ZPP II/II Lineární algebra, varianta A

Jméno a příjmení:
Obor, ročník:
Datum:
Počet odevzdaných listů: 1+

1) Je dána množina vektorů $W = \{(2u + v, u - 2v, u + v); u, v \in \mathbb{R}\}$. Rozhodněte, zda se jedná o vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$.

   Řešení: Aby nějaká množina vektorů tvořila vektorový podprostor, musí obsahovat nulový vektor a musí být uzavřená na operace (sčítání a násobení skalárem). Množina W obsahuje nulový vektor, protože stačí položit $u = v = 0$.

   Než budeme pokračovat dál, uvědomíme si, jak zjistíme, že nějaký vektor patří do množiny W. Například vektor $(8, -11, -1)$ do množiny W patří, protože volbou $u = 9, v = -10$, dostaneme právě tento vektor. Naproti tomu vektor $(3, -1, 0)$ do množiny W nepatří, protože neexistují taková čísla u, v, aby byly splněny všechny rovnosti $2u+v = 3, u-2v = -1$ a $u+v = 0$ zároveň. Jinými slovy vektor $(8, -11, -1)$ je daného tvaru, ale vektor $(3, -1, 0)$ daného tvaru není.

   Množina W je uzavřená na násobení skalárem, protože máme-li libovolný vektor daného tvaru $\vec{x} = (2u + v, u - 2v, u + v)$ a libovolné reálné číslo (tj. skalár) k, pak vektor $k\vec{x}$ je také daného tvaru, protože $k\vec{x} = (2ku + kv, ku - 2kv, ku + kv)$.

   Množina W je také uzavřená na sčítání, protože máme-li dva libovolné vektory daného tvaru, např. $\vec{x} = (2u + v, u - 2v, u + v)$ a $\vec{y} = (2a + b, a - 2b, a + b)$, (kde $u, v, a, b \in \mathbb{R}$), pak jejich součet je také daného tvaru:

$$\vec{x} + \vec{y} = (2u + v, u - 2v, u + v) + (2a + b, a - 2b, a + b) =$$
$$= (2(u + a) + (v + b), (u + a) - 2(v + b), (u + a) + (v + b)) .$$

2) Najděte ortogonální bázi vektorového prostoru $[(-1, 2, 0, 1), (1, 2, -3, 1), (2, 0, 1, -2)]$.

   Řešení: Nejprve je třeba zjistit, zda jsou vektory lineárně nezávislé. Pokud ne, pak tvoří bázi daného VP. V tomto případě jsou vektory lineárně nezávislé.

   Ortogonální báze je taková báze, jejíž vektory jsou navzájem kolmé. Pomocí skalárního součinu ověříme, zda tomu tak již není. V tomto případě vektory kolmé nejsou. Proto musíme dva z nich nahradit vhodnou lineární kombinací ostatních.

   Ke konstrukci ortogonální báze tedy využijeme Gram-Schmidtův proces: Zvolíme si libovolný vektor, který bude součástí nové báze a dva zbývající zkonstruujeme. Zvolme například $\vec{y_1} = (-1, 2, 0, 1)$ a nahraďme vektor $\vec{x_2} = (1, 2, -3, 1)$ vektorem $\vec{y_2}$ takto:

$$\vec{y_2} = \vec{x_2} - \frac{\vec{y_1} \cdot \vec{x_2}}{\vec{y_1} \cdot \vec{y_1}} \vec{y_1}$$

$$\vec{y_2} = (1, 2, -3, 1) - \frac{(-1, 2, 0, 1) \cdot (1, 2, -3, 1)}{(-1, 2, 0, 1) \cdot (-1, 2, 0, 1)} (-1, 2, 0, 1) =$$

$$= (1, 2, -3, 1) - \frac{4}{6}(-1, 2, 0, 1) = \frac{1}{3}(5, 2, -9, 1)$$

Protože hledáme kolmý směr, nikoli jediný vektor, můžeme nadále používat $\vec{y_2} = (5, 2, -9, 1)$.

Nyní nahradíme vektor $\vec{x_3} = (2, 0, 1, -2)$ vektorem $\vec{y_3}$ takto:

$$\vec{y_3} = \vec{x_3} - \frac{\vec{y_1} \cdot \vec{x_3}}{\vec{y_1} \cdot \vec{y_1}}\vec{y_1} - \frac{\vec{y_2} \cdot \vec{x_3}}{\vec{y_2} \cdot \vec{y_2}}\vec{y_2}.$$

Dosazením dostaneme $\vec{y_3}$.

3) Je dáno lineární zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pro které
$F(-1, 2) = (-7, 3)$;
$F(1, 3) = (-3, 7)$.
Najděte jeho předpis.

Řešení: Hledáme matici zobrazení A (velikosti 2x2) tak, aby platilo:
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$ a zároveň $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$.
Odtud tedy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} -a + 2b &= -7 \\ -c + 2d &= 3 \\ a + 3b &= -3 \\ c + 3d &= 7 \end{aligned}$$

Z jejího řešení $a = 3, b = -2, c = 1, d = 2$ sestavíme předpis zobrazení:
$F(x, y) = (3x - 2y, x + 2y)$.

4) Najděte vlastní čísla a vlastní směry matice $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Řešení: Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu matice. Charakteristický polynom získáme jako následující determinant:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & -3 \\ 0 & \lambda - 3 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

Jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$.

Vlastní směr je takový směr zobrazení, pro který platí:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Postupně tedy dosadíme všechny tři kořeny a vypočítáme tři vlastní směry:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ tj. } \begin{bmatrix} 2x & -2y & +3z \\ & 3y & -2z \\ & -1y & +2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

Řešíme tedy homogenní soustavu tří rovnic o třech neznámých (jejíž řešení je vždy buď pouze triviální, tj. nulové, nebo je parametrické):

$$\begin{aligned} -2y + 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ -y &= 0 \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou všechny vektory $\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, kde $x \in \mathbb{R}$.

Stejným způsobem sestavíme soustavu rovnic pro $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ 2y - 2z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou všechny vektory $\begin{bmatrix} -y \\ y \\ y \end{bmatrix}$, kde $y \in \mathbb{R}$.

Nakonec stejně sestavíme rovnice pro $\lambda_3 = 4$:

$$\begin{aligned} -2x - 2y + 3z &= 0 \\ -y - 2z &= 0 \\ -y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou všechny vektory $\begin{bmatrix} \frac{7}{2}z \\ -2z \\ z \end{bmatrix}$, kde $z \in \mathbb{R}$.

Vlastní směry[1] jsou tedy $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

5) Rozhodněte, zda je následující zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineární, zda je izomorfní, a napište jeho matici:

$F(x, y) = (4x - 3y, 0, x + 3y)$

Řešení: Jde o lineární zobrazení, protože všechny tři složky výsledného vektoru dostaneme jako lineární kombinaci složek původního vektoru. V důkazu je třeba ověřit pro libovolné vektory z $\mathbb{R}^2$ a libovolný skalár následující:

[1] dostaneme je vhodnou volbou parametru

a) $F(\vec{u}) + F(\vec{v}) = F(\vec{u} + \vec{v})$

b) $F(k\vec{u}) = kF(\vec{u})$

Pro sčítání upravujeme:

$F(\vec{u}) + F(\vec{v}) = F[(x_1, y_1)] + F[(x_2, y_2)] = (4x_1 - 3y_1, 0, x_1 + 3y_1) + (4x_2 - 3y_2, 0, x_2 + 3y_2) = (4x_1 - 3y_1 + 4x_2 - 3y_2, 0, x_1 + 3y_1 + x_2 + 3y_2) = (4[x_1 + x_2] - 3[y_1 + y_2], 0, x_1 + x_2 + 3[y_1 + y_2]) = F[(x_1 + x_2, y_1 + y_2)] = F(\vec{u} + \vec{v})$

Podobně pro násobení skalárem:

$F(k\vec{u}) = F[k(x, y)] = F[(kx, ky)] = (4kx - 3ky, 0, kx + 3ky) = k(4x - 3y, 0, x + 3y) = kF[(x, y)] = kF(\vec{u})$

Tím je důkaz hotov.

Matice zobrazení $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ nemá matici inverzní, tj. neexistuje inverzní zobrazení vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ na prostor $\mathbb{R}^2$ a zobrazení není izomorfismus. V tomto případě je problém, jaký vektor se zobrazil například na vektor $(3, -1, 9)$. Vzhledem k tomu, že všechny obrazy mají $y-$ovou souřadnici nulovou, tak zřejmě žádný. (Existuje ale inverzní zobrazení z podprostoru $\mathbb{R}^3$, prostor $\mathbb{R}^2$ je s tímto podprostorem izomorfní.)