

# Numerická matematika

## Otázky k SZZ SP Učitelství matematiky pro SŠ

### 1) Soustavy lineárních rovnic.

- Otázka: Zformulujte a dokažte Gaussovu metodu eliminace se zpětnou substitucí pro řešení soustavy  $n$  lineárních rovnic.
- Úloha: Určete počet operací násobení, resp. dělení, a sčítání, resp. odčítání, které jsou použity v Gaussově metodě pro  $n$  lineárních rovnic. Ukažte, že celkový počet aritmetických operací je roven hodnotě  $\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$ .

### 2) Rovnice s jednou proměnnou.

- Otázka: Zformulujte Newtonovu metodu pro nalezení řešení rovnice  $f(x) = 0$  vzhledem k počáteční aproximaci  $p_0$ . Zformulujte a dokažte větu o konvergenci Newtonovy metody.
- Úloha: Ukažte, že pokud je Newtonova metoda konvergentní, pak je kvadraticky konvergentní, tj.  $|p_{n+1} - p| < M|p_n - p|^2$  pro nějakou konstantu  $M$ , kde  $p$  je kořen rovnice  $f(x) = 0$  a  $p_n$ , kde  $n = 0, 1, \dots$ , je posloupnost aproximací generovaná Newtonovou metodou.

### 3) Interpolace a polynomiální aproximace.

- Otázka: Napište vzorec pro Lagrangeův interpolační polynom  $n$ -tého stupně, který interpoluje funkci  $f(x)$  v daných bodech  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Vyslovte větu o odhadu chyby Lagrangeovy interpolace.
- Úloha: Předpokládejme, že je připravena tabulka pro funkci  $f(x) = e^x$ , pro  $x \in [0, 1]$ . Předpokládejme, že rozdíl mezi sousedními hodnotami  $x$  v tabulce je roven  $h$  (to znamená, že  $h$  musí být zvoleno  $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$  a tak dále). Ukažte, že aby byla zajištěna absolutní chyba  $10^{-6}$  při interpolaci lineárním ( $n=1$ ) Lagrangeovým polynomem, je nutné zvolit  $h \leq 10^{-3}$ .

### 4) Numerická derivace a integrace.

- Otázka: Použitím kvadratické ( $n=2$ ) Lagrangeovy interpolace funkce  $f(x)$  odvoďte Simpsonovo pravidlo pro výpočet určitého integrálu  $\int_a^b f(x) dx$  a určete chybu.
- Úloha: Aproximujte integrál  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$  pomocí Simpsonova pravidla.

5) Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

- Otázka: Formulujte Eulerovu metodu pro numerické řešení korektně formulované počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici (ODR):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

a odhadněte mezní chybu pro Eulerovu metodu.

- Úloha: Předpokládejme, že při aplikaci Eulerovy metody na počáteční úlohu ODR vzniká v každém iteračním kroku zaokrouhlovací chyba  $\delta$ . Necht'  $h = \frac{b-a}{N}$  je velikost kroku a  $N$  je celkový počet iterací. Ukažte, že mezní chyby již nejsou lineární vzhledem k  $h$ , a najděte optimální  $h$ , které dává minimální chybu.