Teoretická aritmetika – úlohy k procvičení – 7.12.2020 – řešení

1. Sestrojte formuli $D(x, y, z)$ Peanovy aritmetiky s významem "číslo x je největší společný dělitel čísel y a z".

   Řešení. Ukážeme 2 varianty řešení:

   (a) $D(x, y, z)$ je formule

   $$(\exists u)\ y = xu \wedge (\exists v)\ z = xv \wedge (\forall w)\ ((\exists p)\ y = wp \wedge (\exists q)\ z = wq \Longrightarrow (\exists s)\ x = ws)$$

   (b) $D(x, y, z)$ je formule

   $$(\exists u)\ y = xu \wedge (\exists v)\ z = xv \wedge (\forall w)\ ((\exists p)\ y = wp \wedge (\exists q)\ z = wq \Longrightarrow w \leq x)$$

   tj. $D(x, y, z)$ je formule

   $$(\exists u)\ y = xu \wedge (\exists v)\ z = xv \wedge (\forall w)\ ((\exists p)\ y = wp \wedge (\exists q)\ z = wq \Longrightarrow (\exists s)\ w + s = x)$$

2. K abecedě Peanovy aritmetiky přidáme nový binární relační symbol $|$.

   K axiomům Peanovy aritmetiky přidáme jeden definující axiom

   $$(\forall x)(\forall y)\ (x|y \Longleftrightarrow (\exists z)\ y = xz)$$

   V Peanově aritmetice dokažte tvrzení

   $$(\forall x)(\forall y)\ (x|y \wedge y \neq 0 \Longrightarrow x \leq y)$$

   K důkazu můžete použít jen pravidla logiky, axiomy Peanovy aritmetiky, komutativitu sčítání a distributivitu zleva násobení vzhledem ke sčítání.

   Jednotlivé kroky důkazu zdůvodněte.

   Řešení. Zvolme libovolně x a y.

Předpoklad: $x|y$, $y \neq 0$. Chceme: $x \leq y$.

$x|y$ znamená, že existuje z, $y = xz$.

Předpokládejme, že $z = 0$. Pak $y = x \cdot z = x \cdot 0 =_{\text{PA5}} 0$, $y = 0$, spor.

Nutně tedy $z \neq 0$. Dle (PA0) existuje u, $u' = z$.

$$u' =_{\text{PA3}} (u+0)' =_{\text{PA4}} u + 0', \ z = u + 0'$$

Pak

$$y = xz = x(u+0') =_{\text{distr.}} xu + x \cdot 0' =_{\text{kom.+}} x \cdot 0' + xu$$

Takže $x \cdot 0' + xu = y$, což dává $x \cdot 0' \leq y$.

$$x \cdot 0' =_{\text{PA6}} x \cdot 0 + x =_{\text{PA5}} 0 + x =_{\text{kom.+}} x + 0 =_{\text{PA3}} x, \ x \cdot 0' = x$$

Takže $x \leq y$.

3. V Peanově aritmetice dokažte tvrzení

$$(\forall x)(\forall y)\ (x < y' \Longrightarrow x \leq y)$$

Použít můžete jen axiomy Peanovy aritmetiky a pravidla logiky.

Jednotlivé kroky důkazu zdůvodněte.

Řešení. Zvolme libovolně x a y.

Předpoklad: $x < y'$. Chceme: $x \leq y$.

$x < y'$ znamená: existuje z, $z \neq 0$, $x + z = y'$

Protože $z \neq 0$, existuje u, $u' = z$ (viz (PA0)). Takže $x + u' = y'$.

Dle (PA4) je $x + u' = (x+u)'$. Pak $(x+u)' = y'$; použijeme (PA2) a dostáváme $x + u = y$. Z toho plyne, že $x \leq y$.

4. V Peanově aritmetice dokažte tvrzení

$$(\forall x)\ \neg(x < 0)$$

Použít můžete jen pravidla logiky, axiomy Peanovy aritmetiky a následující tvrzení

(T) $(\forall x)(\forall y)\ (x + y = 0 \Longrightarrow (x = 0 \wedge y = 0))$

Jednotlivé kroky důkazu zdůvodněte.

Řešení. Zvolme libovolné x. Chceme: $\neg(x < 0)$.

Sporem. Předpokládejme, že $x < 0$. Pak existuje d, $d \neq 0$, $x + d = 0$. Dle (T) máme $x = 0$, $d = 0$; dostali jsme spor.

5. V Peanově aritmetice dokažte **Princip maxima**:

   Nechť $\varphi(x)$ je formule Peanovy aritmetiky. Pak platí:

$$(\exists z)\ \varphi(z) \wedge (\exists h)(\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x \leq h) \Longrightarrow (\exists y)\ [\varphi(y) \wedge (\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x \leq y)]$$

   Použít můžete jen pravidla logiky, axiomy Peanovy aritmetiky, Princip dobrého uspořádání

   (PDU) Nechť $\varphi(x)$ je formule Peanovy aritmetiky. Pak platí:

$$(\exists z)\ \varphi(z) \Longrightarrow (\exists y)\ [\varphi(y) \wedge (\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow y \leq x)]$$

   a následující tři tvrzení:

   (USP) $(\forall x)\ \neg(x' \leq x)$

   (T1) $(\forall x)\ \neg(x < 0)$

   (T2) $(\forall x)(\forall y)\ (x < y' \Longrightarrow x \leq y)$

   Jednotlivé kroky důkazu zdůvodněte.

Řešení.

Předpoklad:

$$(\exists z)\ \varphi(z) \wedge (\exists h)(\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x \leq h)$$

Chceme:

$$(\exists y)\ [\varphi(y) \wedge (\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x \leq y)]$$

Buď $\psi(h)$ formule $(\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x \leq h)$.

Víme, že $(\exists h)\ \psi(h)$. Dle (PDU) pak

$$(\exists m)\ [\psi(m) \wedge (\forall h)\ (\psi(h) \Longrightarrow m \leq h)]$$

Platí $\psi(m)$, takže $(\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x \leq m)$. Ukážeme ještě, že platí $\varphi(m)$.

Předpokládejme, že $\neg\varphi(m)$. Pak $(\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x \neq m)$.

Buď x libovolné. Předpokládejme, že platí $\varphi(x)$. Pak $x \leq m$, $x \neq m$, $x < m$.

Ukázali jsme, že $(\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x < m)$.

Předpokládejme, že $m = 0$. Víme, že existuje z, pro něž platí $\varphi(z)$. Pak $z < 0$. To je spor s (T1).

Je tedy $m \neq 0$. Dle (PA0) existuje v, $v' = m$. Pak $(\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x < v')$.

Nechť x je libovolné a nechť platí $\varphi(x)$. Pak $x < v'$ a dle (T2) pak máme $x \leq v$. Tudíž platí $(\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x \leq v)$.

Pak platí $\psi(v)$. Pak $m \leq v$, čili $v' \leq v$. To je ve sporu s (USP).

Nutně tedy platí $\varphi(m)$. Celkem tedy platí:

$$\varphi(m) \wedge (\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x \leq m)$$

To znamená, že platí

$$(\exists y)\ [\varphi(y) \wedge (\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow x \leq y)]$$

To jsme chtěli.

Pro pohodlí ještě připomínám **axiomy Peanovy aritmetiky**:

(PA0) $(\forall x)\ (x \neq 0 \Longrightarrow (\exists y)\ y' = x)$

(PA1) $(\forall x)\ x' \neq 0$

(PA2) $(\forall x)(\forall y)\ x' = y' \Longrightarrow x = y$

(PA3) $(\forall x)\ x + 0 = x$

(PA4) $(\forall x)(\forall y)\ x + y' = (x + y)'$

(PA5) $(\forall x)\ x \cdot 0 = 0$

(PA6) $(\forall x)(\forall y)\ x \cdot y' = x \cdot y + x$

(PA7) Nechť $\varphi(x)$ je formule Peanovy aritmetiky. Pak je axiomem formule

$$[\varphi(0) \wedge (\forall x)\ (\varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x'))] \Longrightarrow (\forall x)\ \varphi(x)$$

Poznámka: Zápis $\varphi(x)$ znamená, že $V_f(\varphi) = \{x\}$.