DR 1. řádu – úlohy

Rovnice se separovanými proměnnými

1) $y' = xy$
2) $(y - \sin x)y' = \frac{y}{x}(y - \sin x)$
3) $y' = \sqrt[3]{y^2}$

Přepíšeme $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$*, rovnici upravíme tak, aby každá strana obsahovala pouze jednu proměnnou, a integrujeme levou a pravou stranu rovnice.*

Výsledky:

1) obecné řešení $y_o = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$;
2) obecné řešení $y_o = Cx$, výjimečné řešení $y_v = \sin x$;
3) obecné řešení $y_o = \frac{1}{27}(x + C)^3$, kde $x \geq -C$.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

1) $y' - \frac{2}{x+1}y = (x + 1)^3$
2) $y' + 2y - \mathrm{e}^{3x} = 0$

Neprve řešíme rovnici jako homogenní, poté provedeme variaci konstanty.

Výsledky:

1) obecné řešení $y_o = (\frac{x^2}{2} + x + C)(x + 1)^2$;
2) obecné řešení $y_o = (\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + C)\mathrm{e}^{-2x}$.

Bernoulliho rovnice

1) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}$
2) $xy' - 4y = x\sqrt{y}$

Nejprve provedeme substituci $z = y^{1-n}$ *a upravíme na rovnici, která obsahuje pouze proměnné* z *a* x*, následně řešíme jako lineární diferenciální rovnici prvního řádu.*

Výsledky:

1) obecné řešení $y_o = \pm\sqrt{2x^3 + Cx^2}$, $x \leq \frac{C}{2}$;
2) obecné řešení $y_o = (-\frac{1}{2}x + Cx^2)^2$, výjimečné řešení $y_v = 0$.

Úlohy s počáteční podmínkou

1) $y' = 2x, \quad y(1) = 2$
2) $y' + 2\sqrt{y} = 0, \quad y(0) = 1$
3) $y' + 2\sqrt{y} = 0, \quad y(3) = 0$

Nejprve vyřešíme diferenciální rovnici a do jejího obecného řešení dosadíme bod z podmínky – hledáme konstantu C.

Výsledky:

1) partikulární řešení $y_p = x^2 + 1$;
2) partikulární řešení $y_p = (-x+1)^2$, kde $x \leq 1$;
3) partikulární řešení $y_p = (-x+3)^2$, kde $x \leq 3$ a $y_p = 0$.

Úlohy na procvičení

1) $y' + \frac{y}{x \ln x} = 1$
2) $y' = -(x)^{-1}(x+y)$
3) $y' - 2xy = 2x^3y^2$
4) $y' - \cos x - \frac{1}{1+x^2} = 0, \quad y(1) = 2$
5) $x^2y' + xy = \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}$

Rovnice 1) a 4) jsou rovnice se separovanými proměnnými, rovnice 2) a 5) jsou lineární diferenciální rovnice prvního řádu, rovnice 3) je Bernoulliova rovnice. Úlohy 4) a 5) mají počáteční podmínku.

Výsledky:

1) obecné řešení $y_o = \frac{x \ln x - x + C}{\ln x}$, $x > 0$;
2) obecné řešení $y_o = -\frac{x}{2} + \frac{C}{x}$, $x \neq 0$;
3) obecné řešení $y_o = \frac{1}{1 - x^2 + C\mathrm{e}^{-x^2}}$, kde jmenovatel zlomku je nenulový, výjimečné řešení $y_v = 0$;
4) partikulární řešení $y_p = \sin x + \operatorname{arctg} x + 2 - \sin 1 - \frac{\pi}{4}$;
5) partikulární řešení $y_p = \frac{\frac{\ln^2 x}{2} + \frac{1}{2}}{x}$, $x > 0$.