

Úlohy 7

Na případné chyby mě prosím upozorněte. Děkuji.

1. Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e\}$ a relace $S \subseteq M \times M$, o které víte, že obsahuje i uspořádané dvojice

$$(c, e), (b, b), (d, a), (a, b).$$

Určete výčtem celou relaci S tak, aby byla lineárním uspořádáním.

Řešení:

Aby relace S byla lineárním uspořádáním, musí být reflexivní (nebo antireflexivní v případě ostrého uspořádání), antisymetrická, tranzitivní a nesmí obsahovat neporovnatelné prvky. Začneme s danými dvojicemi $(c, e), (b, b), (d, a), (a, b)$ a doplníme další dvojice, abychom zajistili, že relace splňuje podmínky lineárního uspořádání:

$$\begin{aligned} S = \{ & (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), \\ & (a, b) \\ & (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), \\ & (d, a), (d, b), \\ & (e, a), (e, b), (e, d) \} \end{aligned}$$

Relace S splňuje všechny požadované vlastnosti lineárního uspořádání. Hasseův diagram může pomoci naší představě.



2. Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e\}$ a relace $S \subseteq M \times M$, o které víte, že obsahuje i uspořádané dvojice

$$(b, c), (c, d), (d, b), (a, a).$$

Určete výčtem celou relaci S tak, aby byla lineárním uspořádáním.

Nápověda: Relace obsahující tyto uspořádané dvojice již nemůže být lineárním uspořádáním, ověřte proč.

3. Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e\}$ a relace $S \subseteq M \times M$, o které víte, že obsahuje i uspořádané dvojice

$$(b, c), (c, d), (b, d), (a, a).$$

Určete výčtem celou relaci S tak, aby byla lineárním uspořádáním.

4. Určete všechny rozklady množiny $\{a, b, c\}$.

Řešení:

$$\{\{a, b, c\}\}, \quad \{\{a, b\}, \{c\}\}, \quad \{\{a, c\}, \{b\}\}, \quad \{\{b, c\}, \{a\}\}, \quad \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

5. Určete všechny rozklady množiny $\{1, 2, 3, 4\}$.

6. Které z množin E, F, G, H nejsou rozklady množiny $M = \{a, b, c, d, e, f\}$?

- $E = \{\{a, d\}, \{c, e, f\}, \{b\}\}$
- $F = \{\{a, b\}, \{c, e, f\}, \{a, b\}\}$
- $G = \{\{a, b, c\}, \{d, f\}\}$
- $H = \{\{a, b, c, d, e, f\}\}$

Řešení: E ano, F ne, G ne, H ano.

7. Zapište výčtem ekvivalenci, která určuje rozklad.

(a) $\{\{p, q\}, \{r, s\}\}$

(b) $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}\}$

Řešení:

$$R_a = \{(p, p), (q, q), (r, r), (s, s), (p, q), (q, p), (r, s), (s, r)\}$$

$$R_b = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (5, 6), (6, 5)\}$$

8. Zapište výčtem ekvivalenci, která určuje rozklad.

(a) $\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$

(b) $\{\{5\}, \{6\}, \{7\}\}$

9. Zapište rozklad množiny $M = \{x \in \mathbb{N}; n < 32\}$ indukovaný ekvivalencí $E = \{(a, b) \in M \times M, a \text{ dává stejný zbytek po dělení sedmi jako } b\}$.

Řešení:

$$\{0, 7, 14, 21, 28\},$$

$$\{1, 8, 15, 22, 29\},$$

$$\{2, 9, 16, 23, 30\},$$

$$\{3, 10, 17, 24, 31\},$$

$$\{4, 11, 18, 25\},$$

$$\{5, 12, 19, 26\},$$

$$\{6, 13, 20, 27\}$$

10. Zapište rozklad množiny $M = \{x \in \mathbb{N}; n \leq 20\}$ indukovaný ekvivalencí $E = \{(a, b) \in M \times M, a \text{ a } b \text{ mají stejnou paritu}\}$.
11. Rozhodněte, zda relace $R = \{(k, m), (k, h), (k, g), (m, h), (m, g), (h, g)\}$ je uspořádáním na množině $M = \{g, h, k, m\}$. Pokud je uspořádáním, načrtněte Hasseův diagram. Pokud je to možné, určete nejmenší a největší prvek.

Řešení:

Ano, relace je antireflexivní, silně antisymetrická, tranzitivní a trichotomická (vlastnosti ověřte!), jde o ostré lineární uspořádání. Hasseův diagram:



Nejmenší prvek je g , největší prvek je k .

12. Rozhodněte, zda relace $R = \{(x, y), (x, z), (y, z), (y, w), (z, w)\}$ je uspořádáním na množině $M = \{x, y, z, w\}$. Pokud je uspořádáním, načrtněte Hasseův diagram a pokud je to možné, určete nejmenší a největší prvek. Pokud není uspořádáním, doplňte ji tak, aby uspořádáním byla a postupujte stejným způsobem.
13. Je dána relace $R = (1, 2), (2, 5)$ na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Doplňte relaci R tak, aby
- relace R byla ekvivalencí na množině M .
 - relace R byla lineární uspořádáním na množině M .
 - relace R byla uspořádáním na množině M , které není lineární.
 - relace R byla trichotomická.
 - relace R byla zobrazením.

Řešení:

- **Relace R jako ekvivalence:**

Aby relace R byla ekvivalencí, musí být reflexivní, symetrická a tranzitivní. Doplňme relaci R o potřebné dvojice:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (2, 5), (5, 2), (1, 5), (5, 1)\}$$

Řešení není jediné.

- **Relace R jako lineární uspořádání:**

Aby byla relace R lineárním uspořádáním, musí být reflexivní (nebo antireflexivní), antisymetrická, tranzitivní a nesmí obsahovat neporovnatelné prvky. Doplníme relaci:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

Řešení není jediné.

- **Relace R jako uspořádání, které není lineární:**

Aby byla relace R uspořádáním, které není lineární, musí být reflexivní (nebo antireflexivní), antisymetrická a tranzitivní, ale musí obsahovat neporovnatelné prvky. Tedy například:

$$R = \{(1, 2), (2, 5), (1, 5)\}$$

Opět se nejedná o jediné řešení.

- **Relace R jako trichotomická:**

Aby relace R byla trichotomická, musí pro všechny prvky $a, b \in R$ platit právě jedna z možností: $a = b$ nebo aRb nebo bRa . Pokud je relace ostré lineární uspořádání, pak už je trichotomická, můžeme tedy využít relaci z úlohy lineárního uspořádání:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

Trichotomická relace však nevyžaduje tranzitivitu, tedy pokud bychom prohodili některé prvky z prvního místa na druhé a naopak, relace už by nemusela být tranzitivní, ale stále by byla trichotomická.

- **Relace R jako zobrazení:**

Relace již je zobrazení, každému prvku z prvního oboru relace náleží právě jeden prvek z množiny M .

14. Je dána relace $R = (a, b), (b, c)$ na množině $M = \{a, b, c, d, e\}$. Doplněte relaci R tak, aby

- relace R byla ekvivalencí na množině M .
- relace R byla lineární uspořádáním na množině M .
- relace R byla uspořádáním na množině M , které není lineární.
- relace R byla trichotomická.
- relace R byla zobrazením.

15. Je dána množina $M = \{e, f, g\}$. Dále jsou dány relace

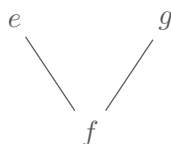
- $R_0 = \{(e, f), (g, f)\}$
- $R_1 = \{(e, f), (g, f), (g, g)\}$
- $R_2 = \{(e, f), (g, f), (g, g), (e, e), (f, f)\}$
- $R_3 = \{(e, f), (g, f), (g, e)\}$

Určete, které z výše uvedených relací jsou uspořádání, a své rozhodnutí patřičně zdůvodněte. U uspořádání načrtněte jak uzlový graf, tak Hasseův diagram. Dále rozhodněte, která z uspořádání jsou ostrá, neostrá, lineární.

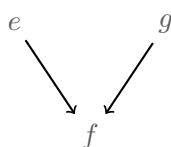
Nápověda:

- R_0 je ostré uspořádání, není lineární (neobsahuje (e, g) ani (g, e)). Je antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní (ověřte vlastnosti).

Hasseův diagram:



Uzlový graf:



- R_1 není uspořádání, není reflexivní ani antireflexivní (uvedte protipříklady).
- R_2 je neostré uspořádání, není lineární (neobsahuje (e, g) ani (g, e)). Je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (ověřte vlastnosti).
- R_3 je ostré lineární uspořádání, je antireflexivní, antisymetrická, tranzitivní a trichotomická (ověřte vlastnosti).

16. Je dána množina $M = \{m, n, o\}$. Dále jsou dány relace

- $R_0 = \{(m, n), (n, o)\}$
- $R_1 = \{(m, m), (n, n), (o, o)\}$
- $R_2 = \{(m, m), (n, n), (o, o), (n, m), (n, o), (o, m)\}$
- $R_3 = \{(o, n), (n, m), (o, m)\}$

Určete, které z výše uvedených relací jsou uspořádání, a své rozhodnutí patřičně zdůvodněte. U uspořádání načrtněte jak uzlový graf, tak Hasseův diagram. Dále rozhodněte, která z uspořádání jsou ostrá, neostrá, lineární.

17. Je dána množina $M = \{e, f, g\}$. Určete počet

- všech uspořádání množiny M ,
- všech lineárních uspořádání množiny M .

Nápověda: Využijte Hasseův diagram a nakreslete si možnosti. Nezapomeňte, že uspořádání může být ostré, nebo neostré. Může být celkem 38 různých uspořádání, z toho 12 lineárních uspořádání.

18. Najděte chybu v následujícím důkazu, že jestliže je nějaká relace R na množině M symetrická a tranzitivní, pak už musí být i reflexivní:

Nechť $a \in M$. Vezměme $b \in M$ takové, aby aRb . Ze symetrie pak musí být bRa a následně z tranzitivity plyne $aRb \wedge bRa \Rightarrow aRa$. Tedy R musí být reflexivní.

19. Je dáno zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = x^2$. Rozhodněte, zda je f
- bijektivní zobrazení množiny **na** množinu?
 - bijektivní zobrazení množiny **do** množiny?
 - prosté zobrazení?