Úlohy 5

Na případné chyby mě prosím upozorněte. Děkuji.

1. Zapište všechny podmnožiny množiny $\{1, 2, 3\}$.

   Řešení:
   $$\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

2. Určete, které z následujících množin se rovnají:

   (a) $\{x \in \mathbb{N}; x < 0\}$

   (b) $\{0\}$

   (c) $\emptyset$

   (d) $\{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2\}$

   (e) $\{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 2\}$

   (f) $\{x \in \mathbb{Z}; -3 < x < 3\}$

   (g) $\{x \in \mathbb{Z}; |x| \leq 0\}$

   (h) $\{x \in \mathbb{Z}; |x| < 0\}$.

   Řešení: (a)=(c)=(h), (b)=(g), (d)=(e)

3. V množině $\mathbb{Z}$ určete doplňky následujících množin

   (a) $A_1 = \{x \in \mathbb{Z}; x < 1\}$

   Řešení: $\overline{A_1} = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 1\}$

   (b) $A_2 = \mathbb{N}$

   (c) $A_3 = \mathbb{Z}$

   (d) $A_4 = \{x \in \mathbb{Z}; \sqrt{x^2} = |x|\}$

   (e) $A_5 = \{x \in \mathbb{Z}; |x| > 0\}$

4. Je dána základní množina $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Určete všechny dvojice množin X a Y, které splňují všechny následující podmínky (najednou):

   - $X \subseteq J, Y \subseteq J$
   - $X \cap Y = \{2, 5\}$
   - $X \cup \{3, 5\} = \{3, 4, 5, 6\}$
   - $\overline{Y} \cup \{2, 3, 4, 5\} = J$

   Řešení:

   (a) $X \subseteq J, Y \subseteq J \Rightarrow$ obě jsou podmnožinou množiny J

(b) $X \cap Y = \{2, 5\} \Rightarrow X$ i Y obsahují prvky 2 a 5

(c) $X \cup \{3, 5\} = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow X$ obsahuje nutně prvky $4, 6$, může a nemusí obsahovat prvky $3, 5$ (z této podmínky, kvůli té předchozí prvek 5 obsahovat musí).

(d) $\overline{Y} \cup \{2, 3, 4, 5\} = J \Rightarrow$ v doplňku k Y musí být nutně prvky $\{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$, tyto prvky tedy nemohou být v množině Y a množina Y může obsahovat pouze prvky $\{2, 3, 4, 5\}$

Závěr: Vzhledem k tomu, že množina X musí obsahovat prvek 4, pak ho množina Y obsahovat nemůže, protože jinak by byl v jejich průniku a to není. Prvek 3 může být v množině X i Y, ale ne v obou zároveň. Tedy dvojice množin splňující podmínky jsou možné tři, a to následující:

- $X = \{2, 4, 5, 6\}$ a $Y = \{2, 5\}$
- $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ a $Y = \{2, 5\}$
- $X = \{2, 4, 5, 6\}$ a $Y = \{2, 3, 5\}$

5. Určete $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, jestliže

(a) $A = \{1, 2, 5, 8\}$ a $B = \{1, 3, 5, 7\}$;

(b) $A = \{x \in \mathbb{N}; x > 2\}$ a $B = \{x \in \mathbb{N}; x < 7\}$;

Řešení:

i. $A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$

ii. $A \cup B = \mathbb{N}$

iii. $A \setminus B = \{7, 8, 9, \dots\}$

iv. $B \setminus A = \{0, 1, 2\}$

(c) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x > -3\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Z}; x > -5\}$;

(d) $A = \mathbb{N}$ a $B = \mathbb{Z}$;

(e) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x < 0\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Z}; \sqrt{x^2} = x\}$.

6. Řešte pomocí Vennových diagramů

(a) Je známo: Z 825 oslovených osob 380 uvedlo, že používá počítač doma nebo v zaměstnání. Počet osob, které používají počítač doma, je dvakrát větší než počet těch, kteří používají počítač doma i v zaměstnání, a je o 40 menší než počet těch, kteří používají počítač pouze v zaměstnání.

Určete:

i. Kolik oslovených osob používá počítač pouze v zaměstnání?

ii. Kolik oslovených osob používá počítač doma?

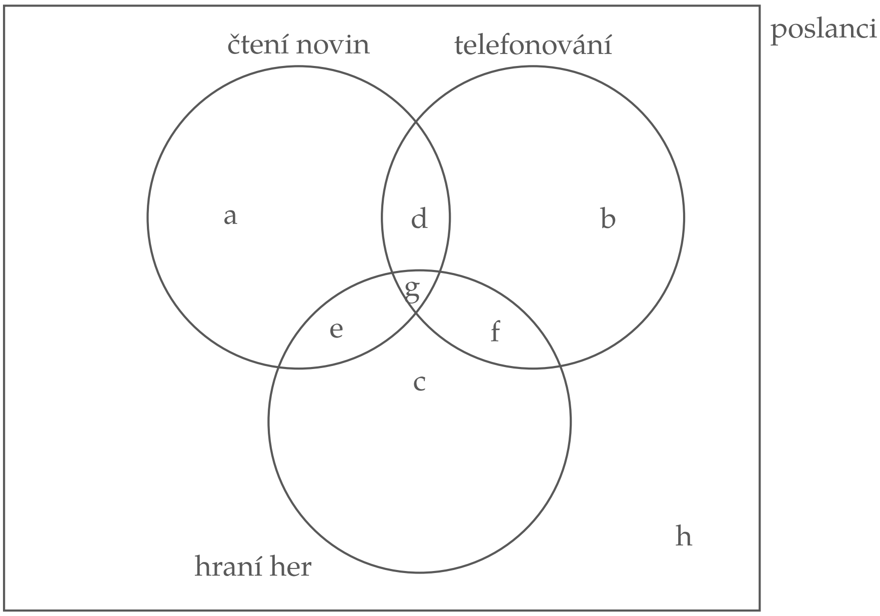
(b) Je známo: Při jednání jedné nejmenované poslanecké sněmovny byl proveden průzkum pracovního vytížení přítomných poslanců. Bylo zjištěno, že kromě sledování průběhu projednávání zákona poslanci stíhají číst noviny, telefonovat a hrát hry na notebooku. Noviny čte 34 poslanců, telefonuje jich

36 a hraním her se trápí 38 poslanců. Žádnou z těchto tří činností nevykonává a jednání sleduje 35 poslanců. Pouze dva poslanci pak stíhají všechny tři činnosti najednou. Čte a zároveň telefonuje 6 poslanců a 3 poslanci zároveň čtou a hrají hry. Telefonuje nebo hraje hry 65 poslanců.

Určete:

i. Kolik poslanců pouze telefonuje?
ii. Kolik poslanců hraje hry nebo čte?
iii. Kolik poslanců dokáže vykonávat alespoň dvě z uvedených činností?
iv. Kolik poslanců je přítomno jednání sněmovny?

Řešení: Zakreslíme Vennův diagram pro názornost:



Označili jsme jednotlivé skupiny poslanců podle toho, jaké činnosti vykonávají:

- a: poslanci, kteří pouze čtou noviny
- b: poslanci, kteří pouze telefonují
- c: poslanci, kteří pouze hrají hry
- d: poslanci, kteří čtou a zároveň telefonují, ale nehrají hry
- e: poslanci, kteří čtou a zároveň hrají hry, ale netelefonují
- f: poslanci, kteří telefonují a zároveň hrají hry, ale nečtou
- g: poslanci, kteří čtou, telefonují a hrají hry
- h: poslanci, kteří nevykonávají žádnou z těchto tří činností

Známe následující údaje:

i. Noviny čte celkem 34 poslanců, tedy:

$$a + d + e + g = 34$$

ii. Telefonuje celkem 36 poslanců, tedy:

$$b + d + f + g = 36$$

iii. Hry hraje celkem 38 poslanců, tedy:

$$c + e + f + g = 38$$

iv. Průzkumu se neúčastní a žádnou z těchto činností nedělá 35 poslanců, tedy:

$$h = 35$$

v. Dva poslanci vykonávají všechny tři činnosti, tedy:

$$g = 2$$

vi. Čte a zároveň telefonuje 6 poslanců, tedy:

$$d + g = 6$$

vii. Čte a zároveň hraje hry 3 poslanci, tedy:

$$e + g = 3$$

viii. Telefonuje nebo hraje hry celkem 65 poslanců, tedy:

$$b + f + c + d + e + g = 65$$

- Vypočítáme d a e:
  Z rovnice $d + g = 6$ vyplývá:

  $$d = 6 - g = 6 - 2 = 4$$

  Z rovnice $e + g = 3$ vyplývá:

  $$e = 3 - g = 3 - 2 = 1$$

- Použitím ostatních rovnic určíme a, b, c, f:
  Dosadíme d, e a g do první rovnice:

  $$a + d + e + g = 34 \quad \Rightarrow \quad a + 4 + 1 + 2 = 34 \quad \Rightarrow \quad a = 27$$

  Dosadíme d a g do druhé rovnice:

  $$b + d + f + g = 36 \quad \Rightarrow \quad b + 4 + f + 2 = 36 \quad \Rightarrow \quad b + f = 30$$

  Dosadíme e a g do třetí rovnice:

  $$c + e + f + g = 38 \quad \Rightarrow \quad c + 1 + f + 2 = 38 \quad \Rightarrow \quad c + f = 35$$

  Z rovnice $b + f + c + d + e + g = 65$:

  $$b + f + c + 4 + 1 + 2 = 65 \quad \Rightarrow \quad b + f + c = 58$$

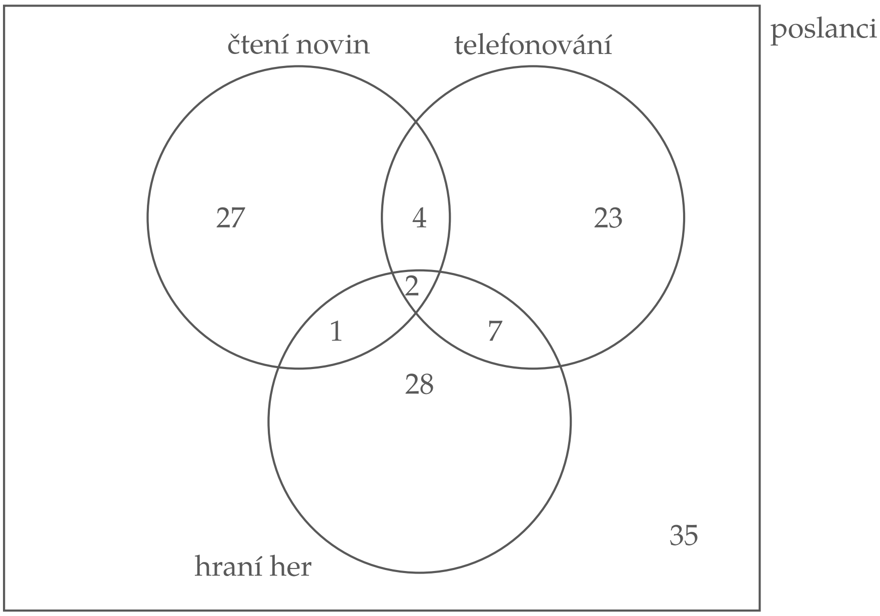
  Máme nyní soustavu tří rovnic o třech neznámých:

  $$\begin{aligned} b + f &= 30 \\ c + f &= 35 \\ b + f + c &= 58 \end{aligned}$$

  Z nich určíme $b = 23, c = 28, f = 7$.

Tím jsme došli k výsledku:

$$a = 27, b = 23, c = 28, d = 4, e = 1, f = 7, g = 2, h = 35$$



A můžeme zodpovědět dotazy:

i. Kolik poslanců pouze telefonuje? $\boxed{23}$

ii. Kolik poslanců hraje hry nebo čte? $27 + 4 + 2 + 1 + 7 + 28 = \boxed{69}$

iii. Kolik poslanců dokáže vykonávat alespoň dvě z uvedených činností? $4 + 1 + 2 + 7 = \boxed{14}$

iv. Kolik poslanců je přítomno jednání sněmovny? $\boxed{127}$

(c) Žáci 7.A se chystají na sportovní výcviky. Pět žáků umí lyžovat, jezdit na kole i plavat. Dva žáci neumí ani jedno. Lyžovat umí 20 žáků, jezdit na kole umí 19 žáků a plavat umí 17 žáků. Lyžovat i jezdit na kole umí 12 žáků, lyžovat i plavat umí také 12 žáků a jezdit na kole i plavat umí 7 žáků. Kolik je celkem žáků ve třídě?

(d) Do třídy 5.A chodí 30 žáků. Hudební školu z této třídy navštěvuje 6 žáků, do modelářského kroužku chodí o 5 žáků více než do hudební školy. Dramatický kroužek navštěvuje o tři žáky méně, než kroužek modelářský. Dva žáci chodí do modelářského kroužku i hudební školy, žádný žák nechodí zároveň do dramatického i modelářského kroužku. 10 žáků nechodí do žádného kroužku. Kolik žáků navštěvuje dvě ze zmíněných zájmových činností?

(e) Ve škole je 20 učitelů. 10 učí humanitní vědy, 8 učí sociální vědy a 6 učí přírodní vědy. Dva učitelé učí humanitní i sociální vědy, ale žádný neučí sociální a přírodní vědy. Kolik učitelů učí humanitní i přírodní vědy?

(f) 200 studentů dělalo zkoušky z češtiny, matematiky a fyziky. 114 studentů udělalo češtinu, 50 studentů udělalo matematiku a 41 studentů udělalo fyziku. Zkoušku z češtiny i matematiky udělalo 14 studentů, z matematiky i fyziky 15 studentů a z češtiny i fyziky 11 studentů. Všechny tři zkoušky udělalo 5 studentů. Kolik studentů neudělalo ani jednu zkoušku?

(g) Každý student mluví alespoň jedním z následujích jazyků - angličtina, němčina, francouzština. Studentů je celkem třicet. 25 jich mluví anglicky, z toho 6 mluví i německy. Všemi jazyky mluví stejné množství studentů jako množství studentů mluvících pouze německy. A stejné množství studentů mluví pouze francouzsky. Studentů, kteří mluví francouzsky, je o 2 více než těch, co mluví německy. Studentů, kteří mluví jen anglicky, je více než dvakrát tolik než těch, co mluví jen německy a francouzsky. Kolik studentů mluví jednotlivými jazyky?

(h) Stejný počet studentů a učitelů se zúčastnil průzkumu, kde odpovídali na jednu otázku (ano – ne). 60 % těch, co odpověděli „ano" byli učitelé a 80 % těch, co odpověděli „ne" byli studenti. Kolik procent studentů odpovědělo „ano"?

7. Zakreslete Vennův diagram pro čtyři množiny.

8. Zjednodušte (např. za použití Vennových diagramů)

   (a) $(C \cup (A \cap C)) \cup (A \cup (B \cap (A \cup B)))$

   (b) $((C \cap A) \cup (A \cap B)) \cup ((A \cup C) \cap (B \cup A))$

9. Dokažte! (Vennův diagram je nápovědou, zda to lze dokázat, nicméně nelze ho v tuto chvíli považovat za důkaz.)

   (a) $(\forall A)\ A \subseteq A$

   (b) $(\forall A)\ \emptyset \subseteq A$

   (c) $(\forall A, B, C)\ A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

   Řešení:

   Budeme dokazovat rovnost těchto dvou množin dvojím inkluzním důkazem.

   - Důkaz inkluze $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$:
     Vezměme si libovolný prvek $x \in A \setminus (B \cup C)$. To znamená, že:
     – $x \in A$,
     – $x \notin B \cup C$, tedy $x \notin B$ a $x \notin C$.

     Z toho plyne, že:
     – $x \in A \setminus B$ (protože $x \in A$ a $x \notin B$),
     – $x \notin C$.

     Tedy $x \in (A \setminus B) \setminus C$.
     Tím jsme ukázali, že $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$.
   - Důkaz inkluze $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \cup C)$:
     Vezměme si libovolný prvek $x \in (A \setminus B) \setminus C$. To znamená, že:
     – $x \in A \setminus B$, což znamená, že $x \in A$ a $x \notin B$,
     – $x \notin C$.

     Z toho plyne, že:
     – $x \notin B \cup C$ (protože $x \notin B$ a $x \notin C$),

– $x \in A$.

Tedy $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Tím jsme ukázali, že $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \cup C)$.

Protože platí obě inkluze, dostáváme, že $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

(d) $(\forall A, B, C)\ A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Řešení: Budeme postupovat podle logické ekvivalence. Napíšeme si nejprve, co znamená, že je x prvkem $A \setminus (B \cap C)$ a postupujeme dále.

$(x \in A) \wedge (x \notin (B \cap C)) \equiv (x \in A) \wedge ((x \notin B) \vee (x \notin C)) \equiv$

$\equiv ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin C))$

Poslední výraz odpovídá právě $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Tedy jsme dokázali, že prvek je v množině na levé straně právě tehdy, když je v množině na pravé straně, což je definice rovnosti dvou množin.

(e) $(\forall A, B)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(f) $(\forall A, B)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

10. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí následující tvrzení

(a) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

(b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(c) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

(d) $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus D)$

(e) $(\forall A, B)\ \mathrm{Pot}(A) \cup \mathrm{Pot}(B) \subseteq \mathrm{Pot}(A \cup B)$

Řešení:

Nechť A a B jsou libovolné množiny. Potenční množina $\mathrm{Pot}(A)$ obsahuje všechny podmnožiny množiny A. Podobně potenční množina $\mathrm{Pot}(B)$ obsahuje všechny podmnožiny množiny B.

Spojíme-li množiny $\mathrm{Pot}(A)$ a $\mathrm{Pot}(B)$, získáme množinu, která obsahuje všechny podmnožiny množiny A a podmnožiny množiny B. Každá podmnožina $X \subseteq A$ nebo $Y \subseteq B$ je také podmnožinou množiny $A \cup B$. To znamená, že všechny prvky z $\mathrm{Pot}(A) \cup \mathrm{Pot}(B)$ jsou také podmnožiny množiny $A \cup B$, a tudíž patří do $\mathrm{Pot}(A \cup B)$.

Proto platí, že:

$$\mathrm{Pot}(A) \cup \mathrm{Pot}(B) \subseteq \mathrm{Pot}(A \cup B)$$

Poznámka: Proč neplatí?

$$\mathrm{Pot}(A) \cup \mathrm{Pot}(B) = \mathrm{Pot}(A \cup B)$$

Uvažujme

- $A = \{1\}$,
- $B = \{2\}$.

Pak

- $A \cup B = \{1, 2\}$,
- $\mathrm{Pot}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,

- $\mathrm{Pot}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$,
- $\mathrm{Pot}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$.

Sjednocení potenčních množin A a B je:

$$\mathrm{Pot}(A) \cup \mathrm{Pot}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}.$$

Nyní vidíme, že $\{1, 2\} \in \mathrm{Pot}(A \cup B)$, ale $\{1, 2\} \notin \mathrm{Pot}(A) \cup \mathrm{Pot}(B)$. Opačná inkluze tedy neplatí.

(f) $(\forall A, B)\ \mathrm{Pot}(A \cap B) = \mathrm{Pot}(A) \cap \mathrm{Pot}(B)$