1 Exponenciální funkce v biologii

Na případné chyby mě prosím upozorněte

Exponenciální závislost je klíčovým konceptem pro biology, protože mnohé biologické procesy probíhají exponenciálně, zejména v počátečních fázích jejich průběhu. Exponenciální růst nebo pokles popisuje situaci, kdy rychlost změny nějaké veličiny je přímo úměrná aktuálnímu množství této veličiny. Typickým příkladem je růst bakteriální populace, kde se každá buňka pravidelně dělí, což vede ke zdvojnásobení populace v konstantních intervalech. Tento typ růstu lze matematicky popsat rovnicí $N = N_0 \cdot e^{kt}$, kde N je konečná velikost populace, N_0 je počáteční velikost, k je míra růstu (pozitivní pro růst a negativní pro pokles) a t je čas. Exponenciální růst je sice v přírodě často pozorován, avšak u mnoha organismů má omezenou platnost, protože zdroje a podmínky prostředí nejsou neomezené. Po dosažení určité velikosti populace či objemu biomasy nastupuje obvykle fáze zpomalení růstu. Exponenciální model je proto velmi užitečný pro popis krátkodobých procesů nebo procesů v laboratorních podmínkách s dostatkem zdrojů, ale v přirozeném prostředí bývá růst časem omezen a přechází do jiného typu růstového modelu, jako je logistická křivka.

Exponenciální závislost můžeme představit jako situaci, kdy se hodnota nějakého jevu (např. populace bakterií) zvětšuje nebo zmenšuje stále rychlejším tempem, protože přírůstky závisí na aktuální velikosti tohoto jevu. Představte si, že na začátku máte 10 bakterií a každou hodinu se jejich počet zdvojnásobí – po hodině jich bude 20, po dvou hodinách 40, po třech hodinách 80, a tak dále. S každým dalším časovým přírůstkem se tedy populace bakterií násobí stále vyšším číslem. Zatímco při běžném, lineárním růstu byste přidávali stále stejný počet bakterií za každou hodinu (např. vždy +10), při exponenciálním růstu se hodnota zvyšuje násobkem původní hodnoty – a čím více bakterií je, tím více se jich zase přidá. Exponenciální růst se tedy vyznačuje tím, že malé přírůstky času způsobí mnohem rychlejší růst nebo pokles výsledné hodnoty, což může v přírodě rychle vést k obrovským změnám v počtu organismů nebo koncentraci látek.

Následující tabulka ilustruje exponenciální růst počtu nově nakažených osob při různých rychlostech přenosu nákazy. Každý nakažený během jednoho dne infikuje buď 5, 2, nebo 1 dalšího člověka, což vede k dramaticky odlišným nárůstům nakažených v čase. První sloupec tabulky uvádí dny od začátku sledování, zatímco další tři sloupce ukazují počet nově nakažených pro jednotlivé scénáře přenosu. Tabulka zřetelně ukazuje, jak rychlost šíření ovlivňuje růst počtu nakažených: čím více osob nakažený infikuje, tím rychleji počet nakažených exponenciálně roste.

Den	**5 dalších nakažených**	**2 další nakažení**	**1 další nakažený**
0	1	1	1
1	5	2	1
2	25	4	1
3	125	8	1
4	625	16	1
5	3125	32	1
6	15625	64	1
7	78125	128	1

Příklad: Modelování počtu nově nakažených virem

Zadání: Uvažujme model šíření neznámého viru, kdy každý nakažený během prvního dne infikuje:

(a) 1 další osobu,

(b) 2 další osoby,

(c) 3 další osoby,

a v následujících dnech již nikoho nenakazí. V pondělí je zaznamenáno 100 nových nakažených. Kolik nově nakažených bude ve všech třech případech v pátek?

Řešení

Tento model vychází z toho, že každý nakažený infikuje během jednoho dne pouze omezený počet dalších osob, čímž vzniká následující počet nakažených v jednotlivé dny.

1) Případ a) Každý nakažený infikuje 1 další osobu denně

Předpokládejme, že v pondělí je 100 nově nakažených. Každý z nich nakazí 1 další osobu. Počty nakažených v dalších dnech jsou následující:

- **Pondělí:** 100
- **Úterý:** $100 \times 1 = 100$
- **Středa:** $100 \times 1 = 100$
- **Čtvrtek:** $100 \times 1 = 100$
- **Pátek:** $100 \times 1 = 100$

Celkový počet nově nakažených do pátku:

$$100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 500$$

2) Případ b) Každý nakažený infikuje 2 další osoby denně

Každý nakažený infikuje 2 další osoby během prvního dne:

- **Pondělí:** 100
- **Úterý:** $100 \times 2 = 200$
- **Středa:** $200 \times 2 = 400$
- **Čtvrtek:** $400 \times 2 = 800$
- **Pátek:** $800 \times 2 = 1600$

Celkový počet nově nakažených do pátku:

$$100 + 200 + 400 + 800 + 1600 = 3100$$

3) Případ c) Každý nakažený infikuje 3 další osoby denně

Každý nakažený infikuje 3 další osoby během prvního dne:

- **Pondělí:** 100
- **Úterý:** $100 \times 3 = 300$
- **Středa:** $300 \times 3 = 900$
- **Čtvrtek:** $900 \times 3 = 2700$
- **Pátek:** $2700 \times 3 = 8100$

Celkový počet nově nakažených do pátku:

$$100 + 300 + 900 + 2700 + 8100 = 12100$$

Závěr

Počet nově nakažených do pátku bude záviset na počtu osob, které každý nakažený infikuje během prvního dne:

- Při šíření na 1 osobu denně: celkem 500 nově nakažených.
- Při šíření na 2 osoby denně: celkem 3100 nově nakažených.
- Při šíření na 3 osoby denně: celkem 12100 nově nakažených.

Další příklady šíření nakažených

Příklad 1: V pondělí je zaznamenáno 200 nových nakažených. Kolik bude nakažených v pátek, když každý nakažený infikuje během jednoho dne:

- (a) 1 osobu: ≈ 1000
- (b) 2 osoby: ≈ 6200
- (c) 3 osoby: ≈ 24200

Příklad 2: V pondělí je 50 nově nakažených. Kolik bude nakažených v pátek, když každý nakažený infikuje:

- (a) 2 osobu: ≈ 1550
- (b) 3 osoby: ≈ 6050
- (c) 4 osoby: ≈ 17050

Příklad 3: V pondělí 10 nových nakažených. Kolik bude nakažených v neděli, když každý nakažený infikuje:

- (a) 3 osobu: ≈ 10930
- (b) 4 osoby: ≈ 54610
- (c) 5 osoby: ≈ 195310

Příklad 4: V pondělí je 150 nakažených. Kolik bude nakažených v neděli, když každý infikuje:

- (a) 1 osobu: ≈ 1050
- (b) 2 osoby: ≈ 19050
- (c) 3 osoby: ≈ 163950

Příklad 5: V pondělí je zaznamenáno 20 nově nakažených. Kolik bude nakažených v sobotu, když každý infikuje:

- (a) 2 osobu: ≈ 1260
- (b) 3 osoby: ≈ 7280
- (c) 4 osoby: ≈ 27300

Příklad: Růst bakteriální populace

V biologii často pozorujeme exponenciální růst populací mikroorganismů, například bakterií. Každá bakterie se při dělení rozdělí na dvě nové buňky, což vede k rychlému nárůstu počtu jedinců. Tento model růstu však platí pouze v ideálních podmínkách, kde nejsou omezeny zdroje ani prostor. Tento příklad je užitečný pro modelování růstu bakterií v laboratorních podmínkách nebo během prvních fází infekce v organismu.

Zadání: Uvažujme generační dobu 30 minut, tedy každá buňka se rozdělí na dvě za 30 minut. Máme-li na začátku 5 bakterií, určíme, kolik jich bude po 24 hodinách, 10 hodinách a za týden.

Řešení

Exponenciální růst bakterií můžeme popsat vzorcem:

$$N = N_0 \cdot 2^n$$

kde:

- N je počet bakterií po daném čase,
- N_0 je počáteční počet bakterií (zde $N_0 = 5$),

- n je počet dělení, který určíme jako $\frac{t}{T}$,
- t je celkový čas (v minutách),
- T je generační doba (čas, za který dojde k jednomu dělení, zde $T = 30$ minut).

1) Počet bakterií po 10 hodinách

Celkový čas $t = 10 \times 60 = 600$ minut.

$$n = \frac{600}{30} = 20$$

Počet bakterií po 10 hodinách:

$$N = 5 \cdot 2^{20} \approx 5{,}2 \times 10^{6} \text{ bakterií}$$

2) Počet bakterií po 24 hodinách

Celkový čas $t = 24 \times 60 = 1440$ minut.

$$n = \frac{1440}{30} = 48$$

Počet bakterií po 24 hodinách:

$$N = 5 \cdot 2^{48} \approx 1{,}4 \times 10^{15} \text{ bakterií}$$

3) Počet bakterií po týdnu

Celkový čas $t = 7 \times 24 \times 60 = 10080$ minut.

$$n = \frac{10080}{30} = 336$$

Počet bakterií po týdnu:

$$N = 5 \cdot 2^{336} \approx 7 \times 10^{101} \text{ bakterií}$$

Závěr

Exponenciální růst ukazuje dramatické zvýšení počtu bakterií v čase. Po 24 hodinách bude počet bakterií přibližně $1{,}4 \times 10^{15}$, po 10 hodinách $5{,}2 \times 10^{6}$, a po týdnu zhruba 7×10^{101}. Tento příklad ilustruje rychlost růstu bakteriálních populací při konstantní generační době.

Další příklady: Růst bakteriální populace

Příklad 1: Každá buňka bakterie se rozdělí na dvě každých 40 minut. Pokud na začátku máme 8 bakterií, kolik jich bude za 8 hodin, za 20 hodin a za 5 dní?

- Po 8 hodinách: ≈ 32768

- Po 20 hodinách: $\approx 8{,}6 \times 10^9$
- Po 5 dnech: $\approx 1{,}2 \times 10^{55}$

Příklad 2: Bakteriální populace roste tak, že každá buňka se dělí na dvě každých 25 minut. Na počátku je 6 bakterií. Kolik jich bude za 6 hodin, za 12 hodin a za 48 hodin?

- Po 6 hodinách: ≈ 3072
- Po 12 hodinách: $\approx 1{,}6 \times 10^6$
- Po 48 hodinách: $\approx 2{,}8 \times 10^{22}$

Příklad 3: Každá bakterie se dělí na dvě každých 50 minut. Pokud začneme s 10 bakteriemi, určete jejich počet za 7 hodin, 16 hodin a za 3 dny.

- Po 7 hodinách: ≈ 14481
- Po 16 hodinách: $\approx 1{,}7 \times 10^8$
- Po 3 dnech: $\approx 3{,}3 \times 10^{33}$

Příklad 4: Populace bakterií se zdvojnásobí každých 20 minut. Na počátku je 3 bakterií. Kolik jich bude za 4 hodiny, 15 hodin a za 72 hodin?

- Po 4 hodinách: ≈ 192
- Po 15 hodinách: $\approx 1{,}8 \times 10^7$
- Po 72 hodinách: $\approx 9{,}7 \times 10^{32}$

Příklad 5: Každá bakterie se rozdělí každých 35 minut. Na začátku máme 12 bakterií. Kolik jich bude po 9 hodinách, po 18 hodinách a za 2 dny?

- Po 9 hodinách: ≈ 529229
- Po 18 hodinách: $\approx 2{,}3 \times 10^{10}$
- Po 2 dnech: $\approx 7{,}07 \times 10^{25}$

Příklad: Modelování růstu populace

Ukážeme si model, který popisuje růst populace vyšších organismů, například zvířat nebo rostlin. Růst populace v přirozeném prostředí obvykle sleduje exponenciální trend, kdy se počet jedinců zvyšuje tím více, čím větší je původní počet (díky množení a imigraci). Tento exponenciální model je však omezený, protože populace brzy narazí na environmentální limity, jako jsou nedostatek potravy, predátoři, choroby nebo omezený prostor. V biologii se proto exponenciální růst využívá hlavně pro predikci růstu populací v raných fázích, před dosažením kapacity prostředí.

Zadání: Populace zvířat v chráněném území roste exponenciálně s mírou růstu $k = 0{,}08$ denně. Na začátku měření je populace 100 zvířat. Určete počet zvířat za 30 dní, za 90 dní a za půl roku (180 dní).

Řešení

Exponenciální růst můžeme popsat vzorcem:

$$N = N_0 \cdot e^{kt}$$

kde:

- N je počet jedinců po uplynutí času t,
- N_0 je počáteční velikost populace (zde $N_0 = 100$),
- k je míra růstu (zde $k = 0{,}08$),
- t je celkový čas (v dnech).

1) Počet jedinců po 30 dnech

Dosadíme $t = 30$ dní:

$$N = 100 \cdot e^{0{,}08 \cdot 30} = 100 \cdot e^{2{,}4} \approx 1102 \text{ jedinců}$$

2) Počet jedinců po 90 dnech

Dosadíme $t = 90$ dní:

$$N = 100 \cdot e^{0{,}08 \cdot 90} = 100 \cdot e^{7{,}2} \approx 133943 \text{ jedinců}$$

3) Počet jedinců po půl roce (180 dní)

Dosadíme $t = 180$ dní:

$$N = 100 \cdot e^{0{,}08 \cdot 180} = 100 \cdot e^{14{,}4} \approx 1,8 \cdot 10^8 \text{ jedinců}$$

Závěr

Tento příklad ukazuje, jak rychle může populace růst díky exponenciálnímu růstu s konstantní mírou růstu.

Další příklady modelování růstu populace

Příklad 1: Populace rostlin v lese roste s koeficientem růstu $k = 0{,}06$ denně. Pokud na začátku měření je populace 200 rostlin, určete počet rostlin za 15 dní, za 45 dní a za 100 dní.

- Po 15 dnech: ≈ 492 rostlin
- Po 45 dnech: ≈ 2976 rostlin
- Po 100 dnech: ≈ 80686 rostlin

Příklad 2: Populace králíků roste s mírou $k = 0{,}05$ denně. Na začátku pozorování je 80 králíků. Kolik jich bude po 10 dnech, po 30 dnech a po 60 dnech?

- Po 10 dnech: ≈ 132 králíků
- Po 30 dnech: ≈ 359 králíků
- Po 60 dnech: ≈ 1607 králíků

Příklad 3: V nádrži s rybami populace roste s koeficientem $k = 0{,}04$ denně. Pokud je na začátku 150 ryb, kolik jich bude za 25 dní, za 60 dní a za 120 dní?

- Po 25 dnech: ≈ 408 ryb
- Po 60 dnech: ≈ 1653 ryb
- Po 120 dnech: ≈ 18226 ryb

Příklad 4: Kolonie hmyzu roste s mírou $k = 0{,}07$ denně. Na začátku máme 30 jedinců. Určete jejich počet za 40 dní, 90 dní a za 200 dní.

- Po 40 dnech: ≈ 493 jedinců
- Po 90 dnech: ≈ 16337 jedinců
- Po 200 dnech: $\approx 3,6 \cdot 10^7$ jedinců

Příklad: Poločas rozpadu radioaktivního izotopu v lékařství

Radioaktivní izotopy se běžně používají v nukleární medicíně, například pro diagnostické zobrazování nebo léčbu. Každý izotop má svůj vlastní polčas rozpadu, což je doba, za kterou se rozpadne polovina množství látky. Tento biologický model ukazuje, jak rychle se množství izotopu v těle snižuje vlivem radioaktivního rozpadu. Výpočet zbytkového množství izotopu v čase je důležitý pro stanovení bezpečné a účinné dávky léku a pro sledování hladiny záření, která zůstává v těle pacienta. Tímto způsobem se předchází nadměrnému vystavení záření a optimalizuje se efekt léčby nebo diagnostiky.

Zadání: Radioaktivní izotop s poločasem rozpadu $T_{1/2} = 5$ hodin se používá v lékařství. Na začátku je v těle pacienta 200 mg této látky. Kolik mg zůstane po 10 hodinách, po 20 hodinách a po 2 dnech (48 hodinách)?

Řešení

Pro výpočet zbylé látky po čase t použijeme vzorec:

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

kde:

- N je množství látky po čase t,
- N_0 je počáteční množství látky (zde $N_0 = 200$ mg),
- $T_{1/2}$ je poločas rozpadu (zde $T_{1/2} = 5$ hodin).

1) Množství látky po 10 hodinách

Dosadíme $t = 10$ hodin:

$$N = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{5}} = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = 200 \cdot 0{,}25 = 50 \text{ mg}$$

2) Množství látky po 20 hodinách

Dosadíme $t = 20$ hodin:

$$N = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{5}} = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = 200 \cdot 0{,}0625 = 12{,}5 \text{ mg}$$

3) Množství látky po 48 hodinách

Dosadíme $t = 48$ hodin:

$$N = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{48}{5}} \approx 0,2577 \text{ mg}$$

Závěr

Po 10 hodinách zůstane v těle pacienta přibližně 50 mg látky, po 20 hodinách 12,5 mg a po 48 hodinách přibližně 0,258 mg. Tento příklad ukazuje exponenciální pokles množství látky vlivem radioaktivního rozpadu.

Další příklady pro poločas rozpadu

Příklad 1: Radioaktivní látka s poločasem rozpadu $T_{1/2} = 6$ hodin. Na počátku je v těle pacienta 300 mg této látky. Určete množství látky po 12 hodinách, 24 hodinách a 36 hodinách.

- Po 12 hodinách: $\approx$ 75 mg
- Po 24 hodinách: $\approx$ 18,75 mg
- Po 36 hodinách: $\approx$ 4,69 mg

Příklad 2: Radioaktivní izotop s poločasem $T_{1/2} = 4$ hodiny. Na začátku je v těle pacienta 150 mg. Určete zbylé množství látky po 8 hodinách, 16 hodinách a 32 hodinách.

- Po 8 hodinách: $\approx$ 37,5 mg
- Po 16 hodinách: $\approx$ 9,38 mg
- Po 32 hodinách: $\approx$ 0,59 mg

Příklad 3: Radioaktivní látka s poločasem $T_{1/2} = 10$ hodin. Počáteční množství v těle pacienta je 500 mg. Kolik mg látky zůstane po 10 hodinách, 30 hodinách a 50 hodinách?

- Po 10 hodinách: $\approx$ 250 mg
- Po 30 hodinách: $\approx$ 62,5 mg
- Po 50 hodinách: $\approx$ 15,63 mg

Příklad 4: Radioaktivní izotop s poločasem $T_{1/2} = 8$ hodin, počáteční množství v těle je 80 mg. Určete množství látky po 16 hodinách, 40 hodinách a 64 hodinách.

- Po 16 hodinách: $\approx$ 20 mg
- Po 40 hodinách: $\approx$ 2,5 mg
- Po 64 hodinách: $\approx$ 0,31 mg

Příklad 5: Radioaktivní látka s poločasem $T_{1/2} = 3$ hodiny. Počáteční množství je 100 mg. Určete zbylé množství látky po 6 hodinách, 9 hodinách a 15 hodinách.

- Po 6 hodinách: $\approx$ 25 mg
- Po 9 hodinách: $\approx$ 12,5 mg
- Po 15 hodinách: $\approx$ 3,13 mg

Příklad: Mutace a evoluce

Mutace a evoluce jsou procesy, které se v biologii dají matematicky modelovat pomocí exponenciálních funkcí, zejména při sledování nárůstu genetických změn v populaci organismů v čase. V některých případech může být rychlost hromadění mutací úměrná počtu existujících mutací, což je situace vhodná pro exponenciální modelování.

Příklad: Hromadění mutací v bakteriální populaci

Zadání: Uvažujme populaci bakterií, ve které dochází k mutacím s konstantní mírou $m = 0,01$ (tedy 1% bakterií zmutuje za jednotku času). Na začátku je 100 bakterií bez mutací. Kolik mutovaných bakterií bude přítomno po 20 časových jednotkách?

Řešení:

Exponenciální růst mutovaných bakterií lze popsat rovnicí:

$$N_m = N_0 \cdot e^{mt}$$

kde:

- N_m je počet mutovaných bakterií po čase t,
- N_0 je počáteční počet bakterií (zde $N_0 = 100$),
- m je míra mutace (zde $m = 0,01$),
- t je čas.

Po dosazení $t = 20$ získáme:

$$N_m = 100 \cdot e^{0,01 \cdot 20} = 100 \cdot e^{0,2} \approx 122,14$$

Po 20 časových jednotkách tedy bude v populaci přibližně 122 bakterií s mutací.

Další příklady pro hromadění mutací

1. Míra mutace je $m = 0,015$ a počáteční populace je 200 bakterií.
   Po 10 časových jednotkách bude počet mutovaných bakterií přibližně 232.
2. Míra mutace je $m = 0,02$ a počáteční populace je 50 bakterií.
   Po 15 časových jednotkách bude počet mutovaných bakterií přibližně 67.
3. Míra mutace je $m = 0,005$ a počáteční populace je 300 bakterií.
   Po 25 časových jednotkách bude počet mutovaných bakterií přibližně 340.
4. Míra mutace je $m = 0,03$ a počáteční populace je 150 bakterií.
   Po 8 časových jednotkách bude počet mutovaných bakterií přibližně 191.
5. Míra mutace je $m = 0,01$ a počáteční populace je 400 bakterií.
   Po 30 časových jednotkách bude počet mutovaných bakterií přibližně 540.

Příklad: Endokrinologie

V endokrinologii se exponenciální a logaritmické funkce často používají k popisu změn koncentrace hormonů v krvi, zejména při jejich uvolňování a odbourávání. Tento proces lze modelovat jako exponenciální nárůst (uvolňování hormonu) nebo pokles (odbourávání).

Příklad: Pokles koncentrace hormonu v krvi

Zadání: Po stresové reakci se v krvi uvolní 100 ng/ml hormonu kortizolu. Koncentrace kortizolu klesá s poločasem $T_{1/2} = 4$ hodiny. Kolik kortizolu zůstane po 12 hodinách?

Řešení:

Pro výpočet zbývajícího množství hormonu po čase t použijeme vzorec:

$$C = C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

kde:

- C je konečná koncentrace hormonu po čase t,
- C_0 je počáteční koncentrace hormonu (zde $C_0 = 100$ ng/ml),
- $T_{1/2}$ je poločas hormonu (zde $T_{1/2} = 4$ hodiny),
- t je celkový čas.

Po dosazení hodnot $t = 12$ a $T_{1/2} = 4$ dostaneme:

$$C = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{4}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 100 \cdot 0,125 = 12,5\,\text{ng/ml}$$

Po 12 hodinách tedy zůstane přibližně 12,5 ng/ml kortizolu v krvi.

Další příklady pro pokles koncentrace hormonu

1. Počáteční koncentrace $C_0 = 80$ ng/ml, poločas $T_{1/2} = 3$ hodiny.
   Po 9 hodinách bude koncentrace přibližně 10 ng/ml.
2. Počáteční koncentrace $C_0 = 120$ ng/ml, poločas $T_{1/2} = 5$ hodin.
   Po 10 hodinách bude koncentrace přibližně 30 ng/ml.
3. Počáteční koncentrace $C_0 = 200$ ng/ml, poločas $T_{1/2} = 2$ hodiny.
   Po 6 hodinách bude koncentrace přibližně 25 ng/ml.
4. Počáteční koncentrace $C_0 = 150$ ng/ml, poločas $T_{1/2} = 6$ hodin.
   Po 18 hodinách bude koncentrace přibližně 18,75 ng/ml.
5. Počáteční koncentrace $C_0 = 90$ ng/ml, poločas $T_{1/2} = 8$ hodin.
   Po 16 hodinách bude koncentrace přibližně 22,5 ng/ml.

Příklad: Změna pH půdy

pH půdy je důležitým faktorem ovlivňujícím dostupnost živin pro rostliny a aktivitu půdních mikroorganismů. Půdní pH ovlivňuje chemické složení půdy, rozpustnost minerálů a schopnost rostlin absorbovat živiny. Například kyselá půda (pH pod 7) může omezit přístup k živinám, jako je fosfor, zatímco zásaditá půda (pH nad 7) může zpomalit růst rostlin kvůli snížené dostupnosti železa a manganu. Změny pH probíhají logaritmicky, což znamená, že pokles pH o 1 jednotku odpovídá desetinásobnému nárůstu koncentrace iontů vodíku (H^+) v půdě. Pochopení této logaritmické změny je klíčové při úpravách pH půdy hnojivy nebo při monitorování vlivu kyselých dešťů na ekosystémy.

Zadání: Půda má pH 6. Aplikací kyselého hnojiva se sníží pH na 5,5. O kolik se změnila koncentrace iontů H^+ v půdě?

Řešení

1. Koncentrace iontů H^+ se vypočítá podle vzorce $[H^+] = 10^{-\mathrm{pH}}$.

2. Před změnou pH byla koncentrace iontů H^+:

$$[H^+]_{\text{před}} = 10^{-6} = 1 \times 10^{-6}\,\text{mol/l}$$

3. Po změně pH na 5,5 je koncentrace iontů H^+:

$$[H^+]_{\text{po}} = 10^{-5,5} \approx 3{,}16 \times 10^{-6}\,\text{mol/l}$$

4. Změna koncentrace iontů H^+:

$$\Delta[H^+] = [H^+]_{\text{po}} - [H^+]_{\text{před}} \approx 3{,}16 \times 10^{-6} - 1 \times 10^{-6} = 2{,}16 \times 10^{-6}\,\text{mol/l}$$

Závěr

Pokles pH půdy z 6 na 5,5 zvýšil koncentraci iontů H^+ o přibližně $2{,}16 \times 10^{-6}$ mol/l, což znamená zvýšení kyselosti půdy.

Další příklady změny pH půdy

Příklad 1: Půda má pH 5, které se po aplikaci kyselého deště sníží na 4,5.

- Změna koncentrace H^+: $\approx 2{,}16 \times 10^{-5}\,\text{mol/l}$

Příklad 2: pH půdy je 7 a po aplikaci hnojiva klesne na 6,2.

- Změna koncentrace H^+: $\approx 5{,}30 \times 10^{-7}\,\text{mol/l}$

Příklad 3: pH půdy klesne z 6,5 na 5,7 po aplikaci kyselého hnojiva.

- Změna koncentrace H^+: $\approx 1{,}7 \times 10^{-6}\,\text{mol/l}$

Příklad 4: Půda s pH 5,8 má po aplikaci deště pH 5,3.

- Změna koncentrace H^+: $\approx 3{,}4 \times 10^{-6}\,\mathrm{mol/l}$

Příklad 5: pH půdy se změní z 6,8 na 6,0 po použití specifického hnojiva.

- Změna koncentrace H^+: $\approx 8{,}4 \times 10^{-7}\,\mathrm{mol/l}$

2 Logaritmické funkce v biologii

na případné chyby mě prosím upozorněte

Výpočet doby růstu bakteriální populace pomocí logaritmu

Již jsme se seznámili s exponenciálním růstem bakteriální populace pomocí vzorce $N = N_0 \cdot 2^{t/T}$, kde N_0 je počáteční počet bakterií, t je čas růstu a T je generační doba (čas potřebný k zdvojnásobení populace). Tento vzorec popisuje rychlý růst bakteriální populace v ideálních podmínkách.

Nyní použijeme tento vztah k opačnému výpočtu: pomocí logaritmu spočítáme dobu t, za kterou populace dosáhne určitého počtu bakterií, pokud známe počáteční počet bakterií a generační dobu T.

Můžeme jednoduše vyjádřit t:

$$t = T \cdot \log_2 \left(\frac{N}{N_0} \right)$$

kde:

- N je konečný počet bakterií,
- N_0 je počáteční počet bakterií,
- T je generační doba.

Příklad 1: Výpočet doby potřebné k dosažení 10 milionů bakterií

Zadání: Bakteriální populace má počáteční velikost $N_0 = 500$ bakterií a generační dobu $T = 2$ hodiny. Za jak dlouho bude populace čítat 10 milionů bakterií?

Řešení

Použijeme vzorec:

$$t = T \cdot \log_2 \left(\frac{N}{N_0} \right)$$

Dosadíme hodnoty:

$$t = 2 \cdot \log_2 \left(\frac{10\,000\,000}{500} \right)$$

1. Nejprve vypočítáme podíl $\frac{10\,000\,000}{500} = 20\,000$.

2. Poté určíme logaritmus:

$$\log_2(20\,000) \approx 14{,}29$$

3. Nakonec vypočítáme dobu:

$$t = 2 \cdot 14{,}29 \approx 28{,}58 \text{ hodin}$$

Závěr

Za přibližně 28,6 hodin dosáhne bakteriální populace 10 milionů bakterií.

Příklad 2: Výpočet doby potřebné k dosažení 5 milionů bakterií

Zadání: Bakteriální populace má počáteční velikost $N_0 = 1000$ bakterií a generační dobu $T = 1,5$ hodiny. Za jak dlouho bude populace čítat 5 milionů bakterií?

Řešení

Použijeme vzorec:

$$t = T \cdot \log_2 \left(\frac{N}{N_0} \right)$$

Dosadíme hodnoty:

$$t = 1{,}5 \cdot \log_2 \left(\frac{5\,000\,000}{1000} \right)$$

1. Nejprve vypočítáme podíl $\frac{5\,000\,000}{1000} = 5000$.

2. Poté určíme logaritmus:

$$\log_2(5000) \approx 12{,}29$$

3. Nakonec vypočítáme dobu:

$$t = 1{,}5 \cdot 12{,}29 \approx 18{,}44 \text{ hodin}$$

Závěr

Za přibližně 18,4 hodin dosáhne bakteriální populace 5 milionů bakterií.

Další příklady

Příklad 1: Počáteční populace je $N_0 = 200$ bakterií a generační doba $T = 2,5$ hodiny. Za jak dlouho populace dosáhne 2 milionů bakterií?

- Čas $t \approx 33,2$ hodin

Příklad 2: Počáteční populace je $N_0 = 1000$ bakterií a generační doba $T = 2$ hodiny. Za jak dlouho populace dosáhne 8 milionů bakterií?

- Čas $t \approx 25,9$ hodin

Příklad 3: Počáteční populace je $N_0 = 500$ bakterií a generační doba $T = 1,8$ hodiny. Za jak dlouho populace dosáhne 1 milionu bakterií?

- Čas $t \approx 19,7$ hodin

Příklad 4: Počáteční populace je $N_0 = 250$ bakterií a generační doba $T = 3$ hodiny. Za jak dlouho populace dosáhne 3 milionů bakterií?

- Čas $t \approx 40,7$ hodin

Příklad 5: Počáteční populace je $N_0 = 1500$ bakterií a generační doba $T = 1,5$ hodiny. Za jak dlouho populace dosáhne 7 milionů bakterií?

- Čas $t \approx 18,3$ hodin

Výpočet doby růstu populace

Už jsme se seznámili s exponenciálním růstem populace pomocí vzorce $N = N_0 \cdot e^{kt}$, kde N_0 je počáteční počet jedinců, t je čas a k je míra růstu. Tento vzorec se často používá k modelování růstu populace zvířat, rostlin nebo mikroorganismů za ideálních podmínek.

Logaritmická funkce nám umožňuje zjistit, za jak dlouho populace dosáhne určité velikosti. Pokud známe počáteční velikost populace, růstovou míru k a cílovou velikost populace, můžeme vypočítat dobu t pomocí následujícího vzorce:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)}{k}$$

kde:

- N je cílová velikost populace,
- N_0 je počáteční velikost populace,
- k je míra růstu.

Příklad 1: Výpočet doby potřebné k dosažení 2000 jedinců

Zadání: Populace zvířat roste s mírou růstu $k = 0{,}08$ denně. Na začátku je populace $N_0 = 200$ jedinců. Za jak dlouho bude populace čítat 2000 jedinců?

Řešení

Použijeme vzorec:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)}{k}$$

Dosadíme hodnoty:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{2000}{200}\right)}{0{,}08}$$

1. Nejprve vypočítáme podíl $\frac{2000}{200} = 10$.

2. Poté určíme logaritmus:

$$\ln(10) \approx 2{,}303$$

3. Nakonec vypočítáme dobu:

$$t = \frac{2{,}303}{0{,}08} \approx 28{,}8 \text{ dní}$$

Závěr

Za přibližně 28,8 dní dosáhne populace 2000 jedinců.

Další příklady

Příklad 1: Populace zvířat má počáteční velikost $N_0 = 150$ jedinců a míru růstu $k = 0{,}06$ denně. Za jak dlouho populace dosáhne 3000 jedinců?

- Čas $t \approx 49,9$ dní

Příklad 2: Počáteční populace je $N_0 = 250$ jedinců a míra růstu $k = 0{,}07$ denně. Za jak dlouho populace dosáhne 1500 jedinců?

- Čas $t \approx 25,6$ dní

Příklad 3: Počáteční populace je $N_0 = 400$ jedinců a míra růstu $k = 0{,}1$ denně. Za jak dlouho populace dosáhne 8000 jedinců?

- Čas $t \approx 30$ dní

Příklad 4: Populace zvířat začíná s $N_0 = 120$ jedinci a roste s mírou $k = 0{,}09$ denně. Za jak dlouho populace dosáhne 2000 jedinců?

- Čas $t \approx 31,3$ dní

Příklad 5: Počáteční populace je $N_0 = 500$ jedinců a míra růstu $k = 0{,}08$ denně. Za jak dlouho populace dosáhne 4000 jedinců?

- Čas $t \approx 26$ dní

Příklad: Růst bakteriální populace dvou typů

Zadání: Uvažujme bakteriální populaci typu A s generační dobou 2 hodiny a bakteriální populaci typu B s generační dobou 3 hodiny. Předpokládáme plynulé rozmnožování.

(a) Jak se změní počty bakterií obou typů za 1 hodinu?

(b) Za jak dlouho se počty bakterií obou typů vyrovnají, pokud je na začátku bakterií typu B o polovinu více než bakterií typu A?

(c) Kolikrát se zvětšil počet bakterií typu A do doby, než se počty obou typů vyrovnaly?

Řešení

a) Změna počtu bakterií obou typů za 1 hodinu

Pro exponenciální růst bakterií platí vzorec $N = N_0 \cdot 2^{t/T}$, kde:

- N je počet bakterií po čase t,
- N_0 je počáteční počet bakterií,
- T je generační doba.

Za 1 hodinu:

- Typ A ($T = 2$ hodiny): $N = N_0 \cdot 2^{1/2} = N_0 \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}41\, N_0$
- Typ B ($T = 3$ hodiny): $N = N_0 \cdot 2^{1/3} \approx 1{,}26\, N_0$

b) Doba do vyrovnání počtů bakterií obou typů

Počáteční počet bakterií typu B je o polovinu větší než počet bakterií typu A, tedy $N_0(B) = 1{,}5\, N_0(A)$. Po čase t se oba počty vyrovnají:

$$N_0(A) \cdot 2^{t/2} = N_0(B) \cdot 2^{t/3}$$

Dosazením $N_0(B) = 1{,}5\, N_0(A)$:

$$N_0(A) \cdot 2^{t/2} = 1{,}5\, N_0(A) \cdot 2^{t/3}$$

Zjednodušením:

$$2^{t/2} = 1{,}5 \cdot 2^{t/3}$$
$$2^{t/2 - t/3} = 1{,}5$$
$$2^{t/6} = 1{,}5$$

Po logaritmování:

$$\frac{t}{6} = \log_2 1{,}5$$
$$t \approx 3{,}5 \text{ hodin}$$

Počty bakterií se vyrovnají za 3,5 hodiny.

c) Kolikrát se zvětšil počet bakterií typu A do vyrovnání?

Počet bakterií typu A po $t \approx 3{,}5$ hodinách:

$$N_A = N_0(A) \cdot 2^{3{,}5/2} \approx 3{,}4\, N_0(A)$$

Počet bakterií typu A se do vyrovnání počtu zvětšil 3,4x.

Závěr

Do doby vyrovnání se počty bakterií typu A a B mění takto:

- (a) Za 1 hodinu se počet bakterií typu A zvýší na $\approx 1{,}41$násobek a počet bakterií typu B na $\approx 1{,}26$násobek.
- (b) Počty bakterií se vyrovnají po přibližně 3,5 hodinách.
- (c) Do této doby se počet bakterií typu A zvětší přibližně 3,4krát.

Další příklady růstu bakteriálních populací

Příklad 1: Typ A má generační dobu 1,5 hodiny a typ B 2 hodiny. Na počátku je bakterií typu B dvakrát více než typu A.

- (a) Po 1 hodině: $\approx 1{,}59$ (A), $\approx 1{,}41$ (B)
- (b) Vyrovnání: ≈ 6 hodin
- (c) Zvýšení typu A: ≈ 16násobek

Příklad 2: Typ A s generační dobou 2,5 hodiny, typ B s generační dobou 3,5 hodiny. Na počátku je bakterií typu B třikrát více než typu A.

- (a) Po 1 hodině: $\approx 1{,}32$ (A), $\approx 1{,}22$ (B)
- (b) Vyrovnání: $\approx 13{,}9$ hodin
- (c) Zvýšení typu A: $\approx 47{,}2$násobek

Příklad 3: Typ A s generační dobou 1,8 hodiny a typ B s generační dobou 2,8 hodiny. Počáteční počet bakterií typu B je 1,5násobkem počtu bakterií typu A.

- (a) Po 1 hodině: $\approx 1{,}47$ (A), $\approx 1{,}28$ (B)
- (b) Vyrovnání: $\approx 2{,}9$ hodin
- (c) Zvýšení typu A: $\approx 3{,}1$násobek

Příklad 4: Typ A má generační dobu 2 hodiny, typ B 3 hodiny. Počáteční počet bakterií typu B je o polovinu více než typu A.

- (a) Po 1 hodině: $\approx$ 1,41 (A), $\approx$ 1,26 (B)
- (b) Vyrovnání: $\approx$ 3,51 hodin
- (c) Zvýšení typu A: $\approx$ 3,38násobek

Příklad 5: Typ A má generační dobu 1 hodinu, typ B 1,5 hodiny. Na počátku je bakterií typu B dvakrát více než typu A.

- (a) Po 1 hodině: $\approx$ 2 (A), $\approx$ 1,59 (B)
- (b) Vyrovnání: $\approx$ 3 hodin
- (c) Zvýšení typu A: $\approx$ 8násobek

Příklad: Logaritmický výpočet pH

pH je měřítkem kyselosti nebo zásaditosti roztoku, přičemž vyjadřuje koncentraci iontů vodíku (H^+) v roztoku. Hodnota pH se vypočítá podle vztahu $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$, kde $[\mathrm{H}^+]$ je koncentrace vodíkových iontů v mol/l. Nižší hodnoty pH značí kyselejší roztoky (vysoká koncentrace H^+), zatímco vyšší hodnoty pH značí zásaditější roztoky (nízká koncentrace H^+). Tento logaritmický výpočet je nezbytný v biologii, protože mnoho biochemických procesů, jako je aktivita enzymů, transport iontů přes buněčnou membránu a rovnováha vnitřního prostředí organismu, je citlivá na pH. Například pH lidské krve se pohybuje mezi 7,35 a 7,45; jakákoli odchylka mimo tento rozsah může vést k závažným zdravotním problémům.

Zadání: Určete pH vodného roztoku kyseliny chlorovodíkové (HCl) s koncentrací $c = 0{,}002\,\mathrm{mol/l}$. Vypočítejte bez kalkulačky, víte-li, že $\log(2) = 0,3$.

Řešení

Pro výpočet pH použijeme vztah:

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$$

kde $[\mathrm{H}^+]$ je koncentrace iontů vodíku, v tomto případě rovna koncentraci kyseliny, tedy $[\mathrm{H}^+] = 0{,}002\,\mathrm{mol/l}$.

1. Přepíšeme koncentraci do vědeckého zápisu:

$$[\mathrm{H}^+] = 0{,}002 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol/l}$$

2. Dosadíme do vzorce:

$$\mathrm{pH} = -\log(2 \cdot 10^{-3})$$

3. Rozdělíme na dvě části:

$$\mathrm{pH} = -(\log 2 + \log 10^{-3}) = -(0{,}3 - 3) = 3 - 0{,}3 = 2{,}7$$

Závěr

pH tohoto roztoku je 2,7, což znamená, že roztok je kyselý.

Další příklady logaritmického výpočtu pH

Uvažujte $\log(2) = 0,3$, $\log(3) = 0,5$.

Příklad 1: Vodný roztok kyseliny sírové (H_2SO_4) s koncentrací $c = 0{,}001\,\mathrm{mol/l}$.

- pH ≈ 3

Příklad 2: Roztok kyseliny octové (CH_3COOH) s koncentrací $c = 0{,}0004\,\mathrm{mol/l}$.

- pH $\approx 3{,}4$

Příklad 3: Vodný roztok kyseliny dusičné (HNO_3) s koncentrací $c = 0{,}006\,\mathrm{mol/l}$.

- pH $\approx 2{,}2$

Příklad 4: Roztok kyseliny fosforečné (H_3PO_4) s koncentrací $c = 0{,}0002\,\mathrm{mol/l}$.

- pH $\approx 3{,}7$

Příklad 5: Roztok kyseliny mléčné s koncentrací $c = 0{,}009\,\mathrm{mol/l}$.

- pH ≈ 2