Zkušební okruhy ke státní závěrečné zkoušce KMA/SZZ1 Matematika s aplikacemi

Obecné informace

- Student za účasti alespoň dvou členů zkušební komise realizuje náhodný výběr tří okruhů z níže uvedeného souboru 20 zkušebních okruhů. Z těchto náhodně vybraných tří okruhů si následně dle vlastního uvážení vybere právě jeden zkušební okruh, ze kterého bude zkoušen.
- Student má nárok na maximálně 5minutovou diskusi o vybraném zkušebním okruhu se zadávajícím členem zkušební komise.
- Student má nárok na 30 minut na přípravu.
- Doba zkoušení je maximálně 30 minut.

Znění zkušebních okruhů

1 Vztah relací a relačních databází

- Definujte pojmy: kartézský součin dvou množin, binární relace.
- Popište konstrukci relační databáze na základě množiny atributů (sloupce) a množiny entit (řádky) a demonstrujte to na jednoduchém příkladu. Co přesně je záznam?
- Jakým způsobem je realizována relace v relační databázi?
- Popište rozdíl mezi základními relacemi (base relations) a odvozenými relacemi (view) v relačních databázích.
- Definujte pojmy: první obor relace a druhý obor relace. Jaká je jejich interpretace v relačních databázích?
- Definujte pojmy: sjednocení dvou množin, průnik dvou množin, doplněk do množiny, množinový rozdíl. Popište, jak jsou tyto operace realizovány v relačních databázích. Demonstrujte na příkladu.
- Definujte pojmy: výběr (selection, SELECT), projekce (projection), join (JOIN), dělení (division). Uveďte příklady použití jednotlivých relačních operátorů. Které z těchto operátorů jsou realizovatelné na množinách a jak?

2 Tvorba dotazů a výroková logika

- Definujte pojmy: výrok, atomární výrok, výroková formule.
- Definujte základní výrokotvorné funktory: konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence.
- Které z výše uvedených funktorů se používají v rámci výběru (selection)? Demonstrujte jejich použití na konkrétním příkladu.

- Jak jsou v rámci výběru (selection) realizovány malý kvantifikátor a velký kvantifikátor? Demonstrujte jejich použití na konkrétním příkladu.

3 Matematická indukce a Euklidův algoritmus

- Princip dobrého uspořádání, princip indukce a jejich vzájemný vztah
- Důkaz jednoduchého tvrzení indukcí *(k dispozici bude několik úloh na podobné bázi, jako je tato)*:

  Pro každé přirozené číslo n platí $0^3 + 1^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

- Euklidův algoritmus a rozšířený Euklidův algoritmus – formulace a důkaz správnosti
- Aplikace rozšířeného Euklidova algoritmu na konkrétní vstup (*student pro malá celá čísla a, b určí* $\mathrm{GCD}(a, b)$ *a celá čísla s, t taková, že* $\mathrm{GCD}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$)
- Využití Euklidova algoritmu při návrhu kryptosystému RSA

4 Kongruence

- Kongruence a jejich vlastnosti
- Čínská věta o zbytcích – formulace věty, bez důkazu
- Vyřešení zadané úlohy *(k dispozici bude několik úloh na podobné bázi, jako je tato)*:

  Mějme určitý neznámý počet věcí. Když je uspořádáme po třech, zbydou dvě. Když je uspořádáme po pěti, zbydou tři. Když je uspořádáme po sedmi, zbydou dvě. Kolik je věcí?

- Eulerova φ funkce – definice a základní vlastnosti, specielně výpočet funkčních hodnot
- Eulerova věta a Malá Fermatova věta – formulace vět, bez důkazu
- Využití Eulerovy věty v kryptosystému RSA

5 Kryptosystém RSA

- Kryptosystém RSA (veřejný klíč, soukromý klíč, zašifrování, dešifrování)
- Pro malá konkrétní prvočísla p a q sestavit veřejný klíč a soukromý klíč
- Zdůvodnění správnosti dešifrování
- Vysvětlit bezpečnost kryptosystému RSA

6 Grafy

- Definice grafu a základní pojmy (stupeň vrcholu, cesty, cykly, souvislost, isomorfismus)
- Vzdálenost v grafu a metrika grafu
- Matice sousednosti grafu, vztah mezi maticí sousednosti a metrikou grafu
- Eulerovské grafy – definice a charakterizace (včetně zdůvodnění)
- Hamiltonovský cyklus – definice
- Problém obchodního cestujícího (nalezení minimálního hamiltonovského cyklu), algoritmus TSA (Tree Shortcut Algorithm) – popis a ukázka postupu na konkrétním ohodnoceném grafu

7 Toky v síti

- Vymezení pojmu síť (v teorii grafů)
- Tok v síti, přípustný tok a velikost toku – vysvětlení pojmů
- Řez, kapacita řezu, vztah mezi velikostí toku a kapacitou řezu
- Fordův–Fulkersonův algoritmus pro maximální tok – princip algoritmu, předvedení postupu na konkrétní síti
- Věta o maximálním toku a minimálním řezu – formulace věty, bez důkazu
- Ukázka aplikace toků v sítích (např. propustnost silniční sítě, nalezení největšího párování v bipartitním grafu): *student předvede na jím zvoleném příkladu aplikaci toků v síti*

8 Stromy

- Stromy – definice a základní vlastnosti
- Prüferův kód a Cayleyho formule, ukázka Prüferova kódování na konkrétním stromu a též ukázka opačného postupu (tj. sestrojení stromu s daným Prüferovým kódem)
- Kostra grafu, určení počtu koster grafu
- Problém minimální kostry – vymezení problému
- Prezentace nějakého algoritmu pro řešení problému minimální kostry (bez důkazu správnosti algoritmu) a ukázka výpočtu na konkrétním grafu

9 Kombinatorika

- Rekurentní problémy – idea rekurence, konkrétní příklady
- Permutace a faktoriály – definice, Stirlingova formule
- Binomické koeficienty – definice, kombinatorický význam, binomická věta, Pascalův trojúhelník
- Sumační vzorce pro binomické koeficienty a Vandermondova konvoluce, ukázka jejich aplikace (například součet k-tých mocnin prvních n přirozených čísel)

10 Vektorové prostory

- Definice vektorového prostoru, příklady vektorových prostorů
- Lineární kombinace vektorů (vysvětlit pojmy lineární obal množiny, lineární podprostory, lineární závislost a nezávislost, hodnost matice)
- Báze a dimenze, souřadnice vektoru při dané bázi
- Vektorové prostory v aplikacích – *student bude mluvit o jednom z následujících témat, přičemž některá z témat budou obsahovat jednu úlohu, kterou student bude muset vyřešit (ručně, případně s pomocí matematického softwaru)*

  1. Lineární zobrazení
     - Vysvětlení pojmu lineární zobrazení, homomorfismus, izomorfismus
     - Maticové vyjádření lineárního zobrazení, příklady pro konkrétní zobrazení v $\mathbb{R}^2$ (např. středová souměrnost podle počátku soustavy souřadnic)
     - Vyřešení zadané úlohy *(k dispozici bude více úloh tohoto typu)*:

       Najděte matici popisující následující zobrazení: osová souměrnost podle přímky $y = x$ a následně rotace o úhel $90°$. Jak se změní obraz v případě, že zaměníme pořadí zadaných zobrazení?
  2. Lagrangeův interpolační polynom
     - Postup konstrukce Lagrangeova interpolačního polynomu (na příkladu polynomu druhého stupně, zadány tři konkrétní body) – *student vysvětlí postup konstrukce interpolačního polynomu s akcentem na použití pojmů z teorie vektorových prostorů (dílčí polynomy jsou lineárně nezávislé, tvoří bázi určitého vektorového prostoru, získaný interpolační polynom je jejich lineární kombinací), postup ilustruje např. v programu GeoGebra*

11 Matice a determinanty

- Pojem matice, operace s maticemi
- Definice a základní vlastnosti determinantu, výpočet determinantu (Sarrusovo pravidlo, Gaussova eliminace – úprava na schodovitý tvar, Laplaceův rozvoj).
- Souvislost hodnoty determinantu matice s hodností této matice a existencí inverzní matice k této matici

- Využití matic a determinantů v různých oblastech – *student bude mluvit o jednom z následujících témat, přičemž některá z témat budou obsahovat jednu úlohu, kterou student bude muset vyřešit (ručně, případně s pomocí matematického softwaru)*

  1. Řešení soustav lineárních rovnic
     - Maticový zápis soustavy rovnic
     - Metody řešení soustav rovnic: Gaussova-Jordanova eliminační metoda, řešení pomocí inverzní matice, Cramerovy formule – porovnání jednotlivých metod
     - Student vyřeší zadanou soustavu rovnic, metodu volí v závislosti na zadání (zdůvodní svou volbu)
  2. Využití matic v teorii grafů
     - Maticová reprezentace grafů – matice sousednosti grafu: její konstrukce, ukázka na příkladě konkrétního grafu
     - Vztah mezi maticí sousednosti a metrikou grafu
     - Určení počtu koster grafu pomocí „Matrix Tree Theorem“ – vysvětlení postupu, vyřešení zadané úlohy
  3. Využití matic v lineárním kódování
     - Vysvětlení pojmu kódování
     - Pojem kontrolní číslice, důvody jejich použití
     - Pojem lineární kód
     - Kontrolní matice lineárního kódu
     - Dekódování pomocí syndromů
  4. Metoda nejmenších čtverců
     - Popis metody a účelu jejího použití
     - Odvození vzorců pro aproximace pomocí lineární, resp. kvadratické funkce – sestavení soustavy rovnic, její maticový zápis a diskuse o počtu jejích řešení (resp. vhodných metodách pro její řešení)
     - Vyřešení zadané úlohy (pro konkrétní body), může být s pomocí matematického softwaru
  5. Využití matic a soustav lineárních rovnic při modelování obnovy
     - Charakterizace matice pravděpodobností přechodu homogenního Markovova řetězce s diskrétním časem a jejích vlastností
     - Vysvětlení pojmů Markovův řetězec s diskrétním časem, matice pravděpodobností přechodu, homogenní v daném kontextu
     - Vysvětlení pojmu stacionární rozdělení
     - Student vyřeší zadanou úlohu *(k dispozici bude několik úloh na podobné bázi, jako je tato)*:

       Předpokládejme, že je v určitém zařízení instalováno 1000 součástek identického typu a s maximální životností 3 týdny, přičemž pravděpodobnost selhání součástky již v prvním týdnu jejího provozu je 4 % a pravděpodobnost selhání součástky v druhém týdnu jejího provozu je 24 %. Na konci týdne se součástky vyřazené z provozu vyměňují.

Určete matici pravděpodobností přechodu a určete stacionární (limitní) počet součástek v jednotlivých týdnech provozu.

12 Derivace a její použití

- Definice derivace a její geometrická interpretace
- Využití derivace v různých oblastech (matematika, ekonomie aj.) – *student bude mluvit o jednom z následujících témat, přičemž některá z témat budou obsahovat jednu úlohu, kterou student bude muset vyřešit (buď ručně, nebo pomocí softwaru)*

  1. Použití derivace pro nalezení extrémů funkce
     - Pojem lokální (globální) minimum/maximum
     - Souvislost monotonie funkce s její první derivací
     - Souvislost existence extrému funkce s druhou derivací této funkce, chování funkce v bodech, ve kterých derivace neexistuje
     - Aplikace metod pro hledání extrémů funkce ve slovních úlohách *(student vyřeší zadanou slovní úlohu zaměřenou na nalezení lokálních/globálních extrémů)*
  2. Taylorův polynom
     - Důvody aproximace funkcí polynomy
     - Konstrukce Taylorova polynomu, vlastnosti Taylorova polynomu
     - Zvyšování přesnosti – porovnání chování Taylorových polynomů např. pro funkce $y = \sin x$ v bodě 0 a $y = \ln(x + 1)$ v bodě 0 *(student ukáže „ruční“ výpočet alespoň jednoho Taylorova polynomu, konstrukci pro vyšší stupně ukazuje v matematickém softwaru)*
  3. Matematické vlastnosti řešení diferenciální rovnice popisující logistický model růstu
     - Diferenciální rovnice popisující logistický růst, stručný nástin řešení diferenciální rovnice
     - Vlastnosti řešení této diferenciální rovnice (monotonie, extrémy, konvexita, inflexní body) a jejich souvislost s parametry modelu růstu, graf řešení
     - Příklady použití logistického modelu růstu

13 Integrál a jeho použití

- Definice Riemannova integrálu a jeho geometrická interpretace
- Využití integrálu v různých oblastech (matematika, ekonomie, aj.) – *student bude mluvit o jednom z následujících témat, přičemž některá z témat budou obsahovat jednu úlohu, kterou student bude muset vyřešit (buď ručně, nebo pomocí softwaru)*

  1. Geometrické aplikace: obsahy, objemy, délky, obsah pláště

- Ukázka myšlenky odvození vzorců pro výpočet objemů/délek/obsahů pro explicitní vyjádření křivky
- Použití parametrických a polárních souřadnic při výpočtech objemů/délek/obsahů, popis jednotlivých typů souřadnic, převod mezi nimi
- Porovnání výpočtů pro danou křivku zadané pomocí explicitní/parametrických/polárních rovnic (např. pro obsah kruhu, objem koule atd.)

2. Lorenzova křivka a Giniho koeficient
   - Popis Lorenzovy křivky a její použití
   - Konstrukce Lorenzovy křivky (ukázka na jednoduchém příkladu)
   - Matematické vlastnosti Lorenzovy křivky (spojitost, monotonie, konvexita)
   - Grafický význam Giniho koeficientu, souvislost s Lorenzovou křivkou
   - Výpočet Giniho koeficientu pomocí integrálu
   - Interpretace Giniho koeficientu, výhody použití
3. Spojité úročení
   - Pojem spojitého úročení, vysvětlení odlišností od jednoduchého a složeného úročení
   - Odvození vzorce pro spojité úročení ze vzorce pro složené úročení (limitní přechod)
   - Použití integrálu v rámci spojitého úročení, ukázka na příkladu, vysvětlení pojmu úroková intenzita

14 Riemannův a Newtonův integrál, numerický výpočet integrálu

- Definice Riemannova integrálu a jeho geometrická interpretace
- Newtonův integrál a jeho souvislost s Riemannovým integrálem, Newton-Leibnizova formule
- Numerické metody výpočtu integrálu
  - Důvody použití těchto metod (s konkrétními příklady integrálů)
  - Metody využívající interpolační funkce: vysvětlení podstaty těchto metod na příkladu obdélníkové/lichoběžníkové/Simpsonovy metody (grafický význam, vzorec pro výpočet, u obdélníkové metody souvislost s Riemannovým integrálem)
  - Chyba, které se při výpočtu dopustíme, její souvislost s počtem intervalů dělení
- Vyřešení zadané úlohy (k dispozici bude několik úloh na podobné bázi, jako je tato):

  Lichoběžníkovou metodou vypočítejte určitý integrál $\int_2^5 \sqrt{7x-3}\,\mathrm{d}x$ s přesností $\epsilon = 9 \cdot 10^{-3}$.

  - *Student odhadne počet intervalů, sestaví vzorec pro výpočet, ručně integrál vypočítá.*
  - *Výpočet student ukáže i pomocí softwaru (napíše vlastní program pro výpočet).*
  - *Provede ruční výpočet „klasickou“ metodou (integrály by měly být koncipovány tak, aby student prokázal, že umí per partes a/nebo substituci – početně by měly být integrály jednoduché).*

15 Použití diferenciálních rovnic – modely růstu

- Pojem diferenciální rovnice (řád rovnice, obyčejná DR)
- Pojem řešení DR, klasifikace řešení z hlediska obecnosti, jednotlivé typy řešení ukázat na příkladě (uvést a vyřešit nějakou jednoduchou DR, nakreslit obrázek)
- Pojem úlohy s počáteční podmínkou
- Charakteristika exponenciálního/omezeného/logistického růstu: popsat jednotlivé typy růstu diferenciální rovnicí, načrtnout přibližný graf řešení těchto rovnic, vysvětlení, v čem se jednotlivé modely liší
- Vyřešení zadané úlohy *(k dispozici bude několik úloh na podobné bázi, jako je tato)*:

  V tabulce vidíte počty nakažených nemocí Covid-19 ve vybraných dnech roku 2020. Proveďte odhad počtu nakažených pro den 2. 11. 2020 tak, že aplikujete modely exponenciálního/omezeného/logistického růstu *(jednoho z uvedených dle zadání)*, kdy jako počáteční hodnotu vezmete tu k 7. 9. 2020 a konečnou hodnotu k 12. 10. 2020.

Datum	Počet nakažených
07. 09. 2020	28 734
14. 09. 2020	37 234
21. 09. 2020	50 780
28. 09. 2020	65 894
05. 10. 2020	85 593
12. 10. 2020	121 447
19. 10. 2020	
26. 10. 2020	
02. 11. 2020	

  - *Student odvodí model pro zadaná data z příslušné DR.*
  - *Očekává se, že student příslušnou DR vyřeší ručně.*
  - *Dále model vizualizuje v matematickém softwaru, provede požadovanou predikci a model interpretuje (posoudí vhodnost modelu vzhledem k zadané situaci).*

16 Celkové, průměrné a mezní veličiny, sklon a elasticita

- Definujte obecně funkci celkovou, průměrnou a mezní.
- Formulujte tvrzení o vztahu mezi veličinami celkovými, průměrnými a mezními. Naznačte odvození tvrzení, že mezní veličina protíná graf průměrné veličiny v jejím lokálním extrému.

- Mějme následující funkce celkových příjmů $TR(Q)$ a celkových nákladů $TC(Q)$:

$$\begin{aligned} TR(Q) &= -2Q^3 + 96Q^2 + 198Q \\ TC(Q) &= Q^3 - 60Q^2 + 1300Q + 4096 \end{aligned}$$

  - Vykreslete do dvou grafů přesně pod sebou s horizontální osou Q se společným rozsahem a měřítkem zadanou funkci TR v horním grafu a z ní určené funkce průměrných příjmů AR a mezních příjmů MR v dolním grafu. Spočítejte a v grafech vyznačte významné body (*pro vykreslení grafů je možné využít matematický software, jako je např. GeoGebra*).
  - Do jednoho grafu vykreslete funkce $AR(Q)$, $MR(Q)$ a funkce průměrných a mezních nákladů, tj. $AC(Q)$ a $MC(Q)$. Určete jak výpočtem, tak graficky
    - technologické optimum,
    - množství Q, které odpovídá maximálnímu zisku, a samotnou příslušnou výši maximálního zisku,
    - bod uzavření firmy.

- Definujte elasticitu funkce v bodě a na intervalu (neboli bodovou a průměrnou). Porovnejte pojmy elasticita a sklon funkce. Vysvětlete a na příkladě ilustrujte, jak se výpočtem a jak graficky určí, zda je funkce v bodě elastická, jednotkově elastická a neelastická.

- Pro statek X mějme Marshallovu poptávku

$$Q_X(P_X, P_Y, I) = 1406 - 120P_X - 3P_Y + 0{,}8I,$$

  kde P_X, resp. P_Y je cena statku X, resp. Y a I je důchod spotřebitele. Určete cenovou, křížovou a důchodovou elasticitu poptávky, jestliže $P_X = 10$, $P_Y = 2$ a $I = 1000$. Rozhodněte, zda jsou statky X a Y substituty, nebo komplementy. Rozhodněte, zda je statek X podřadný, nezbytný, nebo luxusní.

  K dispozici bude několik úloh na podobné bázi, jako jsou předchozí úlohy.

17 Optimum spotřebitele a optimum firmy

- Mějme dva statky X a Y, jejich množství Q, jejich ceny P, funkci užitku $U(Q_X, Q_Y)$ a důchod (rozpočet) spotřebitele I.
  - Zaveďte pojmy indiferenční křivka, linie rozpočtu, mezní míra substituce ve spotřebě a mezní míra substituce ve směně.
  - Charakterizujte optimum spotřebitele (která veličina se v jakém smyslu a za jaké podmínky optimalizuje). Ukažte, že v optimu spotřebitele platí

$$\frac{MU_X(Q_X, Q_Y)}{MU_Y(Q_X, Q_Y)} = \frac{P_X}{P_Y},$$

    kde MU je mezní užitek. Předpokládá se, že použijete metodu Lagrangeových multiplikátorů v rámci určování buď Marshallovy, nebo Hicksovy poptávky.
  - Vysvětlete význam výše uvedeného tvrzení a interpretujte jej geometricky.

  - Uvažujte spotřebitele s $U(Q_X, Q_Y) = Q_Y\sqrt{Q_X}$ a $I = 120$ při $P_X = 5$ a $P_Y = 8$ *(k dispozici bude více úloh tohoto typu).*
    - Určete optimum spotřebitele. Příslušnou indiferenční křivku a linii rozpočtu zobrazte graficky.
    - Pro statek X určete Marshallovu poptávku, Hicksovu poptávku, Engelovu křivku a poptávkovou křivku ($Q_X(P_X)$). Rozhodněte, zda je Marshallova poptávka po statku X homogenní (pokud ano, určete stupeň homogenity).

- V rámci určování nákladového optima firmy shledáváme řadu analogií s určováním optima spotřebitele (namísto statků máme výrobní faktory, namísto indiferenční křivky izokvantu atp.). Představte tyto analogie podrobněji. Dále charakterizujte funkci zisku a naznačte metody řešení úlohy jeho maximalizace.

18 Dynamický pavučinový model

- Co v mikroekonomii modelujeme pavučinovým modelem? Co je výsledkem pavučinového modelu, resp. co jeho pomocí zjistíme?

- Mějme následující dvě zadání se standardním značením *(zadání je ilustrační/typové, skutečné zadání může být pozměněné).*

$$\begin{aligned} D:&\quad Q_{D,t} = 15 - 4P_{t-1} \\ S:&\quad Q_{S,t} = -6 + 3P_t \\ &\quad P_0 = 4 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} D:&\quad Q_D(t) = 12 - P(t) + 3\tfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} \\ S:&\quad Q_S(t) = -6 + 2P(t) \\ &\quad P_0 = 4 \end{aligned} \tag{2}$$

  - Charakterizujte jednotlivé veličiny, resp. proměnné ve výše uvedených zadáních.
  - Který ze zadaných dynamických pavučinových modelů je diskrétní a který spojitý? Vysvětlete, co to znamená, resp. vysvětlete rozdíl.
  - Určete typ zpoždění v jednotlivých zadáních a vysvětlete, jak jste ke svému závěru došli. Poté jednotlivá zadání pozměňte tak, aby vykazovala opačný typ zpoždění.
  - Určete, zda ekonomika v uvedených zadáních konverguje k rovnovážnému bodu, či nikoliv. Jak lze tento problém rozhodnout přímo ze zadání (tj. aniž by se řešil celý příklad)?
  - Na jaký typ úlohy zadání vedou?
  - Nakonec nalezněte řešení a výsledek znázorněte graficky (v obou případech $P(t)$, v diskrétním případě také $Q(P)$).

19 Hra v normálním tvaru

- Čím je určena hra v normálním tvaru?

- Uveďte alespoň tři různé příklady hry v normálním tvaru.

- Vysvětlete pojem Nashova rovnováha.
- Formulace a vysvětlení základní věty maticových her
- Jak můžeme najít Nashovu rovnováhu ve smíšených strategiích obecné hry $m \times n$ s nulovým součtem?
- Demonstrujte předchozí bod na maticové hře $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Vyřešte ručně nebo v libovolném softwaru *(k dispozici bude více úloh tohoto typu)*.

20 Hra ve tvaru charakteristické funkce

- Čím je určena hra ve tvaru charakteristické funkce?
- Jaké znáte koncepty řešení hry ve tvaru charakteristické funkce? Každý stručně popište, následně vyberte jeden, který se týká nikoli pouze prosté hry, a demonstrujte na konkrétním příkladu.
- Student vyřeší zadanou úlohu *(k dispozici bude více úloh tohoto typu)*:

  V komunálních volbách v roce 2022 se v obci Malé Březno dostaly do zastupitelstva následující strany s uvedeným počtem zastupitelů. Vypočtěte Shapley-Shubikovy a Banzhafovy indexy pro jednotlivé strany a interpretujte je.

Politická strana	**Počet zastupitelů**	**Počet hlasů**
Sdružení nezávislých kandidátů Malé Březno a Leština	5	984
Sdružení nezávislých kandidátů „ZMĚNA PRO NAŠE OBCE“	2	573
Sdružení nezávislých kandidátů ZA MALÉ BŘEZNO A LEŠTINU	2	571
Naše Leština	1	391
PRO OBEC	1	352