Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.
KMA – Katedra matematiky PřF

10.4.2024

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

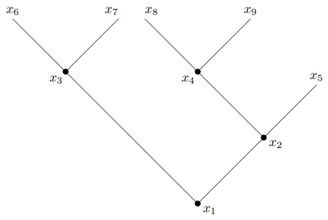
Hra v explicitním tvaru

Hra v explicitním tvaru

- Ve hře popsané v normálním tvaru se hráči rozhodují o svých strategiích najednou, přičemž každý z nich má pouze jednu možnost volby.
- Naopak, některé scénáře je vhodnější popsat jako sérii kroků, kde hráči postupně reagují na tahy svých protihráčů.
- K těmto sekvenčním konfliktům patří hry jako šachy, dáma, různé karetní hry nebo piškvorky, kde tahy hráčů navazují jeden na druhý.
- Pro analýzu těchto situací, kde se rozhodnutí dějí v následujících tazích, používáme modely her v explicitním tvaru, známé také jako hry v rozvinutém tvaru nebo tahové hry.

Hra v explicitním tvaru

- Strom je typ grafu, který je souvislý a neobsahuje žádné cykly.



- Strom hry má definovaný počáteční bod, známý jako kořen, a obvykle obsahuje několik koncových bodů, neboli listů, jež symbolizují konec hry.
- Hráči se ve hře střídají a ovlivňují její průběh na rozhodovacích uzlech.
- Rozhodovací uzly představují moment, kdy hráč vybírá z možností, které má v této části hry k dispozici.

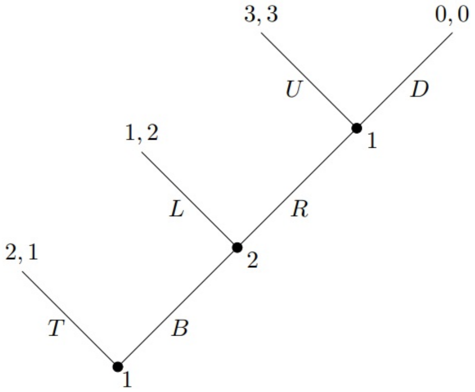
Hra v explicitním tvaru

Hra v explicitním tvaru je charakterizována následujícími prvky:

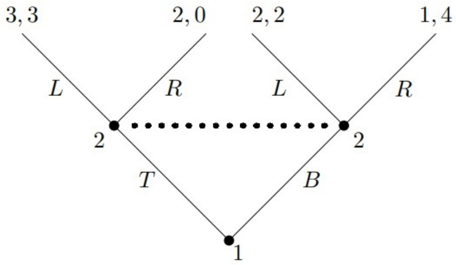
- množiny hráčů
- kdy a mezi jakými možnostmi se jednotliví hráči rozhodují
- informace, které hráči mají k dispozici při provádění svých tahů
- výplatní funkce hráčů jako funkce rozhodnutí všech hráčů

Hra v explicitním tvaru

Zde vidíme příklad hry v explicitním tvaru s dokonalou informací, hráči v každém okamžiku hry vědí, ve kterém uzlu se hra nachází.



Zde vidíme příklad hry v explicitním tvaru s nedokonalou informací, druhý hráč ve svém kroku neví, v kterém uzlu se nachází, nezná volbu strategie prvního hráče.



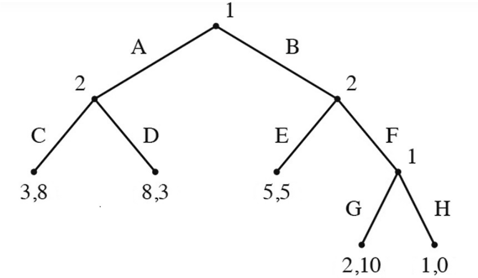
Hra v explicitním tvaru

Pro hledání rovnovážných bodů hry v explicitním tvaru máme dvě možnosti.

- můžeme hru **převést na hru v normálním tvaru** a nalézt rovnovážné body hry v normálním tvaru pomocí dříve představených konceptů
- alternativně můžeme hledat rovnovážné body přímo v explicitním tvaru hry pomocí konceptu **dokonalá rovnováha podhry** (je však nutné hledat dokonalou rovnováhu podhry přímo z explicitního tvaru, není možné ji hledat v příslušné hře v normálním tvaru)

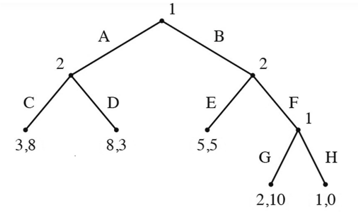
Hra v explicitním tvaru - převod na hru v normálním tvaru

Nejprve se zaměříme na metodu hledání rovnovážných bodů převodem na přidruženou hru v normálním tvaru. Zásadní otázkou je, jaké jsou ryzí strategie jednotlivých hráčů. Kolik ryzích strategií má první hráč a kolik druhý hráč v následující hře?



Jedná se vždy o kombinaci rozhodnutí v rozhodovacích uzlech.

- ryzí strategií i-tého hráče je kompletní specifikace, jak se má hráč v každém uzlu rozhodnout
- zjednodušeně, víme-li, jak chceme hru hrát a chceme, aby ji za nás odehrál kamarád, tak jaké všechny instrukce mu musíme předat
- tedy první hráč má strategie $\{(A,G),(A,H),(B,G),(B,H)\}$ a druhý hráč má strategie $\{(C,E),(C,F),(D,E),(D,F)\}$
- strategie prvního hráče budou v řádcích a strategie druhého hráče ve sloupcích
- výplaty tedy zapíšeme do tabulky následujícím způsobem



	CE	CF	DE	DF
AG	3,8	3,8	8,3	8,3
AH	3,8	3,8	8,3	8,3
BG	5,5	2,10	5,5	2,10
BH	5,5	1,0	5,5	1,0

Hra v explicitním tvaru - převod na hru v normálním tvaru

- Každou hru v explicitním tvaru lze vždy přesně převést na hru v normálním tvaru.
- Avšak z hry v normálním tvaru obecně nelze získat hru v explicitním tvaru.
- Převod na hru v normálním tvaru je výhodný, protože umožňuje využít již zjištěné informace o hrách v normálním tvaru.
- Pro smíšené strategie, nejlepší odpovědi a Nashovy rovnovážné body platí stejné definice.
- Nevýhodou tohoto převodu je jeho složitost.
- Při převodu malé hry s pěti koncovými listy jsme narazili na hru s 16 kombinacemi ryzích strategií pro jednotlivé hráče.
- U velkých her je převod příliš výpočetně náročný.

Pokud jsme u předchozí hry získali hru v normálním tvaru, můžeme najít Nashovy rovnovážné body pomocí nalezení sedlového prvku ve dvojmatici:

	CE	CF	DE	DF
AG	3,8	**3,8**	8,3	8,3
AH	3,8	**3,8**	8,3	8,3
BG	5,5	2,10	5,5	2,10
BH	**5,5**	1,0	5,5	1,0

Získali jsme tři Nashovy rovnovážné body v ryzích strategicích:

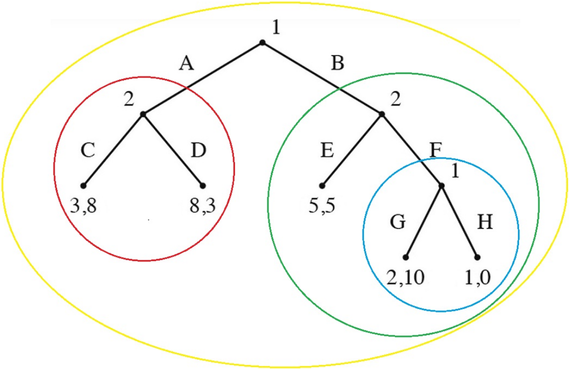
$$\{(AG, CF), (AH, CF), (BH, CE)\}.$$

Hra v explicitním tvaru - dokonalá rovnováha podhry

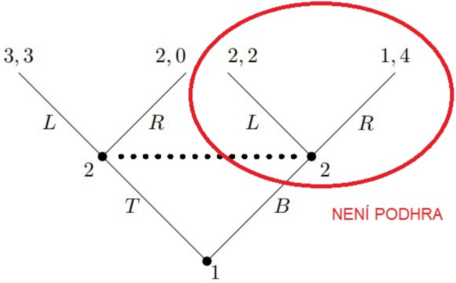
Další možností je využít nový koncept nazvaný **dokonalá rovnováha podhry**.

- Jedná se o koncept hledání rovnovážných bodů přímo z explicitního tvaru hry.
- Základní idea je, že rovnovážné strategie by měly být rovnovážnými strategiemi v každé podhře.
- Podhrou máme na mysli uzel ve stromu hry a všechny uzly, které po něm následují ve stromu hry, s tím, že je známa kompletní informace v celé podhře.

Předchozí hra má následující podhry. I celá hra samotná je formálně podhra.



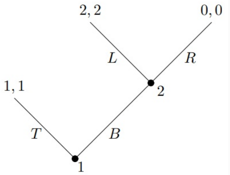
Ve hře s nedokonalou informací je však nutno, aby byly v podhře zahrnuty všechny uzly se stejným souborem informací.



V této malé hře je jedinou podhrou celá hra.

Hra v explicitním tvaru - dokonalá rovnováha podhry

Postup si ukážeme na nejjednodušším příkladu.



Povšimněme si, že hra má dva Nashovy rovnovážné body

$$\{(T, R), (B, L)\}$$

s výplatami (1,1) a (2,2). Pokud první hráč zvolí strategii T, tak druhý hráč je indiferentní mezi strategiemi L a R. A pokud druhý hráč zahraje R, pro prvního hráče je výhodnější strategie T. Ovšem pokud by hráč byl vyzván k volbě strategie, jistě zvolí vždy strategii L. Základní myšlenkou dokonalé rovnováhy podhry je zbavit se těchto podivných rovnovážných bodů jako je (T, R).

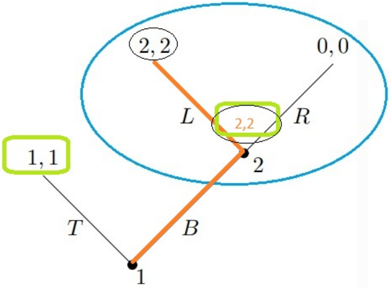
Hra v explicitním tvaru - dokonalá rovnováha podhry

V konceptu dokonalé rovnováhy podhry se druhý hráč zachová racionálně a zvolí vždy strategii L. Pak první hráč preferuje strategii B. Jedinou dokonalou rovnováhou podhry (celé hry) je

$$\{(B, L)\}.$$

- obecně hru řešíme tzv. zpětnou indukcí
- hru rozložíme na jednotlivé podhry
- začneme posledním rozhodnutím a vybereme rovnováhu podhry
- označíme optimální volbu, nahradíme podhru konečným listem s výplatou v bodě rovnováhy podhry a pokračujeme dále, dokud nedosáhneme kořene stromu hry

Ohodnotíme rozhodovací uzel druhého hráče, jako bychom podhru nahradili listem, a označíme oranžovou čárou rovnováhu každé podhry.



Řešením je strategie (B, L) s výplatou (2,2).

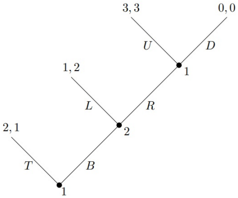
Hra v explicitním tvaru - dokonalá rovnováha podhry

Obecně pro všechny konečné hry v explicitním tvaru s perfektní informací platí následující:

- Hru můžeme řešit zpětnou indukcí
- Dokonalá rovnováha podhry je vždy Nashovým rovnovážným bodem hry.
- Ne každý Nashův rovnovážný bod hry je také dokonalou rovnováhou podhry.
- **Každá hra v explicitním tvaru s perfektní informací má alespoň jeden Nashův rovnovážný bod v ryzích strategiích (Zermelo)**.
- Řešením hry pomocí zpětné indukce můžeme ztratit některé Nashovy rovnovážné body, ale s jistotou najdeme ty rozumné.

Příklad s dokonalou informací z úvodu

- u hry z úvodu tedy první hráč má strategie TU, TD, BU a BD a druhý hráč má strategie L a R



	L	R
TU	2,1	2,1
TD	2,1	2,1
BU	1,2	3,3
BD	1,2	0,0

Hra v explicitním tvaru - příklady

Najdeme Nashovy rovnovážné body pomocí nalezení sedlového prvku ve dvojmatici:

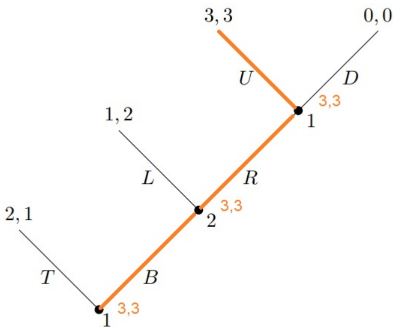
	L	R
TU	(2),[1]	2,[1]
TD	(2),[1]	2,[1]
BU	1,2	(3),[3]
BD	1,[2]	0,0

Hra má tři rovnovážné body

$$\{(TU, L), (TD, L), (BU, R)\}$$

s výplatami (2,1), (2,1) a (3,3). Bod (BU, R) je dominujícím rovnovážným bodem.

Najdeme dokonalou rovnováhu podhry.

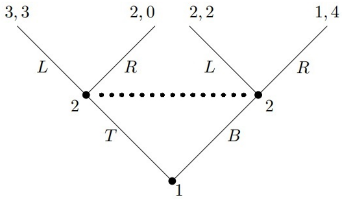


Dokonalou rovnováhou podhry je bod (BU, R) s výplatou (3,3).

△

Příklad s nedokonalou informací z úvodu

U druhé hry má první hráč strategie T a B a druhý hráč strategie L a R



	L	R
T	3,3	2,0
B	2,2	1,4

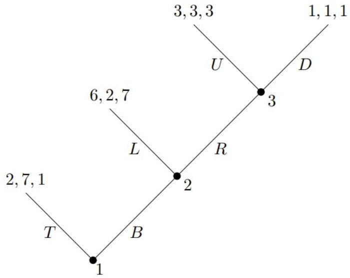
Rovnovážným bodem je volba strategie T prvním hráčem a volba strategie L druhým hráčem s výplatami (3,3).

Hra nemá žádné jiné podhry než sebe samou, není tedy jak ji dále rozložit na podhry.

$\triangle$

Příklad hry tří hráčů

Je snadné rozšířit hru na více než dva hráče. Podívejme se na hru tří hráčů na následujícím obrázku.



Přidruženou hru v normálním tvaru najdeme obdobně. Máme tři hráče, první hráč má strategie $\{T, B\}$, druhý hráč má strategie $\{L, R\}$, třetí hráč má strategie $\{U, D\}$.

Hra v explicitním tvaru - příklady

Hra v normálním tvaru bude vypadat takto:

Player 3

U — Player 2

Player 1	L	R
T	$2, 7, 1$	$2, 7, 1$
B	$6, 2, 7$	$3, 3, 3$

D — Player 2

Player 1	L	R
T	$2, 7, 1$	$2, 7, 1$
B	$6, 2, 7$	$1, 1, 1$

Hledáme, která strategie je nejlepší odpovědí na daný strategický profil protihráčů:

Player 3

U — Player 2

Player 1	L	R
T	$2, 7, 1$	$2, 7, 1$
B	$6, 2, 7$	$3, 3, 3$

D — Player 2

Player 1	L	R
T	$2, 7, 1$	$2, 7, 1$
B	$6, 2, 7$	$1, 1, 1$

Hra v explicitním tvaru - příklady

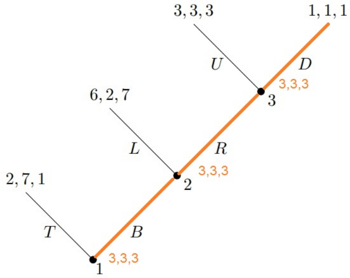
Hra má tři Nashovy rovnovážné body v ryzích strategiích

$$\{(T, R, D), (B, R, U), (B, L, D)\}$$

s výplatami

$$\{(2, 7, 1), (3, 3, 3), (6, 2, 7)\}.$$

Hra má tři podhry včetně sebe samé. Pro každou hru určíme rovnovážnou strategii a nahradíme ji listem s příslušnými výplatami.



Dokonalou rovnováhou podhry jsou strategie (B, R, D) s výplatami $(3, 3, 3)$.

$\triangle$

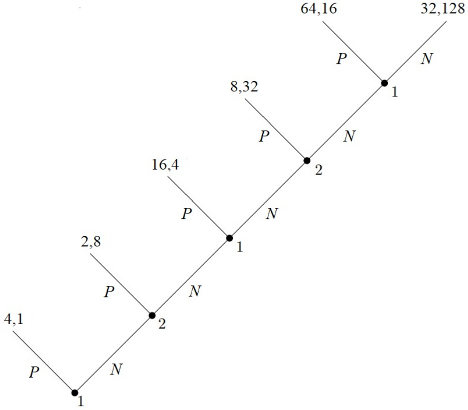
Příklad - stonožka

Ukážeme si hru zvanou Stonožka s následujícími pravidly:

- máme dva hráče
- je dán počet tahů (100)
- na začátku hry 1. hráč vyhrává více než dvojnásobek výhry druhého hráče
- hráč na tahu může buď výhru přijmout (P) a hra tím končí, nebo výhru nepřijmout (N)
- pokud hráč na tahu nepřijme, tak hra pokračuje tak, že se výhra zdvojnásobí a vymění mezi hráči
- jde o hru s dokonalou informací
- hra tedy má Nashovo rovnovážné řešení v čistých strategiích

Hra v explicitním tvaru - příklady

Ukážeme si hru na příkladu pěti tahů a rozdílu výher ve výši čtyřnásobku. Z pěti tahů nám bude jasné řešení hry při sto tazích.



Hru převedeme na hru v normálním tvaru.

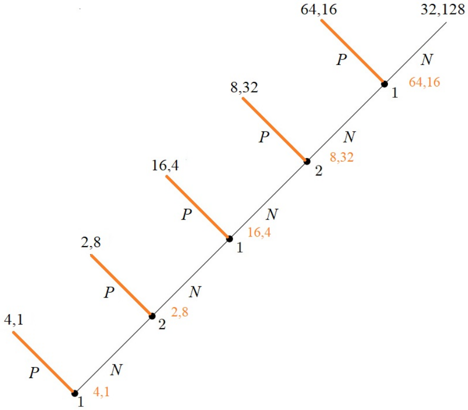
	PP	*PN*	*NP*	*NN*
PPP	4,1	4,1	4,1	4,1
PPN	4,1	4,1	4,1	4,1
PNP	4,1	4,1	4,1	4,1
PNN	4,1	4,1	4,1	4,1
NPP	2,8	2,8	16,4	16,4
NPN	2,8	2,8	16,4	16,4
NNP	2,8	2,8	8,32	64,16
NNN	2,8	2,8	8,32	32,128

Hra má osm rovnovážných bodů v ryzích strategiích s výplatami 4,1.

$$\{(PPP, PP), (PPP, PN), (PPN, PP), (PPN, PN),$$

$$(PNP, PP), (PNP, PN), (PNN, PP), (PNN, PN)\}$$

Nalezneme dokonalou rovnováhu podhry.



Dokonalá rovnováha podhry je kombinace strategií

$$(PPP, PP)$$

s výplatami (4,1). Řešením hry je okamžitě hru ukončit v prvním uzlu (nezávisle na celkovém počtu tahů, ať už pět, sto nebo tisíc). Hra ukazuje na paradox, že i když hráči mohou získat v této hypotetické hře vysoké výhry, jako racionální strategie se doporučuje hru ukončit a přijmout velmi malou výhru.

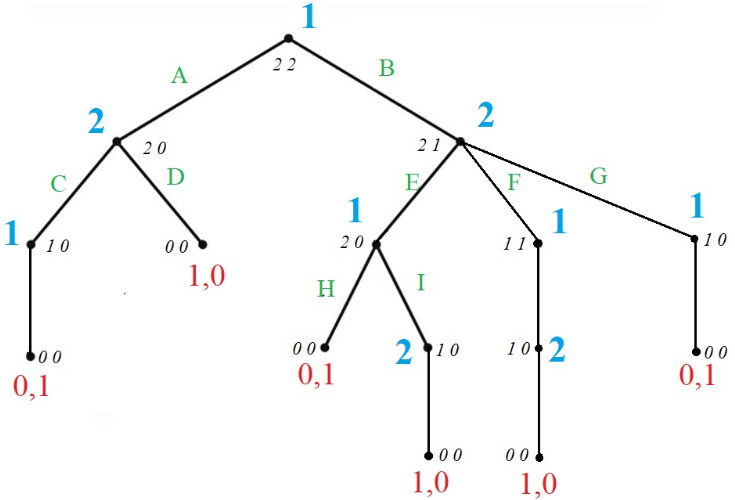
$\triangle$

Příklad - hra NIM

- hru NIM může hrát libovolný počet hráčů, kteří se střídají a odebírají herní kameny rozdělené do hromádek
- hráč může odebrat libovolný počet kamenů, avšak vždy alespoň jeden a kameny musí být pouze z jedné hromádky
- hráč, který byl nucen odebrat poslední kámen ve hře, prohrál
- zde se zaměříme na hru NIM pro dva hráče

Hra v explicitním tvaru - NIM

Neprve si ukážeme strom hry pro NIM 2x2. Nebudeme zobrazovat zvlášť symetrické situace jako 2-1 a 1-2, jedná se o ekvivalentní situaci.



Některé uzly nejsou rozhodovacími uzly, protože hráči nabízejí pouze jednu možnost, proto jsou nazývány průchozí uzly a pro jednoduchost jsme je neoznačovali jako strategie.

První hráč má strategie

$$\{(A, H), (A, I), (B, H), (B, I)\}$$

a druhý hráč má strategie

$$\{(C, E), (C, F), (C, G), (D, E), (D, F), (D, G)\}.$$

Hra v explicitním tvaru - NIM

Hru převedeme na hru v normálním tvaru.

	CE	CF	CG	DE	DF	DG
AH	0,1	0,1	**0,1**	1,0	1,0	1,0
AI	0,1	0,1	**0,1**	1,0	1,0	1,0
BH	0,1	1,0	**0,1**	0,1	1,0	0,1
BI	1,0	1,0	**0,1**	1,0	1,0	0,1

Hra má čtyři rovnovážné body.

$$\{(AH, CG), (AI, CG), (BH, CG), (BI, CG)\}$$

Tedy druhý hráč má vítěznou strategii (C, G) a je jedno, jakou strategii zahraje první hráč, nikdy nemůže vyhrát.

Hra v explicitním tvaru - NIM

- dále hru NIM zobecníme pro více hromádek s více kameny
- zvětší se tím rozhodovací strom, ale jelikož se jedná o hru s dokonalou informací, tak vítěze známe vždy předem (může to být první i druhý hráč)
- naším cílem je nyní zjistit podle počtu hromádek a počtu kamenů v jednotlivých hromádkách, který hráč má vítěznou strategii a jakou
- k tomu si připomeneme dvojkovou soustavu

dvojková (binární) soustava funguje stejně jako desítková

$$2651 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$1001_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 9$$

Prohlédněme si čísla 1-100 ve dvojkové soustavě.

DEC	BIN	DEC	BIN	DEC	BIN	DEC	BIN	DEC	BIN
1	1	21	10101	41	101001	61	111101	81	1010001
2	10	22	10110	42	101010	62	111110	82	1010010
3	11	23	10111	43	101011	63	111111	83	1010011
4	100	24	11000	44	101100	64	1000000	84	1010100
5	101	25	11001	45	101101	65	1000001	85	1010101
6	110	26	11010	46	101110	66	1000010	86	1010110
7	111	27	11011	47	101111	67	1000011	87	1010111
8	1000	28	11100	48	110000	68	1000100	88	1011000
9	1001	29	11101	49	110001	69	1000101	89	1011001
10	1010	30	11110	50	110010	70	1000110	90	1011010
11	1011	31	11111	51	110011	71	1000111	91	1011011
12	1100	32	100000	52	110100	72	1001000	92	1011100
13	1101	33	100001	53	110101	73	1001001	93	1011101
14	1110	34	100010	54	110110	74	1001010	94	1011110
15	1111	35	100011	55	110111	75	1001011	95	1011111
16	10000	36	100100	56	111000	76	1001100	96	1100000
17	10001	37	100101	57	111001	77	1001101	97	1100001
18	10010	38	100110	58	111010	78	1001110	98	1100010
19	10011	39	100111	59	111011	79	1001111	99	1100011
20	10100	40	101000	60	111100	80	1010000	100	1100100

Hra v explicitním tvaru - NIM

- v dalších krocích budeme potřebovat součet dvou čísel zapsaných ve dvojkové soustavě bez přenosu cifry do vyššího řádu, takzvaný Nim-součet nebo také xor, značíme $\bigoplus$
- tedy když procházíme cifry na odpovídajících si pozicích, tak pokud jsou stejné, bude odpovídající cifrou 1, jinak 0

$$111_2 \bigoplus 101_2 = 010_2$$

$$110_2 \bigoplus 1001_2 = 1111_2$$

- pro více čísel je postup obdobný, sečteme všechny jedničky na dané pozici a je-li jich lichý počet, napíšeme 1, jinak 0

$$11_2 \bigoplus 101_2 \bigoplus 111_2 \bigoplus 11_2 = 010_2$$

- NIM-součet je komutativní a asociativní a platí

$$x \bigoplus x = 0$$

Hra v explicitním tvaru - NIM

Vítezná strategie ve hře NIM

Vítěznou strategií ve hře NIM je zanechat na stole po svém tahu nulový Nim-součet vždy, dokud je na stole více než jedna hromádka s alespoň dvěma kameny. Ve chvíli, kdy zůstává na stole x hromádek s jedním kamenem a jedna hromádka s více kameny, je potřeba odebrat z hromádky s více kameny buď všechny kameny, nebo nechat právě jeden tak, aby na stole zůstal lichý počet hromádek s jedním kamenem.

Pozn. v případě varianty, že hráč odebírající poslední kámen vyhrává, se vítězná strategie liší tím, že na konci musí na stole zůstat sudý počet hromádek s jedním kamenem. Do té doby se vítězná strategie neliší, opět necháváme na stole nulový Nim-součet hromádek.

- pokud je na stole nulový Nim-součet hromádek, druhý hráč má vítěznou strategii
- pokud je na stole nenulový Nim-součet hromádek, první hráč má vítěznou strategii

Mějme hru se třemi hromádkami 3-4-5

$$\begin{aligned} 3 &= 011_2 \\ 4 &= 100_2 \\ 5 &= 101_2 \end{aligned}$$

$$11_2 \bigoplus 100_2 \bigoplus 101_2 = 010_2$$

Nim-součet je nenulový, první hráč má vítěznou strategii.

Hra v explicitním tvaru - NIM

Předvedeme ukázku hry, první hráč se drží vítězné strategie, tahy druhého hráče jsou zvoleny náhodně.

hráč na tahu	pozice na stole	Nim-součet	zahraný tah
1	3 4 5	$011 \bigoplus 100 \bigoplus 101$	1 4 5
2	1 4 5		1 3 5
1	1 3 5	$001 \bigoplus 011 \bigoplus 101$	1 3 2
2	1 3 2		0 3 2
1	0 3 2	$\bigoplus 011 \bigoplus 010$	0 2 2
2	0 2 2		0 1 2
1	0 1 2	nechá lichý počet hromádek	0 1 0
2	0 1 0		0 0 0

△

Dáma

- Dáma se hraje ve variantách s hracími deskami 12x12, 10x10, 8x8 a má různá pravidla pro skákání.
- Marion F. Tinsley byl mistrem ve hře, prohrál pouze sedmkrát za 45 let, z toho dvakrát proti počítačovému programu Chinook.
- Od roku 1996 je Chinook považován za neporazitelného.
- V roce 2007 Schaeffer a jeho tým oznámili, že po 18 letech výpočtů vyřešili hru dámu, dokazující, že dokonalá hra od obou stran vede k remíze.

Šachy

- Šachy jsou podstatně složitější než hra NIM, s více než 400 možnými pozicemi po prvním tahu obou hráčů.
- Klíčovým problémem při rozboru hry je tedy astronomický počet variant, který znemožňuje sestavení stromu hry. Počet možných pozic se odhaduje někde mezi 10^{40} až 10^{50}.
- Z teoretického hlediska jsou šachy stejně nudná hra jako NIM, protože již před začátkem hry by hráči měli vědět výsledek.
- Zásadní rozdíl je v tom, že se nikomu nepodařilo výsledek šachové hry vypočítat, počítače nejsou dostatečně rychlé a v dohledné době ani nebudou.
- Ovšem my víme, že každá konečná hra v explicitním tvaru s dokonalou informací má řešení v ryzích strategiích.

Hra v explicitním tvaru - šachy

- Šachy jdou modelově popsat hrou v explicitním tvaru, jde o hru s dokonalou informací, neboť každý hráč ví, v jakém uzlu se hra nachází, a hra je konečná, má konečný počet tahů (třikrát opakovaná pozice znamená remízu).
- Víme tedy, že buď má bílý hráč vítěznou strategii, nebo má černý hráč vítěznou strategii, nebo hra skončí remízou.
- Nevíme však, která možnost je správná.
- Zkušenosti ukazují, že bílý hráč prvním tahem získává určitou výhodu, takže vítězná strategie černého je nepravděpodobná.
- Počítačové programy prohledávají blízké okolí současné pozice, jelikož neobsahuje koncové uzly, používá uměle vytvořené ohodnocovací funkce, které hodnotí každou herní pozici z hlediska materiálního a pozičního.

Hry s neinteligentním hráčem

- Hry s neinteligentním hráčem jsou takové, ve kterých jeden z účastníků nemá schopnost rozumu nebo vědomého rozhodování. Místo toho jsou jeho akce řízeny přírodními zákony, náhodou nebo jednoduchými algoritmy.
- Ukážeme si jednoduchou hry se stochastickými prvky.
- Hra bude ovlivněna prvkem náhody, který ovlivňuje výsledky hry, se známým pravděpodobnostním rozdělením.

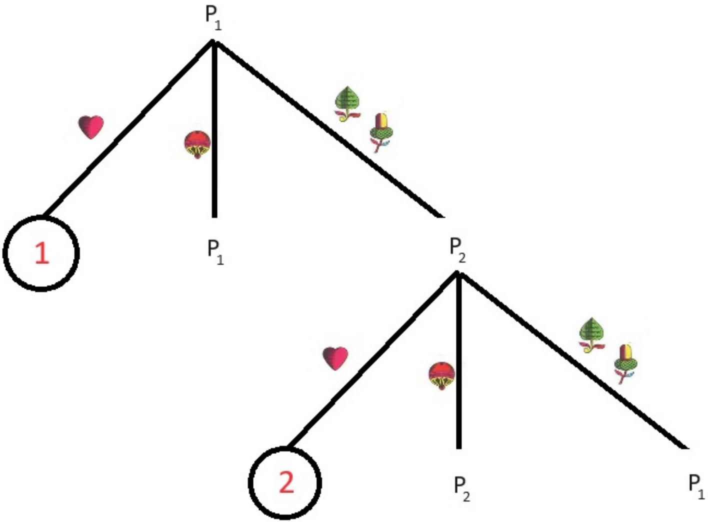
Hry s neinteligentním hráčem - příklad

Dva inteligentní hráči se účastní hry s balíčkem mariášových karet, které jsou položeny rubem nahoru. Pravidla hry jsou následující:

1) První hráč začíná tím, že si z balíčku vybere jednu kartu.
2) Pokud je vybraná karta červené barvy (srdce nebo kára), první hráč okamžitě vyhrává.
3) Pokud je vybraná karta kule (kříže), první hráč má možnost vybrat si další kartu.
4) Pokud je vybraná karta žaludy (piky) nebo zelená (trefy), tato karta se odkládá stranou a tah přechází na druhého hráče.
5) Druhý hráč pak pokračuje ve hře podle stejných pravidel.
6) Hra pokračuje střídavými tahy, dokud jeden z hráčů nevyhraje výběrem červené karty.

Cílem je určit pravděpodobnost, že první nebo druhý hráč vyhraje tuto hru.

Hry s neinteligentním hráčem - příklad



Hry s neinteligentním hráčem - příklad

Označme pravděpodobnost výhry prvního hráče p v případě, že je na řadě on, a pravděpodobnost výhry prvního hráče q v případě, že je na řadě druhý hráč.

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}q + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \\ q &= \frac{1}{4}q + \frac{1}{2}p \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy rovnic získáme $p = \frac{3}{5}$. První hráč zvítězí s pravděpodobností 60%, tedy druhý hráč zvítězí s pravděpodobností 40%.

Děkuji za pozornost.