UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Základy matematiky KMA/ZAM

Teoretické základy informatiky I KI/TZI1

Přednáška 11

Různé číselné soustavy

jiri.cihlar@ujep.cz

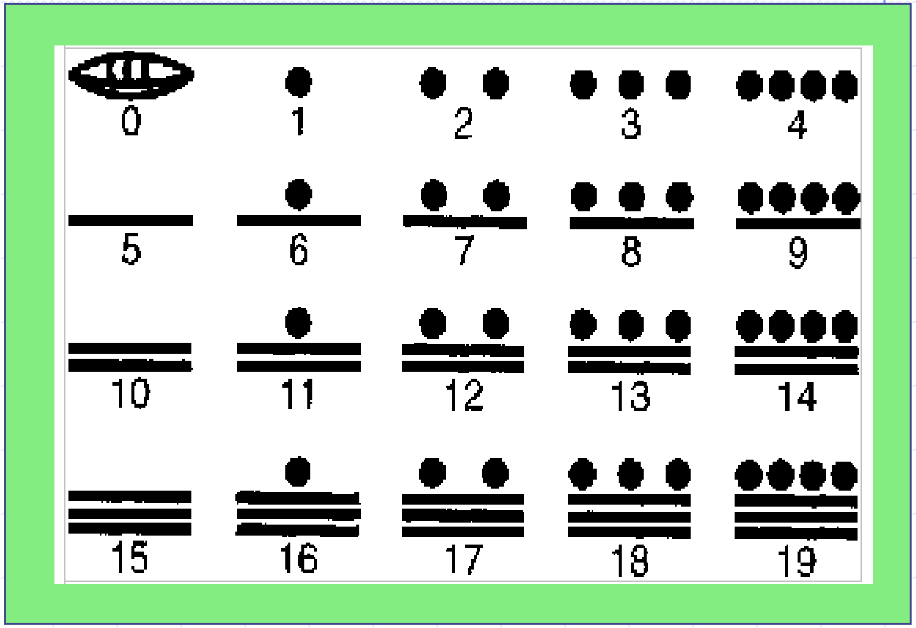
O čem budeme hovořit:

- Mayové a Římané
- Princip pozičních soustav
- Zápisy čísel v různých soustavách
- Kritéria dělitelnosti
- Základní operace s čísly
- Převody mezi soustavami

Mayové a Římané

Zápisy čísel

Mayové používali pro prvních několik přirozených čísel zápisy složené z vodorovných úseček a kroužků, jak ukazuje obrázek.



Uměli však pracovat i s velmi velikými čísly, jak dosvědčuje jejich známý cyklický kalendář.

Základem jejich číselné soustavy bylo číslo 60.

Mayský kalendář

Výchozím dnem pátého cyklu mayského kalendáře byl 11. srpen 3114 př. n. l. a poslední den připadl na 21. prosinec 2012. V tento den měl podle Mayů nastat konec aktuálního světa.

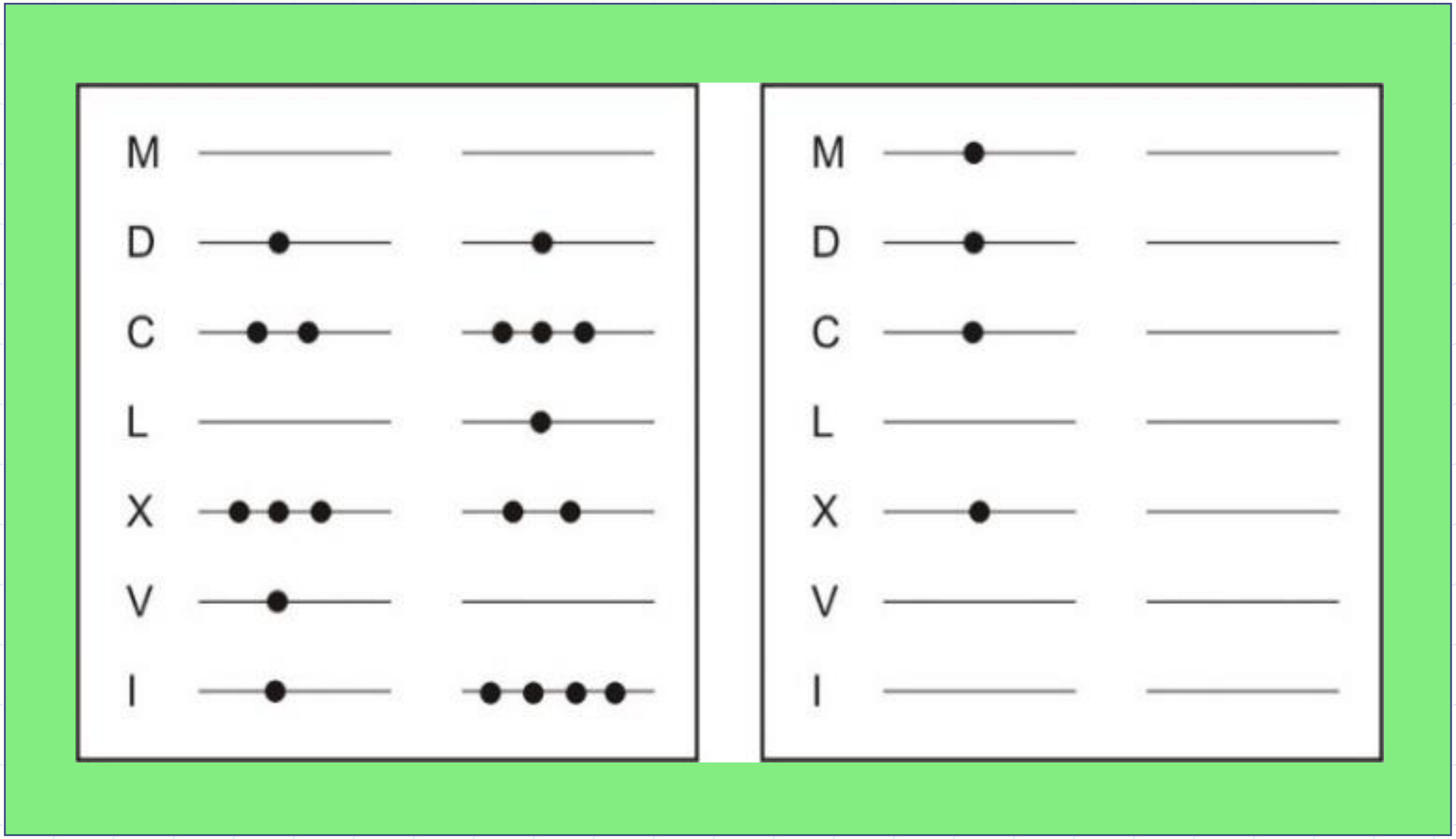
V kalendáři se používají pro měření času následující jednotky:

kin = den
uinal = 20 kin
tun = 18 uinal = 360 kin ≈ 1 rok
katun = 20 tun = 7200 kin ≈ 20 let

Výpočty kalendáře jsou srovnatelné s výsledky novověké astronomie.

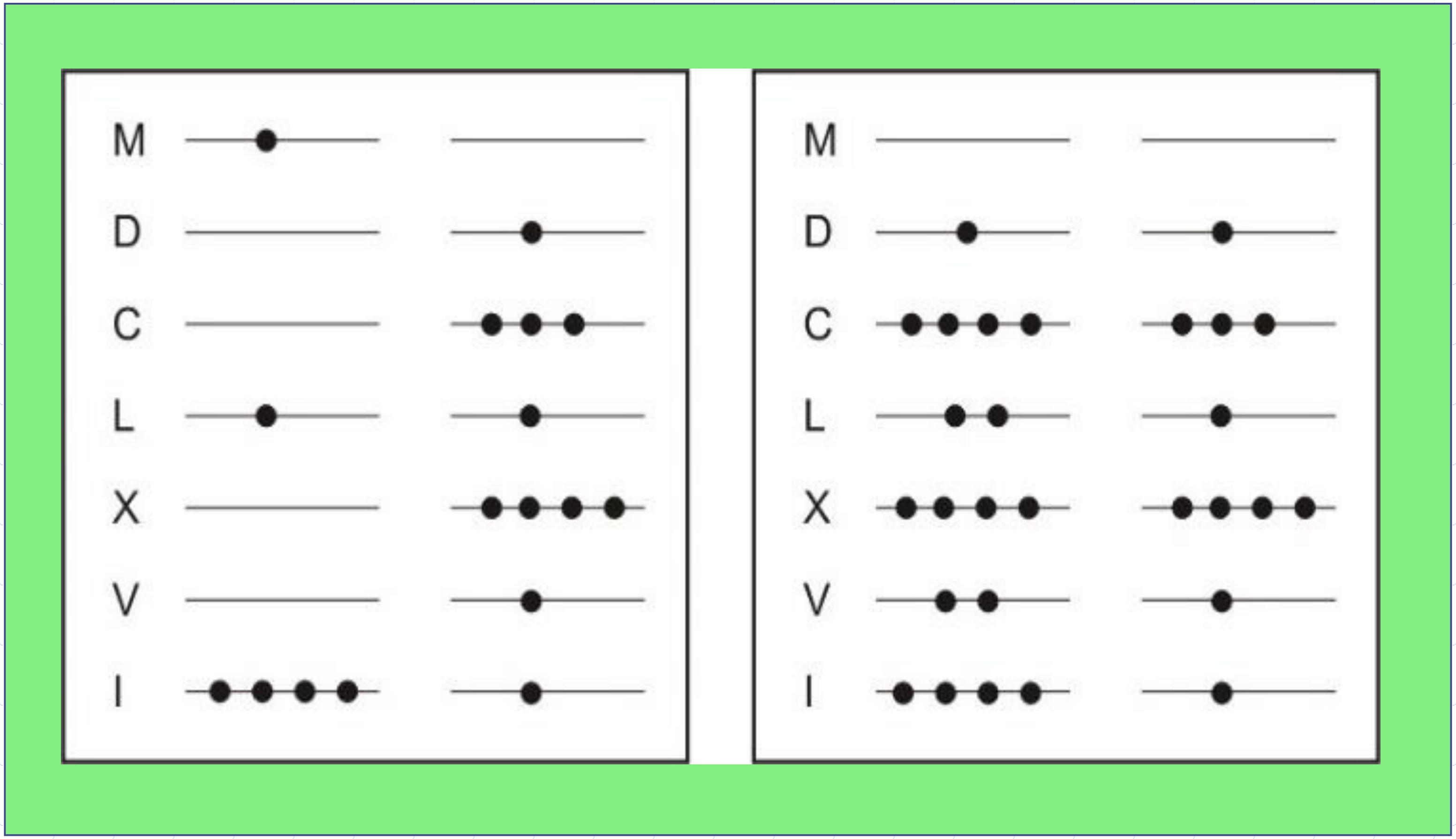
Sčítání čísel na římském abaku

Výpočet součtu čísel 736 a 874.



Odčítání čísel na římském abaku

Výpočet rozdílu čísel 1054 a 896.



Násobení čísel

Římané praktikovali při násobení techniku „zdvojování“. I když byl jejich zápis čísel těžkopádný, dvojnásobek čísla se vytvořil snadno – v nezkráceném zápise čísla se počet každého znaku zdvojnásobil.

Příklad: dvojnásobkem čísla VI bylo číslo VVII = XII.

Když se tato operace zdvojování opakovala, mohli získat čtyřnásobek daného čísla, osminásobek, atd. Libovolný násobek se pak vypočítával výběrem vhodných násobků a jejich sečtením, jak ukazuje následující příklad:

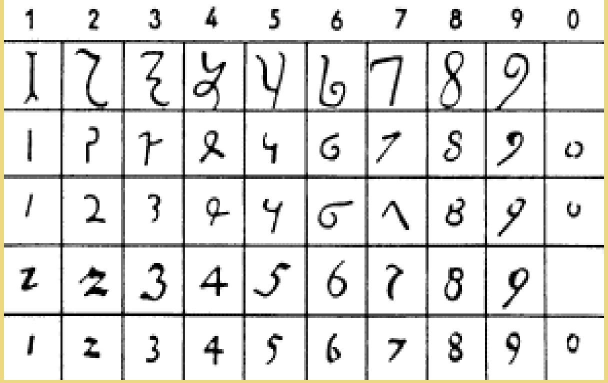
$$13 \cdot a = (8 + 4 + 1) \cdot a = 8 \cdot a + 4 \cdot a + a$$

Princip pozičních soustav

Arabské číslice

Vynálezci nejrozšířenějšího systému pro reprezentaci čísel – tzv. desítkové číselné soustavy – jsou Indové. Začali ji používat mezi 1. a 4. stoletím, později ji přijali matematici Persie a dalších arabských zemí, a prostřednictvím arabských obchodníků se později soustava rozšířila do Evropy vrcholného středověku (proto často hovoříme o „arabských číslicích“).

Rukopis z konce 10. století
Rukopis z počátku 12. století
Rukopis z poloviny 15. století
Číslice A. Dürrera
Kniha z konce 15. století



Poziční soustavy

V pozičních číselných soustavách může stejná číslice představovat různou hodnotu, záleží na pozici, kterou v zápise zaujímá.

$$
\begin{aligned}
3545 &= 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1 \\
&= 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0
\end{aligned}
$$

V číselné soustavě o základu z se používají číslice od 0 do $z-1$ a definujeme

$$
(c_n c_{n-1} \cdots c_2 c_1 c_0)_z = \\
= c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + c_2 \cdot z^2 + c_1 \cdot z^1 + c_0 \cdot z^0
$$

Příklady

$$(214)_5 = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 =$$
$$= 2 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = (59)_{10}$$

$$(1202)_3 = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 =$$
$$= 1 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = (47)_{10}$$

$$(10101)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
$$= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = (21)_{10}$$

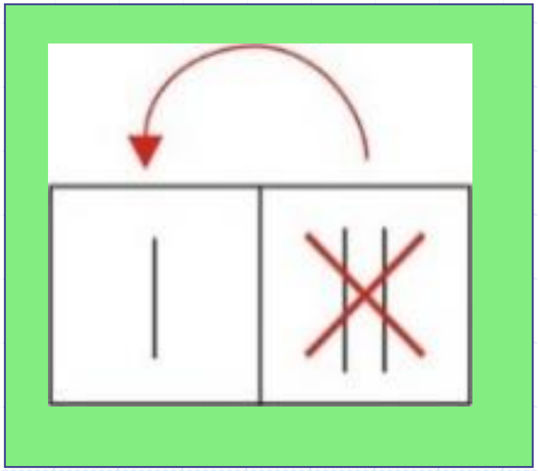
Zápisy čísel v různých soustavách

„Minicomputer“

Je to vodorovná řada navzájem sousedících polí tvaru čtverce, do nichž budeme umísťovat vhodné předměty, například zápalky či párátka.

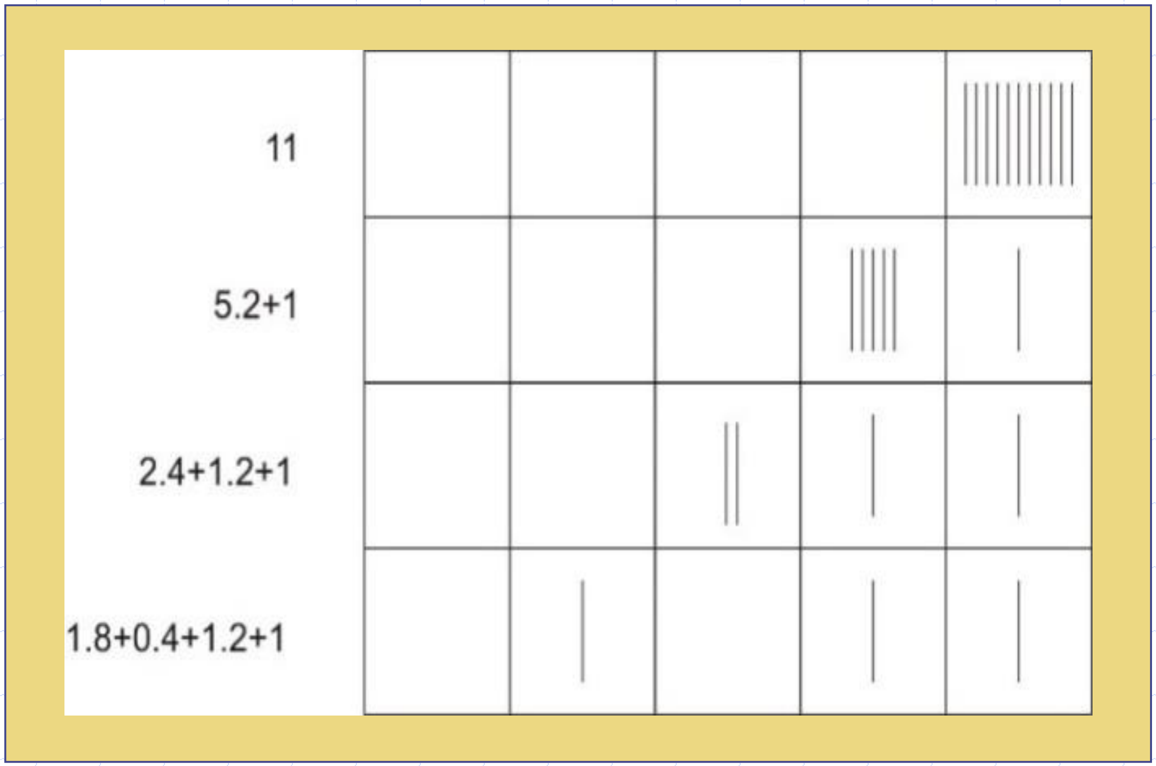
Když hledáme zápis čísla ve dvojkové soustavě, přijmeme následující herní pravidlo:

dvě zápalky v nějakém poli můžeme nahradit jednou zápalkou na poli, které je těsně vlevo.



Příklad a algoritmus

Hledáme zápis čísla 11 ve dvojkové soustavě:



$11 : 2 = 5\ (1)$

$5 : 2 = 2\ (1)$

$2 : 2 = 1\ (0)$

$1 : 2 = 0\ (1)$

$$(11)_{10} = (1011)_2$$

Zápisy čísel v jiných soustavách

Desítková soustava	Dvojková soustava	Trojková soustava	Čtyřková soustava	Pětková soustava	Šestková soustava	Sedmičková soustava	Osmičková soustava	Devítková soustava
00	000000	0000	000	000	000	000	00	00
01	000001	0001	001	001	001	001	01	01
02	000010	0002	002	002	002	002	02	02
03	000011	0010	003	003	003	003	03	03
04	000100	0011	010	004	004	004	04	04
05	000101	0012	011	010	005	005	05	05
06	000110	0020	012	011	010	006	06	06
07	000111	0021	013	012	011	010	07	07
08	001000	0022	020	013	012	011	10	08
09	001001	0100	021	014	013	012	11	10
10	001010	0101	022	020	014	013	12	11

Kritéria dělitelnosti

Pravidla posledních číslic

V desítkové číselné soustavě platí, že je-li poslední číslice rovna nule, pak je číslo dělitelné deseti. Je-li poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi, je číslo dělitelné čtyřmi, atd.

Tato pravidla se zobecní snadno pro jiné číselné soustavy. Podmínka o nulové poslední číslici implikuje závěr, že číslo je dělitelné základem soustavy z. Pravidlo o posledním dvojčíslí se dá obecně formulovat tak, že je-li poslední dvojčíslí čísla dělitelné číslem d, kde $d \mid z^2$, pak je i celé číslo dělitelné číslem d. Podobně se naleznou kritéria pro poslední trojčíslí, atd.

Pravidla ciferného součtu

Pravidlo ciferného součtu pro desítkovou číselnou soustavu můžeme odvodit tímto postupem:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0 =} \\
&\qquad \boldsymbol{= c_2 \cdot (99 + 1) + c_1 \cdot (9 + 1) + c_0 =} \\
&\qquad \boldsymbol{= c_2 \cdot 99 + c_1 \cdot 9 + (c_2 + c_1 + c_0)}
\end{aligned}
$$

Protože součet dvou prvních sčítanců je dělitelný číslem 9 (a tedy i číslem 3), stačí k tomu, aby bylo dané číslo dělitelné devíti (resp. 3) jen to, aby byl ciferný součet v závorce dělitelný devíti (resp. 3).

Pravidla ciferného součtu obecně

Udělejme obecnou úvahu:

$$\boldsymbol{c_2 \cdot z^2 + c_1 \cdot z^1 + c_0 \cdot z^0 =}$$
$$\boldsymbol{= c_2 \cdot (z^2 - 1 + 1) + c_1 \cdot (z - 1 + 1) + c_0 =}$$
$$\boldsymbol{= c_2 \cdot (z^2 - 1) + c_1 \cdot (z - 1) + (c_2 + c_1 + c_0)}$$

Protože všechny výrazy $(\boldsymbol{z^n - 1})$ jsou dělitelné výrazem $(\boldsymbol{z - 1})$, je i součet dvou prvních sčítanců je dělitelný číslem $(\boldsymbol{z - 1})$, a pochopitelně i všemi děliteli $\boldsymbol{d}$ čísla $(\boldsymbol{z - 1})$. Pravidlo ciferného součtu tedy platí pro všechny dělitele $\boldsymbol{d}$ čísla $(\boldsymbol{z - 1})$.

Příklady

Libovolné číslo tvaru $(\cdots 20)_6$ je dělitelné dvanácti, protože $(20)_6$ je dvanáct, a 12 je dělitelem $6^2 = 36$.

Libovolné číslo tvaru $(\cdots 201)_3$ není dělitelné ani deseti, ani pěti, protože $(201)_3$ je 10, a ani 10, ani 5 nejsou děliteli čísla $3^3 = 27$.

Číslo $(31242)_5$ je dělitelné čtyřmi, protože ciferný součet je 12, a 12 je dělitelné čtyřmi.

Číslo $(702105)_9$ není dělitelné čtyřmi, protože ciferný součet je 15, a 15 není dělitelné osmi.

Převody mezi soustavami

Převody z dvojkové soustavy

Snadno se odůvodní tento postup, který převádí dvojkový zápis čísla do zápisu ve čtyřkové soustavě:

- Číslice ve dvojkovém zápise rozdělíme odzadu do skupin po dvou.
- Zápis ve čtyřkové soustavě získáme tak, že každou skupinu nahradíme číslem, jehož dvojkový zápis představuje daná skupina.

Příklad: $(11001110011)_2 =$ 1/10/01/11/00/11

$= (121303)_4$ 1/ 2 / 1 / 3 / 0 / 3

Jaký zápis dostaneme, pokud číslice rozdělíme do skupin po třech?

Šestnáctková číselná soustava

Šestnáctková číselná soustava používá 16 číslic, kde prvních 10 z nich (0 až 9) mají stejný význam jako v desítkové soustavě, a přibývají navíc číslice A až F s hodnotami 10 až 15.

Postup, který převádí dvojkový zápis čísla do zápisu v šestnáctkové soustavě je tento:

- Číslice ve dvojkovém zápise rozdělíme odzadu do skupin po čtyřech.
- Zápis ve šestnáctkové soustavě získáme tak, že každou skupinu nahradíme číslem, jehož dvojkový zápis představuje daná skupina.

Další převody mezi soustavami

Převody zápisu z dvojkové do čtyřkové, osmičkové a šestnáctkové vypadají tedy takto:

$$(11110010110111)_2 = (3302313)_4 = \\ = (36267)_8 = (3CB7)_{16}$$

Problémy:

- Dokážete přejít ze čtyřkové rovnou do šestnáctkové soustavy?
- Jak přejdeme z trojkové do devítkové soustavy?

Základní operace s přirozenými čísly ve dvojkové číselné soustavě

Jak sčítáme v desítkové soustavě?

Při písemném sčítání dvou sčítanců postupujeme takto:

$$\begin{array}{r} 58476 \\ 15618 \\ \hline 76094 \end{array}$$

V řádu jednotek říkáme „osm a šest je čtrnáct“ – představíme si tedy 14 – ale zapisujeme jen 4 a jednu desítku připočteme do vyššího řádu.

Podobně pak postupujeme i ve vyšších řádech.

Sčítání ve dvojkové soustavě

Ve dvojkové číselné soustavě postupujeme obdobně, ale situace je zde jednodušší, protože součet v jednom řádu (i s případným přenosem jedničky z nižšího řádu) může nabývat hodnot pouze 0, 1, 2, 3.
Pokud je 0 nebo jedna, pak pouze zapíšeme výsledek. Je-li součet 2 nebo 3, pak si představujeme zápisy ve dvojkové soustavě, tedy $(10)_2$ nebo $(11)_2$, zapisujeme ale jen poslední číslici a přenášíme jedničku do vyššího řádu.

$$
\begin{array}{r}
1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1 \\
1\,0\,1\,1\,0\,1\,0 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1
\end{array}
$$

Variantní odčítání v desítkové soustavě

Tento postup využívá tzv. desítkový doplněk. Ten k danému číslu vytvoříme tak, že součet číslic daného čísla a doplňku je v každém řádu 9.

Příklad: K číslu 5084361 je doplněk 4915638 .

Variantní odčítání má tento postup: Zarovnáme čísla na stejný počet číslic, menšenec nahradíme jeho doplňkem, pak obě čísla sečteme, a nakonec první jedničku kruhovým přenosem převedeme do řádu jednotek.

$$\begin{array}{r} 7\,5\,9\,1 \\ -\ \ 0\,8\,0\,4 \\ \hline 6\,7\,8\,7 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7\,5\,9\,1 \\ +\ \ 9\,1\,9\,5 \\ \hline 1\,6\,7\,8\,6 \\ 1 \\ \hline 6\,7\,8\,7 \end{array}$$

Odčítání ve dvojkové soustavě

U dvojkové číselné soustavy používáme dvojkový doplněk, který k danému číslu vytvoříme tak, že pouze zaměníme nuly a jedničky.

Příklad

Ve dvojkové soustavě vypočteme rozdíl 58 – 13 = 45 .

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,0\,1\,0 \\ -\ 0\,0\,1\,1\,0\,1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,1\,1\,0\,1\,0 \\ +\ 1\,1\,0\,0\,1\,0 \\ \hline 1\,1\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 1 \\ \hline 1\,0\,1\,1\,0\,1 \end{array}$$

Násobení ve dvojkové soustavě

Když si představíme písemné násobení, je patrné, že násobení lze realizovat pouze „posouváním“ čísla a opakovaným sčítáním (není třeba umět násobilku).

Příklad:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & \times & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Zápisy čísel, která nejsou celá

Zobecnění zápisu čísel

V pozičních číselných soustavách můžeme zapisovat i čísla, která nejsou celá pomocí definice, která je zobecněním té, kterou jsme používali u přirozených čísel:

$$(c_n c_{n-1} \cdots c_1 c_0 , c_{-1} c_{-2} c_{-3} \ \cdots)_z =$$

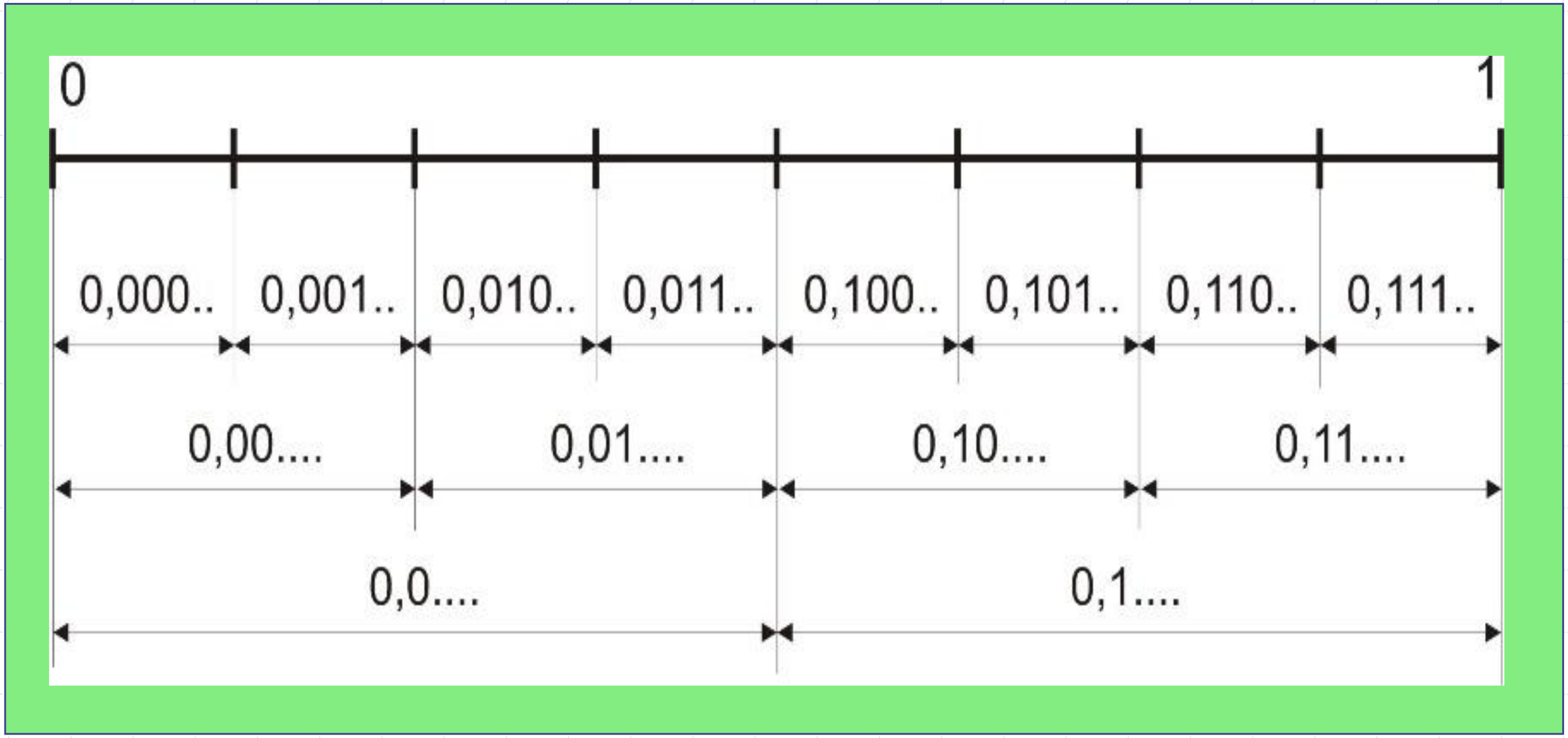
$$= c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots c_1 \cdot z^1 + \ c_0 \cdot z^0 \ +$$

$$+ c_{-1} \cdot z^{-1} + c_{-2} \cdot z^{-2} + c_{-3} \cdot z^{-3} + \cdots$$

Příklad: $(10{,}101)_2 = \ (2{,}625)_{10}$

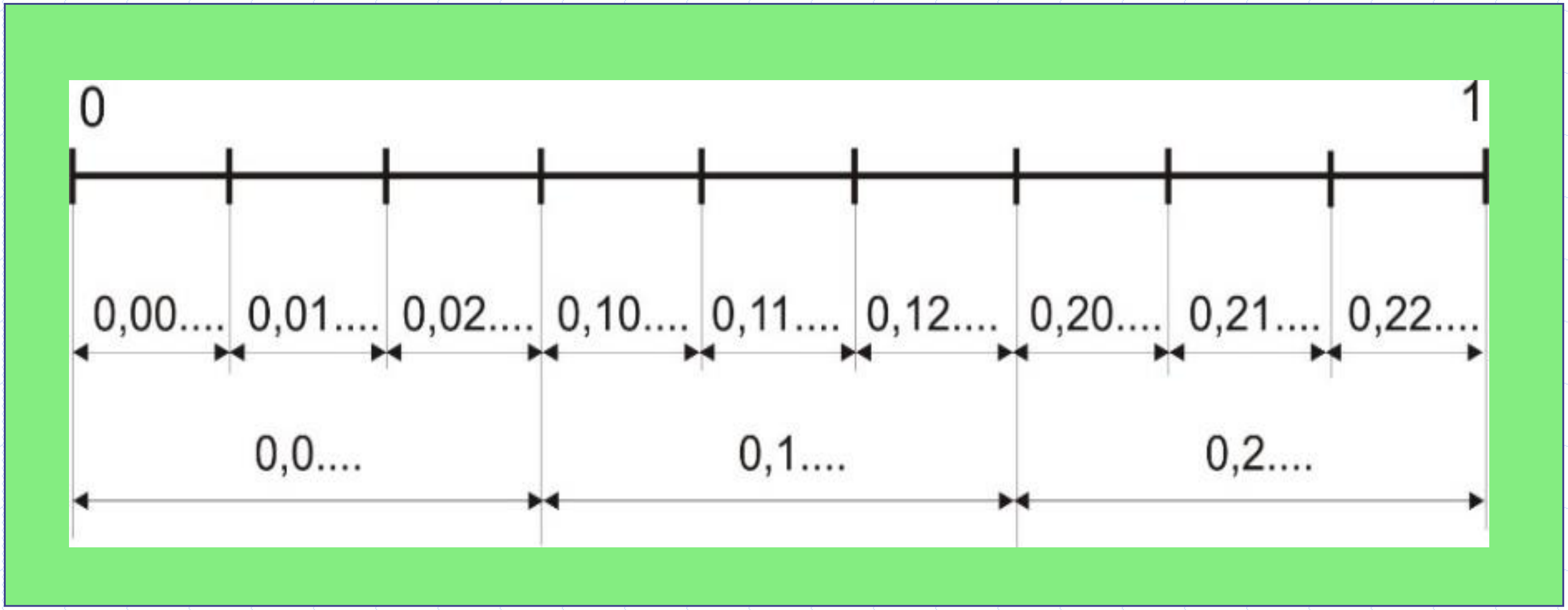
Dvojkový zápis a číselná osa

Představu o dvojkovém zápisu čísla získáme pomocí postupného dělení intervalu (0;1) na poloviny, čtvrtiny, osminy, atd.



Trojkový zápis a číselná osa

Představu o trojkovém zápisu čísla získáme pomocí postupného dělení intervalu (0;1) na třetiny, devítiny, atd.



Z obrázku je například vidět, že $(0{,}5)_{10} = (0{,}\overline{1})_3$.

Algoritmus nalezení číslic za čárkou

Číslice za čárkou získáváme postupně tak, že číslo v desítkové soustavě násobíme základem soustavy z, a sepisujeme celé části výsledků tedy číslice před desetinnou čárkou.

Číslo	Dvojnásobek	Celá část (číslice)		Číslo	Dvojnásobek	Celá část (číslice)
0,84375	1,6875	1		0,6	1,2	1
0,6875	1,375	1		0,2	0,4	0
0,375	0,75	0		0,4	0,8	0
0,75	1,5	1		0,8	1,6	1
0,5	1	1		0,6	1,2	1
0	0	0		0,2	0,4	0

$(0{,}84375)_{10} = (0{,}11011)_2$ $(0{,}6)_{10} = (0{,}\overline{1001})_2$

Co je třeba znát a umět?

- Znát princip zápisu přirozených čísel v různých číselných soustavách,
- rozumět kritériím dělitelnosti v různých číselných soustavách,
- umět ve vhodných případech převádět zápisy z jedné soustavy do jiné,
- umět operovat s přirozenými čísly v různých číselných soustavách,
- rozumět zápisům necelých čísel v různých číselných soustavách.

Děkuji za pozornost