
Seminář řešení matematických více méně středoškolských úloh

Zadání úloh

Zadání: Uvažme následující posloupnosti celých čísel:

- První posloupnost je 1.
- Nechť M je největší číslo v n-té posloupnosti; pak $(n+1)$-ní posloupnost je tvaru: [celková četnost čísel 1 v n-té posloupnosti], 1, [celková četnost čísel 2 v n-té posloupnosti], 2, [celková četnost čísel 3 v n-té posloupnosti], 3,..., [celková četnost čísel M v n-té posloupnosti], M.

Dostáváme tyto posloupnosti:
1
$1, 1$
$2, 1$
$1, 1, 1, 2$
$3, 1, 1, 2$
$2, 1, 1, 2, 1, 3$
$3, 1, 2, 2, 1, 3$
atd.

Délku (tj. počet členů) n-té posloupnosti označme d_n. Máme $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 2, d_4 = 4, d_5 = 4, d_6 = 6, d_7 = 6, \ldots$.

Je posloupnost d_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ shora omezená?

Zadání: Dokažte, že pokud jsou a, b, c strany trojúhelníku, pak platí:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

kde S je obsah trojúhelníku. Rovnost nastává právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Zadání:

1. Nechť p je prvočíslo. Dokažte, že mezi jeho násobky existuje číslo, které lze v desítkové číselné soustavě zapsat pouze pomocí jedné číslice (např. pouze pomocí jedniček, resp. dvojek, trojek, atd.).

   Příklad: Mezi násobky čísla 13 existuje číslo $555555 = 42735 \cdot 13$, resp. číslo $888888 = 68376 \cdot 13$.

2. Dokážete uvedené tvrzení zobecnit v tom smyslu, že naleznete i jiná čísla než prvočísla, která však mají tutéž vlastnost?

Zadání: V rovině jsou dány dva body S a A. Popište, jak pomocí pravítka a kružítka v dané rovině sestrojíte pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ se středem S. Na pravítku nejsou žádné značky pro měření.