	1	0	
1	1	1	**0**	0	1	1	

Kolik řádků bude mít tabulka pro formuli, která má právě ***n*** různých výrokových proměnných?

Logické věty (tautologie)

Tautologie jsou formule, které jsou vždy pravdivé.

A	B	$(A \rightarrow B)$	$\leftrightarrow$	$(\neg A$	$\vee B)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

Tautologie jsou základem logického myšlení.

Důležité tautologie

Důležité tautologie o negaci

Negace negace:

$$\neg(\neg A) \leftrightarrow A$$

De Morganovy zákony:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Negace implikace a ekvivalence:

$$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge (\neg B)$$
$$\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$$

Důležité tautologie o implikaci a ekvivalenci

Jiné vyjádření implikace a ekvivalence

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A)$$

Obměna věty ve tvaru implikace

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Věta pro přímé důkazy

$$(A \rightarrow B \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

Věta pro důkazy sporem

$$(\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)) \rightarrow A$$

Logická ekvivalence
Logické vyplývání

Logicky ekvivalentní formule
Logické vyplývání

Je-li formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ tautologie, říkáme, že formule φ a ψ jsou (logicky) ekvivalentní, a píšeme $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

Je-li formule $\varphi \rightarrow \psi$ tautologie, říkáme, že z formule φ (logicky) vyplývá formule ψ, a píšeme $\varphi \Rightarrow \psi$.

Příklad logicky ekvivalentních formulací

V trojúhelníku se stranami a, b, c, kde c je nejdelší, platí:

trojúhelník je pravoúhlý právě tehdy, když $a^2 + b^2 = c^2$

jestliže je trojúhelník pravoúhlý , pak $a^2 + b^2 = c^2$
a současně
jestliže $a^2 + b^2 = c^2$, pak je trojúhelník pravoúhlý

jestliže $a^2 + b^2 = c^2$, pak je trojúhelník pravoúhlý
a současně
jestliže $a^2 + b^2 \neq c^2$, pak trojúhelník není pravoúhlý

Co je třeba znát a umět?

- Odlišovat výroky od „nevýroků“,
- chápat logickou strukturu výroků,
- znát pravdivostní ohodnocení logických spojení,
- umět určit pravdivostní ohodnocení formule,
- aktivně znát důležité tautologie,
- chápat logickou ekvivalenci formulí a logické vyplývání,
- umět vytvářet logicky ekvivalentní formulace,
- umět poznat logicky správné úsudky.

Děkuji za pozornost