

Časové řady

Alena Černíková

alena.cernikova@ujep.cz

31. března 2025

Podmínky zápočtu

- **docházka**
- **semestrální práce**
 - zadaná bude cca v půlce semestru
 - bude zahrnovat aplikaci většího množství postupů
 - důraz bude kladen na komentáře a interpretace
 - součástí bude obhajoba minimálně přede mnou a dr. Škvorem

Obsah kurzu

- Úvod
- Dekompozice časových řad – trend
 - klouzavé průměry
 - exponenciální vyrovnávání
- Dekompozice časových řad – sezónnost
- Náhodná složka
- Indexace
- R/S analýza a Hurstův exponent
- Box-Jenkinsova metodologie – ARIMA modely
- Předpovědi
- Regresní závislost v časových řadách

Časová řada

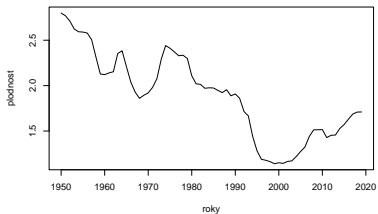
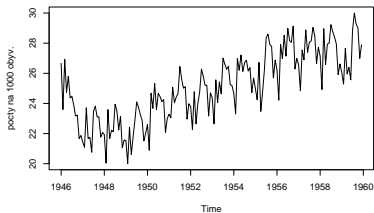
Co je časová řada

- soubor pozorování, realizací jedné náhodné veličiny y_t , kde t je čas
- čas může být diskrétní $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, nebo i spojitý $t \in \langle 0, 1 \rangle$
- důležité je, že pozorování nejsou nezávislá, ale jsou **závislá v čase**
- platí zde jiná pravidla při inferenci

Příklad.

- *Tlak pacienta měřený vždy v 7 hodin ráno.*
- *Měsíční průměrný kurz eura dle ČNB.*
- *Venkovní teplota měřená na stejném místě každou hodinu.*

Grafické zobrazení

Vyvoj plodnosti v CR**Pocty narozených v New Yorku**

Časová řada

Intervaly mezi dvěma sousedními měřeními

- předpokládá se, že jednotlivá pozorování mají mezi sebou stejné časové intervaly
- situace, v nichž se dělají opakovaná měření s různými časovými rozestupy vedou na jiné modely (longitudinal models) a nebudeme se jimi na tomto kurzu zabývat

Cíl analýzy časových řad

- **pochopení** mechanismu, který časovou řadu generuje
 - **dekompozice časové řady** – hledání trendu, sezónnosti, cykličnosti
 - **Box-Jenkinsova metodologie** – hledání časové závislosti mezi pozorováními
- konstrukce předpovědí vycházející jak ze závislosti na minulých hodnotách, tak z trendů
 - bodové a intervalové předpovědi
 - budeme brát pouze kvantitativní předpovědi získané exaktními výpočty (expertní předpovědi necháme expertům)
- zkoumání závislosti mezi časovými řadami

Typy časových řad

Časové řady mohou být **diskrétní** nebo **spojité**

- Příklady **diskrétních** řad
 - **binární proces** – hod mincí: řadu hodnot *panna, orel*
 - **náhodná procházka** – částice vycházející z bodu nula a v každém kroku se s p posune doprava a s q se posune doleva: řada bodů, ve kterých se částice nachází v čase t
 - **Poissonův proces** – př. počet hovorů na telefonní ústředně v čase t
 - počet hovorů za jednu časovou jednotku má Poissonovo rozdělení s intenzitou λ , počty za jednotlivé jednotky jsou vzájemně nezávislé
 - délka doby mezi dvěma hovory má exponenciální rozdělení s parametrem λ a jednotlivé doby mezi hovory jsou vzájemně nezávislé
 - získáváme rostoucí posloupnost počtu hovorů až do času t
- Kurz se bude věnovat převážně **spojitým** časovým řadám

Na co si dát pozor

Při sběru dat je potřeba ohlídat možné **problémy**

- Jaké zvolit body/okamžiky, kdy se bude časová řada měřit
- **Problém s kalendářem** – vzniká především u měsíčních ekonomických časových řad
 - různé měsíce mají různé počty dní
 - různé měsíce mají různé počty pracovních dní a víkendů
 - speciální pozornost je třeba věnovat pohyblivým svátkům
 - je potřeba volit vhodnou standardizaci, aby byly hodnoty srovnatelné
- **Délka časové řady** – je třeba zvolit dostatečně dlouhou řadu, aby v ní byl vidět aktuální trend, ale zase ne moc dlouhou, aby v ní byly prehistorická data, která mi aktuální trend zakryjí

Metody analýzy časových řad

- **Indexace** – doc. Sixta
 - výpočet speciálních indexů popisujících časovou řadu
- **Dekompozice** – já + doc. Vozár
 - analýza systematických složek řady
 - hledání trendu, sezónnosti, cykličnosti
- **Box-Jenkinsova metodologie**
 - analýza náhodné složky
 - hledání korelační struktury řady
- **Spektrální analýza**
 - myšlenka je, že časová řada je směs složek/sinusoid s různými frekvencemi
 - převádí se z časové složky na frekvenční složku
 - speciální nástroje: periodogram, spektrální hustota
- **R/S analýza a Hurstův exponent** – dr. Škvor

Dekompozice časových řad

Předpokládáme, že řada se řídí jedním z následujících dvou modelů

- **Aditivní model**

$$Y_t = Tr_t + C_t + S_t + \varepsilon_t$$

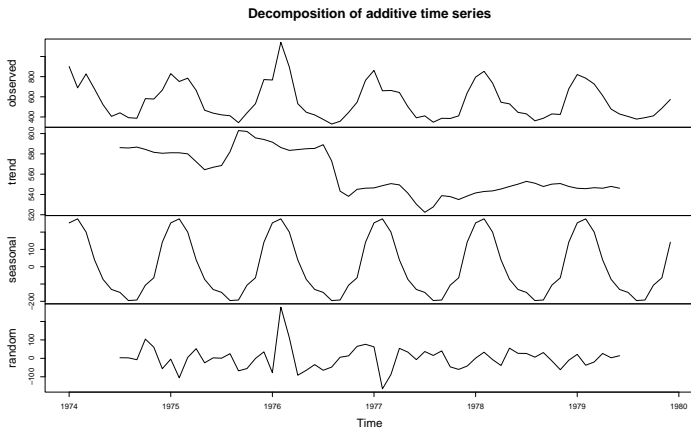
- **Multiplikativní model**

$$Y_t = Tr_t \times C_t \times S_t \times \varepsilon_t$$

kde

- Y_t – časová řada
- Tr_t – dlouhodobý/časový trend
- C_t – cyklická složka – dlouhodobé cykly, které většinou neumíme odhadnout, proto se tato složka odhaduje společně s trendem
- S_t – sezónní složka
- ε_t – náhodná složka

Dekompozice časových řad



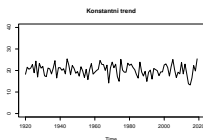
Časový trend

Ukázka základních časových trendů



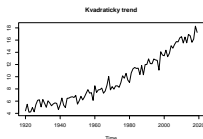
Konstantní trend

$$Tr_t = \beta_0$$



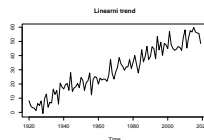
Kvadratický trend

$$Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$$



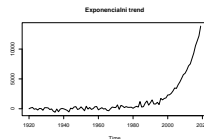
Lineární trend

$$Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t$$



Exponenciální trend

$$Tr_t = \alpha \beta^t$$

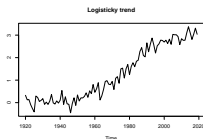


Základní časové trendy

- Logistický trend

$$Tr_t = \frac{\gamma}{1 + \alpha\beta^t}$$

$$\alpha > 0, 0 < \beta < 1, \gamma > 0$$



- Gompertzova křivka

$$Tr_t = \exp(\gamma + \alpha\beta^t)$$

$$\alpha < -1, 0 < \beta < 1$$



- Logistický trend je symetrický kolem inflexního bodu $-\log \alpha / \log \beta$
- Gompertzova křivka není symetrická kolem inflexního bodu $-\log(-\alpha) / \log \beta$

Informativní testy na typ trendu

Trend	test
Lineární	první difference $\delta y_t = y_{t+1} - y_t$ je konstantní
Kvadratický	druhá difference $\delta^2 y_t = \delta y_{t+1} - \delta y_t$ je konstantní
Exponenciální	podíl y_{t+1}/y_t je konstantní
Logistický	podíl $(1/y_{t+2} - 1/y_{t+1})/(1/y_{t+1} - 1/y_t)$ je konstantní
Gompertz	podíl $(\log(y_{t+2}) - \log(y_{t+1})) / (\log(y_{t+1}) - \log(y_t))$ je konstantní

Informační kritéria

Hodnocení kvality modelu Informační kritéria jsou založena na

- věrohodnosti modelu (L - *likelihood*)
ukazatel, jak dobře model kopíruje data
- počtu parametrů použitých v modelu (k)

Věrohodnost se penalizuje složitostí modelu.

- Chceme model, který dobře kopíruje data a je co možná nejjednodušší
- Čím menší hodnota kritéria, tím lepší je model

Informační kritéria

Hodnocení kvality modelu

- **Akaikeho informační kritérium (AIC):**

$$AIC = 2k - 2 \ln(L)$$

- **Upravené Akaikeho informační kritérium (AICc)** pro malé vzorky:

$$AICc = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

- **Bayesovské informační kritérium (BIC):**

$$BIC = \ln(n)k - 2 \ln(L)$$

Metoda klouzavých průměrů

Předpokládejme řadu, která je tvořena pouze trendovou a náhodnou složkou

$$Y_t = Tr_t + \varepsilon_t$$

- trend mění v čase svůj charakter
- nelze v celé délce popsat jedním funkčním předpisem
- funkční předpis lze aplikovat pouze lokálně, v okolí nějakého bodu
- př. celá řada se neřídí lineárním trendem, ale její trend je lineární v určitých časových intervalech

V takové případě se využívá tzv. **adaptivní přístup** ke trendové složce, kdy se parametry prokládaného modelu mění v čase.

Metoda klouzavých průměrů

Nejjednodušší způsob, jak najít takový trend, tedy vyhladit časovou řadu, je použít klouzavé průměry. Vyhlazená hodnota v čase t se pak vypočte jako

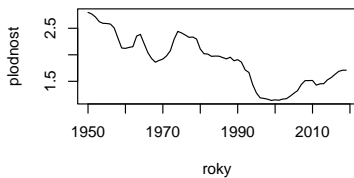
$$\hat{Y}_t = \frac{\sum_{\tau=-m}^m Y_{t+\tau}}{2m+1}$$

- vyhlazují pomocí hodnot na obě strany od času t
- klouzavé průměry délky $2m + 1$ – liché číslo
- délka klouzavých průměrů závisí na požadované míře vyhlazení
- větší délka dá hladší křivku
- jednoduché klouzavé průměry odhadují **lokálně lineární trend**

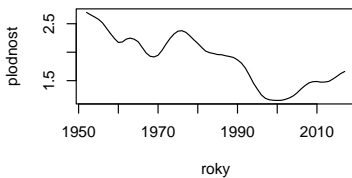
Metoda klouzavých průměrů

Různé délky klouzavých průměrů

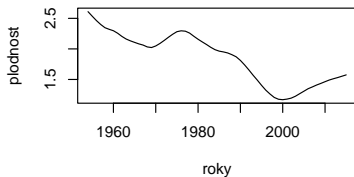
Vyvoj plodnosti v ČR



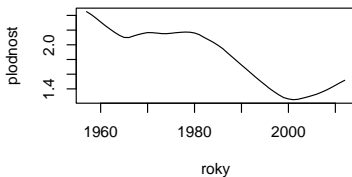
Klouzave průmery delky 5



Klouzave průmery delky 9



Klouzave průmery delky 15



Metoda klouzavých vážených průměrů

Někdy nemusí vyhlazení lokálně lineárním trendem dostačovat a je třeba volit lokálně polynomiální trend vyššího řádu.

Výsledkem jsou pak klouzavé vážené průměry.

Jako příklad uvažujme vyhlazení lokálně kubickým trendem

$$Tr(t)_\tau = \beta_0(t) + \beta_1(t)\tau + \beta_2(t)\tau^2 + \beta_3(t)\tau^3$$

kde $\tau = -m, \dots, 0, \dots, m$ podle uvažované délky klouzavých průměrů.

Metoda klouzavých vážených průměrů

Koeficienty $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ se hledají obdobně jako u lineárního trendu, tedy pomocí metody nejmenších čtverců.

Minimalizujeme

$$\sum_{\tau=-m}^m (Y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1\tau - \beta_2\tau^2 - \beta_3\tau^3)^2$$

Parciálními derivacemi podle jednotlivých koeficientů získáme soustavu čtyř rovnic

$$\sum_{\tau=-m}^m Y_{t+\tau}\tau^j - b_0 \sum_{\tau=-m}^m \tau^j - b_1 \sum_{\tau=-m}^m \tau^{j+1} - b_2 \sum_{\tau=-m}^m \tau^{j+2} - b_3 \sum_{\tau=-m}^m \tau^{j+3} = 0$$

pro $j = 0, 1, 2, 3$. Hodnotu pro vyhlazení řady v čase t , tedy \hat{Y}_t , získáme jako odhad koeficientu b_0 .

Vlastnosti odhadu \hat{Y}_t

- vážený klouzavý průměr hodnot $Y_{t+\tau}$, kde $\tau = -m, \dots, 0, \dots, m$
- součet vah klouzavého průměru je roven jedné
- váhy jsou symetrické kolem prostřední hodnoty
- při vyhlazování polynomiálním trendem řádu r , kde r je sudé číslo, je odhad klouzavými průměry délky m stejný, jako při vyhlazování polynomiálním trendem řádu $r + 1$
- takto vyhlazují hodnoty řady od času m do $n - m$, kde n je délka řady (tedy prvních m a posledních m hodnot řady zůstává nevyhlazeno)

Váhy pro klouzavé průměry

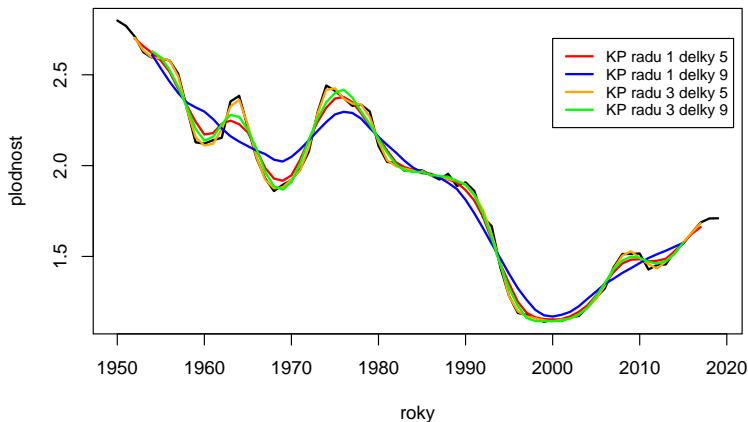
Tabulka vah klouzavých průměrů pro různé délky a řády vyhlazení

Délka	Řád 2 a 3	Řád 4 a 5
3	(0,1,0)	(0,1,0)
5	$\frac{1}{35}(-3, 12, 17, \dots)$	(0,0,1,...)
7	$\frac{1}{21}(-2, 3, 6, 7, \dots)$	$\frac{1}{231}(5, -30, 75, 131, \dots)$
9	$\frac{1}{231}(-21, 14, 39, 54, 59, \dots)$	$\frac{1}{429}(15, -55, 135, 179, \dots)$
11	$\frac{1}{429}(-36, 9, 44, 69, 84, 89, \dots)$	$\frac{1}{429}(18, -45, -10, 60, 120, 143, \dots)$

Metoda klouzavých průměrů

Různé délky a řády klouzavých průměrů

Vyvoj plodnosti v CR



Vyhlazení krajních hodnot

- "středové" hodnoty řady se vyhlazují pomocí sousedních hodnot na obě strany od daného času
- krajní hodnoty se vyhlazují pomocí krajních $2m + 1$ hodnot
- vyhlazuje se pomocí odhadovaného polynomiálního trendu
- jsou potřeba i ostatní koeficienty (nejen b_0 , ale i např. b_1, b_2, b_3)
- ve výsledku pak dostaneme jen jiné váhy krajních $2m + 1$ hodnot, které již nejsou symetrické
- obdobně lze počítat i predikce – každá další předpovídaná hodnota vyžaduje jiné váhy posledních $2m + 1$ hodnot řady

Volba řádu klouzavých průměrů

- **Objektivní pravidlo** je založené a diferencích
 - každá diference sníží řád původního polynomu o 1
 - pokud se r -tá diference jako první jeví konstantně, pak volím řád klouzavých průměrů r
- **Subjektivní pravidlo**
 - preference jednoduchého řešení, tj. klouzavé průměry co nejnižšího řádu
- **Praktické pravidlo**
 - v praxi se jiný než lineární řád nepoužívá
 - nejčastěji se používají nevážené klouzavé průměry nebo váhy, které odpovídají subjektivní důležitosti okolních hodnot
 - časté jsou např. váhy $\frac{1}{10}(1, 2, 4, 2, 1)$ nebo $\frac{1}{12}(1, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$

Exponenciální vyrovnání

- Stejně jako metoda klouzavých průměrů, patří i exponenciální vyrovnání mezi **adaptivní přístupy**.
- Hlavní rozdíl oproti klouzavým průměrům je, že pro výpočet vyrovnané hodnoty v čase t nepoužívám hodnoty na obě strany od času t , ale pouze hodnoty předcházející času t .
- Používají se všechny minulé dostupné hodnoty s vahami exponenciálně klesajícími do minulosti.

Exponenciální vyrovnání

Předpokládejme, že časovou řadu tvoří pouze trend a náhodná složka

$$Y_t = Tr_t + \varepsilon_t$$

Mohu vyrovnávat

- lokálně konstantní trend $Tr_t = \beta_0$
jednoduché exponenciální vyrovnávání
- lokálně lineární trend $Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t$
dvojitě exponenciální vyrovnávání
- lokálně kvadratický trend $Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$
trojitě exponenciální vyrovnávání
- trendy vyššího řádu už se neuvažují

Jednoduché exponenciální vyrovnávání

Odhad vyrovnávací hodnoty $b_0(t)$ získám minimalizací výrazu

$$\sum_{i=1}^{\infty} (Y_{t-i} - \beta_0)^2 \alpha^i$$

kde α je vyrovnávací konstanta

- obecně musí platit $0 < \alpha < 1$
- praxe ukázala, že stačí uvažovat $0.7 < \alpha < 1$

Jednoduché exponenciální vyrovnávání

Derivací výše uvedeného výrazu podle β_0 a položení této derivace rovno nule, získám odhad parametru $b_0(t)$ a tedy i vyrovnanou hodnotu v čase t .

$$\hat{Y}_t = (1 - \alpha) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i Y_{t-i}$$

Získám tedy vážený součet minulých hodnot s vahami

$$(1 - \alpha), (1 - \alpha)\alpha, (1 - \alpha)\alpha^2, \dots$$

exponenciálně klesajícími do minulosti.

Je možné psát i rekurentní vzorec

$$\hat{Y}_t = (1 - \alpha) Y_t + \alpha \hat{Y}_{t-1}$$

Jednoduché exponenciální vyrovnávání

Volba vyrovnávací konstanty α

- čím menší α , tím rychleji metoda reaguje na změnu v řadě
- větší α zesílí vyrovnávací schopnost metody
- znám-li optimální délku M klouzavého průměru pro danou řadu, mohu volit $\alpha = \frac{M-1}{M+1}$
- jinak (častěji) volím numericky: spočítám si vyrovnání řady pro různé hodnoty $\alpha = 0.7, 0.72, \dots, 0.98$, pro každé ohodnotím, jak vyrovnání souhlasí s mými daty (např. pomocí *SSE – Sum of Squared Errors*) a volím α s nejnižším *SSE*
- softwary už volí automaticky

Jednoduché exponenciální vyrovnávání

Předpovědi

- budoucí hodnoty předpovídám poslední vyrovnanou hodnotou \hat{Y}_n
- předpovědní interval spolehlivosti má tvar

$$(\hat{Y}_{n+\tau}(n) - zd_\tau \Delta(n), \hat{Y}_{n+\tau}(n) + zd_\tau \Delta(n))$$

kde z je příslušný kvantil standartního normálního rozdělení, $d_t = 1.25$ a

$$\Delta(n) = \sum_{t=1}^n \frac{|Y_t - \hat{Y}_t(t-1)|}{n}$$

- výhodou těchto předpovědí a předpovědních intervalů je jejich snadná úprava, pokud do řady přibude další pozorování

Jednoduché exponenciální vyrovnávání

Adaptivní řídicí proces

- je možné uvažovat i vyrovnávací konstantu α měnící se v čase
- definuje se **indikátor poruchy**

$$I(\alpha, t) = \left| \frac{Y(\alpha, t)}{D(\alpha, t)} \right|$$

kde

$$Y(\alpha, t) = \sum_{i=1}^t e_i(\alpha), \quad D(\alpha, t) = \sum_{i=1}^t \frac{|e_i(\alpha)|}{t}$$

a e_i je chyba předpovědi

- zvedne-li se hodnota $I(\alpha, t)$ nad kontrolní mez K , pak je to signál ke změně α či dokonce celé metody

Dvojitě exponenciální vyrovnávání

Odhad vyrovnávací hodnoty $b_0(t) + b_1(t)t$ získám minimalizací výrazu

$$\sum_{i=1}^{\infty} (Y_{t-i} - (\beta_0 + \beta_1(-i)))^2 \alpha^i$$

kde α je opět vyrovnávací konstanta a platí pro ni to, co u jednoduchého exponenciálního vyrovnání

- obecně musí platit $0 < \alpha < 1$
- praxe ukázala, že stačí uvažovat $0.7 < \alpha < 1$
- jen optimální volba při znalosti optimální délky klouzavého průměru M je $\alpha = \sqrt{\frac{M-1}{M+1}}$

Trojité exponenciální vyrovnání

V praxi se využívá minimálně, ale "ještě to jde". Odhad vyrovnávací hodnoty $b_0(t) + b_1(t)t + b_2(t)t^2$ získám minimalizací výrazu

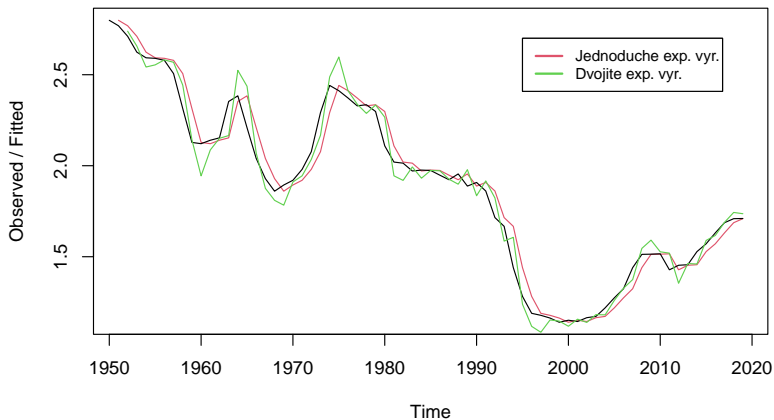
$$\sum_{i=1}^{\infty} (Y_{t-i} - (\beta_0 + \beta_1(-i) + \beta_2(-i)^2))^2 \alpha^i$$

pro vyrovnávací konstantu α opět platí

- obecně musí platit $0 < \alpha < 1$
- praxe ukázala, že stačí uvažovat $0.7 < \alpha < 1$
- ale používá se trochu jiná počáteční volba hodnot při hledání optimálního α

Grafická ukázka

Holt-Winters filtering



Holt-Wintersova metoda

Máme-li sezónní data, je možné odhadovat jejich chování

Holt-Wintersovu metodu

- zobecnění metody exponenciálního vyrovnaní
- adaptivní metoda
- odhaduje sezónní složku, nevyhlazuje ji
- metoda je aplikovatelná jak na aditivní, tak na multiplikativní model, tj.

$$Y_t = T r_t + S_t + \varepsilon_t$$

$$Y_t = T r_t \times S_t \times \varepsilon_t$$

Holt-Wintersova metoda

Předpokládejme lokálně lineární trend, který se může v čase měnit.

Označme

- trend odhadnutý v čase t : $Tr_t(t)$

$$Tr_t(t) = \beta_0(t) + \beta_1(t)t$$

- odhady regresních koeficientů v čase t : $b_0(t)$ a $b_1(t)$
- sezónní složku v čase t : $s_t(t)$
- počet sezón L
- pro účely snažšího odhadu parametrů dále označme $a_0(t) = b_0(t) + b_1(t)$

Aditivní Holt-Wintersova metoda

Výše uvedené odhady se řídí následujícími vztahy

$$a_0(t) = \alpha(Y_t - s_{t-L}(t-L)) + (1 - \alpha)(a_0(t-1) + b_1(t-1))$$

$$b_1(t) = \beta(a_0(t) - a_0(t-1)) + (1 - \beta)b_1(t-1)$$

$$s_t(t) = \gamma(Y_t - a_0(t)) + (1 - \gamma)s_{t-L}(t-L)$$

Odhad hodnoty $Y_{t+\tau}$ pak můžeme počítat jako

$$\hat{Y}_{t+\tau}(t) = a_0(t) + b_1(t)\tau + s_{t+\tau-L}(t + \tau - L)$$

Aditivní Holt-Wintersova metoda

Jaké hodnoty dosazujeme

- za $s_{t+\tau-L}(t + \tau - L)$ používáme nejaktuálnější odhad sezónní složky, který máme k dispozici
- za počáteční hodnoty a_0, b_1 bereme odhady regresních koeficientů ze všech dat
- za počáteční odhad sezónní složky bereme průměr dané sezóny proti průměru všech dat
- používalo se $0 < \alpha, \beta, \gamma < 0,3$ (dnes už odhadují softwary sami)

Multiplikativní Holt-Wintersova metoda

Výše uvedené odhady se řídí následujícími vztahy

$$a_0(t) = \alpha \left(\frac{Y_t}{s_{t-L}(t-L)} \right) + (1 - \alpha)(a_0(t-1) + b_1(t-1))$$

$$b_1(t) = \beta(a_0(t) - a_0(t-1)) + (1 - \beta)b_1(t-1)$$

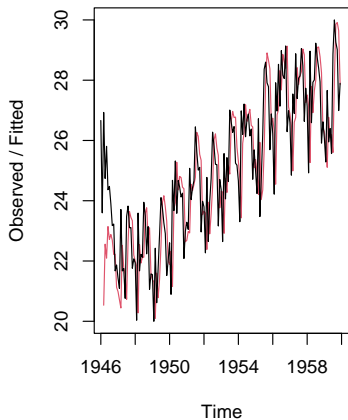
$$s_t(t) = \gamma \left(\frac{Y_t}{a_0(t)} \right) + (1 - \gamma)s_{t-L}(t-L)$$

Odhad hodnoty $Y_{t+\tau}$ pak můžeme počítat jako

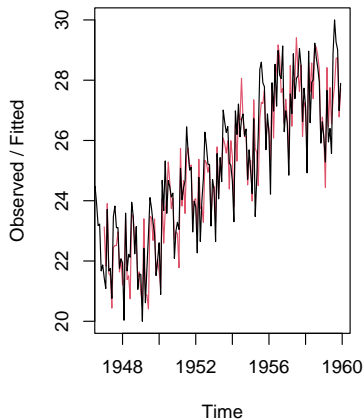
$$\hat{Y}_{t+\tau}(t) = (a_0(t) + b_1(t)\tau)s_{t+\tau-L}(t + \tau - L)$$

Srovnání odhadů

Dvojitě exponencialní vyrovnání



Holt-Wintersova metoda



Bílý šum

Předpokládáme, že náhodná složka je tvořena tzv. **bílým šumem**.

Definition

Nezávislé, stejně rozdělené náhodně veličiny s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem.

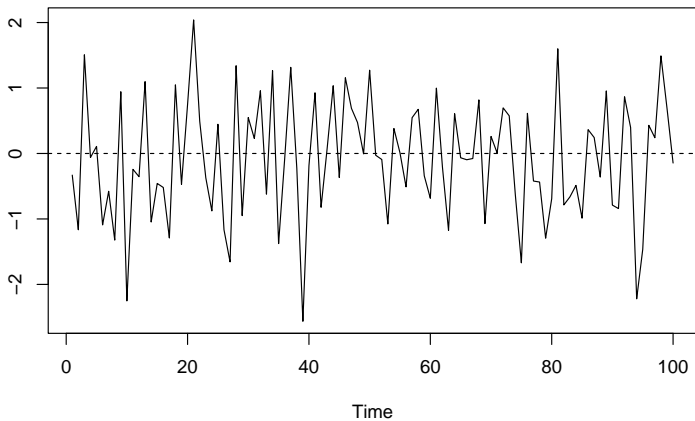
U náhodné složky je často třeba zjistit, zda je skutečně náhodná. Rozlišujeme dva případy

- máme časovou řadu, která na první pohled vypadá jako bílý šum
- máme časovou řadu, kde jsme odstínili trend a sezónní složku a o zbytku potřebujeme rozhodnout, zda tvoří bílý šum

V každém z případů se používají jiné testy náhodnosti.

Bílý šum

Bily sum



Testy náhodnosti pro řadu

Testuje se H_0 : řada je náhodná vs. H_1 : řada není nahodná

- Test založený na **znaménkách diferencí**
spočítám, v kolika bodech řada roste, a v kolika klesá
je-li řada náhodná, měly by tyto počty být přibližně stejné
- Test založený na **Kendallově koeficientu** τ
Kendallův korelační koeficient pro řadu Y_t a indexy pozorování t

$$\tau = \frac{4v}{n(n-1)} - 1$$

kde v je počet případů, kde $Y_t > Y_s$ pro $t > s$

Testy náhodnosti pro řadu

- Test založený na **Spearmanově koeficientu** ρ
Spearmanův korelační koeficient pro řadu Y_t a indexy pozorování t

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{t=1}^n (t - r_t)^2$$

kde r_t je pořadí t -té hodnoty Y_t

- **Wald-Wolfowitz Runs Test** (nebo též mediánový test)
založen na hodnocení, zda je číslo nad(+)/pod(-)
mediánem a počítá se, kolik úseků stejného znaménka v
řadě máme (označme u)
označme m počet hodnot nad mediánem, pak střední
hodnota u má být $m + 1$

Náhodná složka pro residuální složku

Testuje se: H_0 : autokorelace je nulová vs. H_1 : autokorelace není nulová

- **Ljung-Box** neboli **Box-Pierce** test náhodnosti testuje velikost autokorelace v určených bodech

$$Q = n(n+2) \sum_{\tau=1}^h \frac{r_{\tau}^2}{n-\tau}$$

kde r_{τ} je odhad autokorelace v čase τ (tedy korelace hodnot posunutých o τ kroků)

Stacionarita řady

Pro vysvětlení Box-Jenkinsonovy metodologie analýzy časových řad definujeme následující pojmy

- **stacionarita** – znamená *stálost* časové řady
- **striktní stacionarita** – všechny členy řady mají stejné rozdělení
- **slabá stacionarita** – všechny členy řady mají stejnou (předpokládejme že nulovou) střední hodnotu a stejný rozptyl σ_y^2

Základní modely budeme definovat pro stacionární (stačí slabě) časové řady.

Autokorelační funkce

Analýza těchto řad je založena na vzájemných vztazích mezi členy řady

- **autokovarianční funkce** – je to funkce vzdálenosti mezi dvěma členy řady

$$\gamma_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = E(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)$$

kde μ je střední hodnota členů řady

- **autokorelační funkce** – vypočítá se z funkce autokovarianční jejím vydělením rozptylem

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sigma_y^2}$$

Parciální autokorelační funkce

- **parciální autokorelační funkce** – jedná se o parciální korelační koeficient řad Y_t a Y_{t+k} při pevných hodnotách $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+k-1}$

$$\rho_{kk} = \frac{|\mathbf{P}_k^*|}{|\mathbf{P}_k|}$$

kde

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_k^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & \rho_k \end{bmatrix}$$

Odhad autokorelační funkce

Odhad autokorelační funkce a jeho vlastnosti.

- odhad střední hodnoty $\bar{Y} = \sum_{t=1}^n \frac{Y_t}{n}$
- odhad rozptylu řady $s_y^2 = c_0 = \sum_{t=1}^n \frac{(Y_t - \bar{Y})^2}{n}$
- odhad autokovarianční funkce $c_k = \sum_{t=1}^{n-k} \frac{(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{n}$
- odhad autokorelační funkce $r_k = \frac{c_k}{c_0}$

Tento odhad autokovarianční funkce a tedy ani autokorelační funkce není nestranný (to by se muselo dělit $n - k$), ale má malou střední chybu ($E(c_k - \gamma_k)^2$). Výše uvedený odhad je asymptoticky nestranný.

Vsuvka

- Odhad T parametru θ je **nestranný**, když

$$E(T) = \theta$$

- rozdíl $E(T) - \theta$ se nazývá vychýlení
- vychýlení odhadu autokovarianční funkce je $\frac{-k}{n} \gamma_k$
- pro $n \rightarrow \infty$ konverguje vychýlení k nule, což se nazývá **asymptotická nestrannost**

Odhad autokorelační funkce

Někdy je třeba otestovat, od kterého bodu se autokorelační funkce dá považovat za nevýznamnou. K tomu se používá **Bartletova aproximace** rozptylu autokorelační funkce.

Je-li $\rho_k = 0$, pak pro $k > k_0$ platí

$$\sigma(r_k) = \sqrt{\text{Var}(r_k)} \sim \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k_0} r_j^2 \right)}$$

Pro zjednodušení se porovnává odhadovaná hodnota autokorelační funkce $|r_k|$ s číslem $2\sigma(r_k)$.

Odhad parciální autokorelační funkce

Parciální autokorelační funkce se odhaduje rekurentně na základě následujících pravidel

- $r_{1,1} = r_1$
- $r_{k,k} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_j}$
- kde $r_{k,j} = r_{k-1,j} - r_{k,k} r_{k-1,k-j}$

Test o nulovosti parciální autokorelační funkce je založen na **Quenouilleově aproximaci** rozptylu

$$\sigma(r_{kk}) \sim \sqrt{\frac{1}{n}}$$

pro $k > k_0$. Pro jednoduchost se opět odhad parciální autokorelační funkce porovnává s hodnotou $2\sigma(r_{kk})$

Lineární proces

Lineárním procesem nazýváme řadu tvaru

$$Y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

kde ε_t je bílý šum s rozptylem σ_ε^2 a ψ_j jsou parametry. Zavedme operátor zpětného posunutí B následovně

$$BY_t = Y_{t-1}, \quad B^j Y_t = Y_{t-j}$$

Jeho pomocí je možné zapsat lineární proces jako

$$Y_t = \psi(B)\varepsilon_t$$

kde

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j$$

Lineární proces

Pomocí operátoru zpětného posunu nastavíme podmínky na časové řady, aby byly popsitelné modely Box-Jenkinsonovy metodologie.

Řada $\psi(B)$ konverguje pro $|B| \leq 1$, uvažujeme-li B jako číselnou proměnnou. Tato podmínka zároveň zaručí, že lineární proces je stacionární se střední hodnotou nula. Za určitých podmínek lze proces napsat jako

$$Y_t = \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \dots + \varepsilon_t$$

Pak se lineární proces nazývá invertibilní.

Proces klouzavých součtů (Moving Averages)

Proces klouzavých součtů řádu q se značí $MA(q)$ a má tvar

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

který je možné zapsat jako

$$Y_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

kde $\theta(B) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j B^j$ je tzv. **operátor klouzavých součtů**.

Proces $MA(q)$ je

- stacionární pro libovolné θ_j
- má nulovou střední hodnotu
- jeho rozptyl je $\sigma_y^2 = \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$

Proces klouzavých součtů (Moving Averages)

- jeho autokorelační funkce je

$$\rho_k = \frac{\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2}$$

pro $k = 1, \dots, q$ a je $\rho_k = 0$ pro $k > q$

- autokorelační funkce má bod useknutí $k_0 = q$
- parciální autokorelační funkce nemá bod useknutí a je omezena geometricky klesající posloupností nebo sinusoidou s geometricky klesající amplitudou
- proces je invertibilní, pokud všechny kořeny polynomu $\theta(B)$ leží vně jednotkového kruhu

Proces MA(1)

Nejjednodušším procesem klouzavých součtů je proces $MA(1)$.

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

s vlastnostmi

- proces $MA(1)$ je invertibilní, pokud $|\theta_1| < 1$
pak lze tento proces napsat jako
$$Y_t = \theta_1 Y_{t-1} - \theta_1^2 Y_{t-2} + \theta_1^3 Y_{t-3} - \dots + \varepsilon_t$$
- autokorelační funkce

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

a $\rho_k = 0$ pro $k > 1$

- pro libovolný proces $MA(1)$ musí být $|\rho_1| < \frac{1}{2}$

Proces MA(1)

- parametr θ_1 lze spočítat z autokorelace ρ_1

$$\theta_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho_1^2}}{2\rho_1}$$

a pouze jeden z kořenů splňuje podmínku invertibility

- parciální autokorelační funkce je

$$\rho_{kk} = \frac{(-1)^{k-1} \theta_1^k (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}}$$

- platí $|\rho_{kk}| < |\theta_1|^k$

Autoregresní proces (Autoregressive process)

Autoregresní proces řádu p se značí $AR(p)$ a má tvar

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

tento proces můžeme pomocí zpětného operátoru zapsat jako

$$\varphi(B)Y_t = \varepsilon_t$$

kde $\varphi(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j B^j$ je tzv. autoregresní operátor.

Proces $AR(p)$ je

- automaticky invertibilní
- stacionární, pokud všechny kořeny polynomu $\varphi(B)$ leží vně jednotkového kruhu
- jeho střední hodnota je nulová

Autoregresní proces (Autoregressive process)

- pro jeho autokorelační funkci platí

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p}$$

pro $k > 0$.

- autokorelační funkce je lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid s geometricky klesajícími amplitudami
- parametry $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ je možné z autokorelační funkce dopočítat pomocí **Yule-Walkerových rovnic**
- rozptyl

$$\sigma_y^2 = \gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \dots - \varphi_p \rho_p}$$

- parciální autokorelační funkce má bod useknutí $k_0 = p$ a je tedy $\rho_{kk} = 0$ pro $k > p$.

Proces AR(1)

Nejjednodušším autoregresním procesem je $AR(1)$ tvaru

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

s vlastnostmi

- $AR(1)$ je stacionární, pokud $|\varphi_1| < 1$
- autokorelační funkce procesu $AR(1)$ je

$$\rho_k = \varphi_1^k$$

pro $k > 0$ a je to tedy geometrická posloupnost klesající k nule

- pro $k = 1$ máme $\rho_1 = \varphi_1$
- parciální autokorelační funkce procesu $AR(1)$ je

$$\rho_{11} = \rho_1 = \varphi_1, \quad \rho_{kk} = 0$$

pro $k > 1$, tedy parciální autokorelační funkce má bod useknutí
 $k_0 = 1$

Smíšený proces (Autoregressive Moving Averages)

Smíšený proces z částí *MA* řádu q a *AR* řádu p nazýváme *ARMA* řádu p a q a má tvar

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Pomocí operátoru zpětného posunutí je zápis jednodušší

$$\varphi(B)Y_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

Vlastnosti procesu *ARMA*(p, q)

- podmínka stacionarity je stejná jako u *AR*(p)
- podmínka invertibility je stejná jako u *MA*(q)
- kořeny polynomů $\theta(B)$ a $\varphi(B)$ musí ležet vně jednotkového kruhu

Smíšený proces (Autoregressive Moving Averages)

- střední hodnota $ARMA(p, q)$ je nulová
- pro autokorelační funkci ρ_k platí

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \varphi_p \rho_{k-p}$$

pro $k > q$

- je-li $q \geq p$ pak od času $q - p + 1$ je autokorelační funkce tvořena geometricky klesající posloupností, nebo kombinací sinusoid s geometricky klesajícími amplitudami
- parciální autokorelační funkce ρ_{kk} je obdobně od času $p - q + 1$ omezena geometricky klesající posloupností nebo sinusoidou s geometricky klesající amplitudou

Proces ARMA(1,1)

Proces $ARMA(1, 1)$ má tvar

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

s vlastnostmi

- podmínka stacionarity $|\varphi_1| < 1$
- podmínka invertibility $|\theta_1| < 1$
- rozptyl řady je

$$\sigma_y^2 = \gamma_0 = \frac{1 + \theta_1^2 + 2\varphi_1\theta_1}{1 - \varphi_1^2} \sigma_\varepsilon^2$$

- pro autokorelační funkci platí $\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1}$ pro $k > 1$
- autokorelační funkce v čase 1 je

$$\rho_1 = \frac{(1 + \varphi_1\theta_1)(\varphi_1 + \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + 2\varphi_1\theta_1} 1 - \varphi_1^2$$

Proces ARMA(1,1)

- parametry pak můžeme odhadnout pomocí

$$\varphi_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \theta_1 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$$

kde

$$b = \frac{1 - 2\rho_2 + \varphi_1^2}{\rho_1 - \varphi_1}$$

a jen jeden kořen odpovídá podmínce invertibility

- pro autokorelační funkci musí dále platit

$$2\rho_1^2 - |\rho_1| < \rho_2 < |\rho_1|$$

- parciální autokorelační funkce je omezena geometricky klesající posloupností

Odhad ARMA modelu

Jak najít optimální model pro stacionární řadu

první nápovědu dají autokorelační a parciální autokorelační funkce

	ρ_k	ρ_{kk}
$AR(p)$	neexistuje bod useknutí	bod useknutí $k_0 = p$
$MA(q)$	bod useknutí $k_0 = q$	neexistuje bod useknutí
$ARMA(p, q)$	neexistuje bod useknutí po $q - p$ hodnotách omezena	neexistuje bod useknutí po $p - q$ hodnotách omezena

Odhad ARMA modelu

Odhad parametrů modelu

- používá se metoda nejmenších čtverců (minimalituje se součet $\sum_{t=1}^n (\varepsilon_t(\varphi, \theta))^2$)
- jelikož funkce ε_t je v parametrech φ a θ nelineární, jedná se o nelineární součet čtverců a je třeba postupovat iterativně
- počítač necháme odhadnout několik základních modelů (většinou některé z $AR(1)$, $AR(2)$, $AR(3)$, $MA(1)$, $MA(2)$, $MA(3)$, $ARMA(1, 1)$, $ARMA(2, 1)$, $ARMA(1, 2)$, $ARMA(2, 2)$)
- pomocí určitého kritéria zvolíme optimální model
- porovnáme volbu s průběhem autokorelační a parciální autokorelační funkce

Odhad ARMA modelu

Kritéria pro výběr modelu

- Akaikeho informační kritérium

$$AIC = \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 + 2 \frac{k}{n}$$

kde k je počet parametrů modelu
nejznámější kritérium, které však upřednostňuje modely s vyšším počtem parametrů

- Bayesovské informační kritérium

$$BIC = \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 + \frac{k \ln n}{n}$$

toto kritérium je nejvhodnější pro optimální volbu modelu

- Hannan-Quinn informační kritérium

$$HQ = \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 + c \frac{k \ln \ln n}{n}$$

nejčastěji se volí $c = 1$
kritérium vymyšleno přímo pro B-J modely

Čím menší hodnota kritéria, tím lepší model.

Odhad ARMA modelu

Ověření vybraného modelu

- střední chyba odhadnutých parametrů by měla být víc jak dvakrát menší než absolutní hodnota samotného odhadu
- odhadnutý rozptyl bílého šumu by neměl být příliš velký
- residua odhadnutého modelu by měla být nezávislá, jejich autokorelační funkce by tedy měla nabývat malých hodnot např. pro $AR(1)$ by $r_1(\varepsilon)$ měla být menší než $2\varphi_1^2/n$
- máme i test na hodnoty autokorelační funkce residuí (Ljung-Box test)

Integrované ARMA modely (ARIMA)

Modely Box-Jenkinsonovy metodologie pro řady s trendem, bez sezónnosti

- nevyžadují stacionaritu
- odstínění trendu se zde realizuje přes difference
- počet nutných diferencí před odhadem ARMA modelu odpovídá komplikovanosti trendu
- většinou stačí diferencovat jednou, maximálně dvakrát

Integrovaný ARMA model se značí $ARIMA(p, d, q)$, kde

- p je řád autoregrese
- q je řád klouzavých průměrů
- d je nutný počet diferencí potřebný ke stacionarizaci původní řady

Model ARIMA(p,d,q)

Model zapisujeme jako

$$\varphi(B)w_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

kde $w_t = \Delta^d Y_t$ je d -tá diference modelu a platí

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - B)Y_t$$

$$\Delta^2 Y_t = (1 - B)^2 Y_t = (1 - 2B + B^2)Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Model $ARIMA(p, d, q)$ pak můžeme zapsat jako

$$\varphi(B)(1 - B)^d Y_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

Nevýhodou je, že řada diferencí má o d prvků méně než původní řada, kde d je řád diference

Model ARIMA(p,d,q)

Určení řádu difference pro procesy ARIMA

- využití "okometrické metody"
diferencuji tak dlouho, až mi výsledná řada diferencí přijde jako stacionární
- s pomocí autokorelační funkce
jestliže hodnoty autokorelační funkce diferencí klesají pomalu (přibližně lineárně a ne geometricky), diferencuji dál
- pomocí odhadu rozptylu řady diferencí
vyberu tu diferenci, která má minimální odhad rozptylu řady
- pomocí počítače
použiji nejnižší diferenci, pro niž počítač umí odhadnout ARMA model

Sezónní integrovaný ARMA model (SARIMA)

Box-Jenkinsonova metodologie pro sezónní řady

- nejprve se hledá model pro sezónnost
- ta se modeluje pro každý "díl" sezóny (např. měsíc) zvlášť
- pro každý tento díl se zkonstruuje samostatný model $ARIMA(P, D, Q)$
- např. pro měsíční data tím získáme

$$\Phi(B^{12})\Delta_{12}^D Y_t = \Theta(B^{12})\eta_t$$

- předpokladem je, že modely pro jednotlivé "díly" by měly být přibližně stejné

Sezónní integrovaný ARMA model (SARIMA)

- náhodné složky η_t v modelech pro jednotlivé "díly" sezóny by měly být vzájemně korelované
- pro tyto náhodné složky zkonstruujeme další model $ARIMA(p, d, q)$
- spojením těchto modelů dostaneme

$$\varphi(B)\Phi(B^s)\Delta^d\Delta_s^D Y_t = \theta(B)\Theta(B^s)\varepsilon_t$$

kde s je počet sezón (pro měsíční data 12, pro čtvrtletní 4, atd.)

- výsledkem je tzv. **multiplikativní sezónní model** řádu $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$

Identifikace modelu

- stěžejní je určení řádu diferencí
- diferencuje se přes délku sezóny i přes sousední hodnoty
- určení řádu difference záleží na autokorelační funkci
- pokud má autokorelační funkce vysokou hodnotu v délce sezóny, je nutné diferencovat přes sezónu
- pokud má autokorelační funkce pomalu klesající hodnoty, je třeba diferencovat přes sousední hodnoty
- je možné volit optimální model i podle minimalizace rozptylu řady

Předpovědi

- předpovědi konstruujeme rekurentně
- namísto aktuálních hodnot bílého šumu bereme nulu, za starší hodnoty bílého šumu bereme chyby předchozích předpovědí
- předpovědní interval spolehlivosti

$$\hat{Y}_{t+k}(t) \pm 2\sigma\{e_{t+k}(t)\}$$

kde $e_t(t-1) = Y_t - \hat{Y}_t(t-1)$.

Kroskorelační funkce

Nejjednodušším způsobem, jak zkoumat závislost mezi dvěma časovými řadami je použít **kroskorelační funkci** definovanou jako

$$\rho_k^c = \frac{\text{cov}(Y_t, X_{t+k})}{\sigma_y \sigma_x}$$

- jedná se o funkci časového zpoždění k
- běžný korelační koeficient je hodnota kroskorelační funkce v bodě 0 (se zpožděním 0)
- kroskorelační funkce využívá Pearsonův korelační koeficient
- nejvyšší hodnota kroskorelační funkce by měla ukazovat na zpoždění s nímž se skutečná závislost projeví
- tvar kroskorelační funkce závisí na míře autokorelovanosti vstupních řad

Kroskorelační funkce

Odhad kroskorelační funkce pro zpoždění k je

$$r_k^c = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \bar{Y})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2} \sqrt{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}}$$

Hrubý odhad střední chyby této funkce r_k^c v bodě k je obdobný jako u autokorelační funkce

$$\sigma({}^c r_k) = \sqrt{\text{Var}(r_k^c)} \sim \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k_0} (r_j^c)^2 \right)}$$

Lineární dynamické modely

- popisují **závislost mezi časovými řadami**
- do modelů může vstupovat
 - závislost na jiných časových řadách (regresorech)
 - závislost na čase, tj. dlouhodobý trend a sezónnost
 - závislost na minulých pozorováních řady, případně na minulých náhodných chybách (ARMA složka)
- dáváme-li do modelu závislost na jiné řadě, je třeba určit, s jakým zpožděním bude řada do modelu vstupovat
- **optimální zpoždění**, s nímž bude regresor do modelu vstupovat, tj. X_{t-k} , odhadneme např. z kroskorelační funkce

Lineární dynamické modely

Hledání optimálního modelu

- 1 nejprve vytipujeme, na kterých řadách hledáme závislost
- 2 tuto závislost odhadujeme běžnými modely lineární regrese (metodou nejmenších čtverců)
- 3 residua modelu je nutné otestovat na trend, sezónnost a autokorelaci
- 4 pokud se objeví trend a sezónnost, je možné je modelovat zvlášť
 - zejména pro stabilní lineární trend se hodí vložit jako další regresor čas
 - sezónnost se může modelovat přes kategorickou proměnnou, indikátor sezóny (např. měsíc)

Lineární dynamické modely

Hledání optimálního modelu

- 6 při autokorelovanosti residuí se pro residua hledá vhodný model ARMA (do modelu s regresory se přidává závislost řady sama na sobě)
- 7 trend, sezónnost a autokorelovanost je možné řešit přes SARIMA model pro residua
- 8 kontrola residuí modelu (normalita a autokorelovanost)
- 9 nenormálnost residuí vyžaduje transformaci závisle proměnné (nejčastěji přirozený logaritmus)
- 10 správný model je ten, jehož residua mají nulovou autokorelační funkci pro $k > 0$