Extrémy funkcí více proměnných

Extrémy na otevřené množině

1) Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 6$.

2) Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + y)\sqrt{\mathrm{e}^y}$.

3) Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = -\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$.

4) Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

5) Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$.

Výsledky:

1) ostré lokální minimum v bodě $[1, 1]$

2) ostré lokální minimum v bodě $[0, -2]$

3) ostré lokální minimum v bodě $[0, 0]$, ostrá lokální maxima v bodech $[0, 1]$, $[0, -1]$ (v bodech $[1, 0]$, $[-1, 0]$ není extrém)

4) ostrá lokální minima v bodech $[\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; v bodě $[0, 0]$ není extrém (v jeho libovolném jeho okolí lze najít body, v nichž mají funkční hodnoty různá znaménka)

5) ostré lokální minimum v bodě $[0, 0]$ (v tomto bodě neexistuje derivace; funkční hodnoty v libovolném okolí bodu $[0, 0]$ jsou kladné)

Vázané extrémy

1) Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ při vazbě $2x - y + 5 = 0$.

2) Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 y$ při vazbě $\mathrm{e}^x - y = 0$.

3) Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy}$ při vazbě $x + y = 4$.

4) Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x + y$ při vazbě $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$.

Výsledky:

1) vázané lokální minimum v bodě $[-2, 1]$

2) vázané lokální minimum v bodě $[0, 1]$, vázané lokální maximum v bodě $[-2, \mathrm{e}^{-2}]$

3) vázané lokální maximum v bodě $[2, 2]$

4) vázané lokální minimum v bodě $[2, 2]$, vázané lokální maximum v bodě $[-2, -2]$

Globální extrémy

1) Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ v uzavřeném trojúhelníku, který vymezují souřadnicové osy a přímka $x + y + 3 = 0$.

2) Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na čtverci s vrcholy $[0,0]$, $[-1,0]$, $[-1,-1]$, $[0,-1]$.

3) Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + y^2 - 2$ v uzavřené oblasti ohraničené křivkami $y = 4$, $y = x^2$.

Výsledky:

1) globální minimum v bodě $[0,0]$, globální maxima v bodech $[2,0]$, $[0,2]$

2) globální minimum v bodě $[-1,-1]$, globální maximum v bodě $[0,0]$

3) globální minimum v bodě $[0,0]$, globální maximum v bodě $[2,4]$