Úlohy 4

Na případné chyby mě prosím upozorněte. Děkuji.

Dokažte:

1. $$(\forall a,b,c \in \mathbb{R})\ a > 0 \wedge b > 0 \wedge c > 0 \wedge \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a+c}{b+c} > 1$$

   Řešení: Využijeme přímý důkaz, pro $a, b, c > 0$ platí:

   $$\frac{a}{b} > 1 \quad \Rightarrow a > b \quad \Rightarrow a + c > b + c \quad \Rightarrow \frac{a+c}{b+c} > 1$$

2. $$(\forall a,b,c \in \mathbb{R})\ a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

3. $$(\forall a,b \in \mathbb{R})\ a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

4. $$(\forall n \in \mathbb{N})\ 6|(n^3 - n)$$

   Zkuste dvěma různými způsoby.

5. $$(\forall n \in \mathbb{N})\ 3|n^2 \Rightarrow 3|n$$

   Řešení: Rozdělíme číslo n na zbytkové třídy po dělení třemi, tj. máme tři možné případy pro n:

   $n = 3k$ nebo $n = 3k + 1$ nebo $n = 3k + 2$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

   Přitom každé přirozené číslo n můžeme zapsat jedním z těchto způsobů. Nyní prozkoumáme každý případ:

   (a) Případ $n = 3k$

   V tomto případě máme:

   $$n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2),$$

   což znamená, že n^2 je dělitelné třemi, a navíc $n = 3k$, což znamená, že n je také dělitelné třemi. Tento případ je tedy v souladu s tvrzením.

   (b) Případ $n = 3k + 1$

   V tomto případě máme:

   $$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1,$$

   což znamená, že n^2 má zbytek 1 po dělení třemi. Tedy n^2 není dělitelné třemi. Tento případ tedy není v souladu s předpokladem $3 \mid n^2$, což znamená, že tento případ nenastává, a je tedy v souladu s tvrzením.

(c) Případ $n = 3k + 2$

V tomto případě máme:

$$n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1,$$

což znamená, že n^2 má opět zbytek 1 po dělení třemi. Tedy n^2 není dělitelné třemi. Tento případ tedy také není v souladu s předpokladem $3 \mid n^2$, což znamená, že ani tento případ nenastává, a je tedy v souladu s tvrzením.

Tedy jediný případ, kdy je n^2 dělitelné třemi, je ten, kdy n je dělitelné třemi, tj. $n = 3k$. Tím je tvrzení dokázáno.

6.

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 3 \not| (n^4 + 2) \Rightarrow 3|n$$

Doporučuji zkusit důkaz sporem. Připomínám, že relace v předpokladu implikace je „nedělí“.

7.

$$\sqrt{3} \text{ je iracionální číslo}$$

Doporučuji zkusit důkaz sporem.

Řešení:

Předpokládejme pro spor, že $\sqrt{3}$ je racionální číslo. To znamená, že můžeme napsat:

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

kde p a q jsou nesoudělná celá čísla a $q \neq 0$.

Upravíme rovnici do tvaru:

$$\sqrt{3} \cdot q = p$$

Po umocnění rovnice na druhou získáme:

$$3q^2 = p^2$$

To znamená, že p^2 je dělitelné třemi. Proto také p musí být dělitelné třemi (viz úloha 5). Můžeme tedy uvažovat $p = 3k$ pro nějaké celé číslo k a dosadíme do předchozí rovnice.

$$3q^2 = (3k)^2$$

$$q^2 = 3k^2$$

Z této rovnice plyne, že q^2 je také dělitelné třemi, a proto musí být i q dělitelné třemi. Tedy jak p, tak q jsou dělitelné třemi, a to je spor s předpokladem. Došli jsme ke sporu, tedy platí původní tvrzení, že $\sqrt{3}$ je iracionální číslo.

8.

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Doporučuji zkusit důkaz matematickou indukcí.

Řešení:

- 1. Krok (základní krok):
  Pro $n = 1$ má levá strana následující podobu:
  $$1 = 1^2$$
  Tvrzení platí pro $n = 1$.
- 2. Krok (indukční krok):
  Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n = k$, tj. předpokládáme, že platí indukční předpoklad:
  $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$
  Nyní chceme dokázat, že tvrzení platí i pro $n = k + 1$, tj. že platí:
  $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$
  Využijeme indukční předpoklad a nahradíme výraz $1+3+5+\cdots+(2k-1)$ výrazem k^2:
  $$k^2 + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$
  Po úpravě:
  $$k^2 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1$$
  Tím jsme dokázali, že pokud tvrzení platí pro $n = k$, pak platí i pro $n = k + 1$.

Na základě důkazu matematickou indukcí jsme dokázali, že tvrzení platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

9.
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
Doporučuji zkusit důkaz matematickou indukcí.

10.
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$
Doporučuji zkusit důkaz matematickou indukcí.

11.
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
Doporučuji zkusit důkaz matematickou indukcí.

12.
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$
Doporučuji zkusit důkaz matematickou indukcí.

13.
$$2 \mid (n^2 + n)$$
Doporučuji zkusit důkaz matematickou indukcí.

14.
$$6 \mid (10^n - 4)$$

Doporučuji zkusit důkaz matematickou indukcí.

15. Určete, pro která přirozená čísla n platí následující nerovnosti. Dokažte matematickou indukcí.

    (a) $2^n > n^2$

    (b) $n! > 2^n$

16. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $m \in \mathbb{N}$ je liché. Dokažte, že pak m^n je liché číslo. Doporučuji zkusit důkaz matematickou indukcí.

17. Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Dokažte, že platí $2n^2 \geq (n+1)^2$.

    Doporučuji zkusit důkaz matematickou indukcí.

18. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje právě jedna dvojice $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2^{k-1}(2l-1)$.

    Řešení: Pokud dokazujeme, že něco existuje právě jednou, musíme dokázat dvě věci, jednak existenci a jednak jednoznačnost. Pomocí úplné matematické indukce nejprve dokážeme existenci příslušných $k, l \in \mathbb{N}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak ukážeme jednoznačnost k, l.

    Existence: Pro $n = 1$ položíme $k = 1$ a $l = 1$, máme tedy:

    $$n = 1 = 2^{1-1} \cdot (2 \cdot 1 - 1).$$

    Předpokládejme, že každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, lze vyjádřit ve tvaru $2^{k-1} \cdot (2 - 1)$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{N}$. Chceme ukázat, že i pro číslo $n+1$ lze rovněž nalézt příslušná $k, l \in \mathbb{N}$.

    Pokud je $n+1$ liché číslo, pak podle definice existuje $l \in \mathbb{N}$ takové, že:

    $$n + 1 = 2l - 1.$$

    Položíme $k = 1$ a tvrzení je dokázáno.

    Pokud je číslo $n+1$ sudé, pak podle definice existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že:

    $$n + 1 = 2m.$$

    Poněvadž $m \leq n$, existují podle indukčního předpokladu čísla $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ taková, že:

    $$m = 2^{k_0 - 1} \cdot (2l_0 - 1).$$

    Potom stačí položit $k = k_0 + 1$ a $l = l_0$.

    Jednoznačnost: Předpokládejme, že:

    $$n = 2^{k-1} \cdot (2l - 1) = 2^{k_0 - 1} \cdot (2l_0 - 1)$$

    pro $k, l, k_0, l_0 \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $k_0 > k$, pak platí:

    $$2l - 1 = 2^{k_0 - k} \cdot (2l_0 - 1).$$

Číslo na levé straně rovnosti je liché, zatímco číslo na pravé straně je sudé, což je spor. Podobně vede ke sporu předpoklad $k < k_0$. Musí tedy platit $k = k_0$. Potom dostáváme:

$$2l - 1 = 2l_0 - 1.$$

Odtud již snadno plyne $l = l_0$. Tím je důkaz jednoznačnosti proveden.

19. Dokažte s použitím předchozích důkazů, že existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je číslo racionální.

Řešení: Konstruktivní důkaz:

Položme $a = \sqrt{2}$ a $b = \log_2 9$. Potom platí

$$a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2}\log_2 3^2} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální (dokázali bychom stejným způsobem jako důkaz iracionality $\sqrt{3}$. Stačí tedy odvodit, že číslo $\log_2 9$ je iracionální. Použijeme metodu důkazu sporem. Předpokládejme, že $\log_2 9 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Poněvadž je číslo $\log_2 9$ kladné, musí být p přirozené. Potom

$$9 = 2^{\log_2 9} = 2^{\frac{p}{q}},$$

a tedy $9^q = 2^p$. Číslo 2^p je sudé a podle úlohy **??** je číslo 9^q liché, což je spor.

Nekonstruktivní důkaz:

Využijeme opět iracionalitu čísla $\sqrt{2}$. Pokud by číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ bylo racionální, pak bychom byli s důkazem hotovi. Pokud by tomu tak nebylo, pak by čísla $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $\sqrt{2}$ byla iracionální, přitom ale číslo $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ je racionální. Tím je tvrzení dokázáno, neboť alespoň jedna dvojice čísel $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ nebo $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ splňuje požadované tvrzení.