DÚ č. 4 - riešenie

1. Nájdite derivácie nasledujúcich funkcií:

   (a) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

   $$y' = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right) =$$
   $$= \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

   (b) $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$

   $$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{-4x^3}{(1+x^4)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1+x^4}{x^4} \cdot \frac{4x^3(1+x^4) - 4x^7}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{x(1+x^4)^2}$$

   (c) $y = \ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

   $$y' = \frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

   (d) $y = \arccos\left(\sin x^2 - \cos x^2\right)$

   $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sin x^2 - \cos x^2\right)^2}} \cdot \left(2x\cos x^2 + 2x\sin x^2\right) =$$
   $$= -\frac{2x\left(\cos x^2 + \sin x^2\right)}{\sqrt{\sin\left(2x^2\right)}}$$

2. Pod akým uhlom pretína krivka $y = \ln x$ os x?

   Označme daný uhol α. Krivka $f(x) = \ln x$ pretína os x v bode $x = 1$. Preto $\operatorname{tg}\alpha = f'(1) = 1$, teda $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3. Pre aké $a > 0$ pretína krivka $y = \operatorname{arctg} ax$ os x pod uhlom väčším ako $89°$?

   Krivka $f(x) = \operatorname{arctg} ax$ pretína os x v bode $x = 0$ pod uhlom α. Vieme, že $f'(x) = \frac{a}{1+a^2x^2}$ a $\operatorname{tg}\alpha = f'(0) = a$. Má platiť $\alpha > 89°$, teda $\operatorname{tg}\alpha = a > \operatorname{tg} 89°$.

4. Nech

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \le 1, \\ ax + b & \text{pre } x > 1. \end{cases}$$

   Nájdite koeficienty a a b tak, aby bola funkcia $f(x)$ spojitá v bode 1 a mala v tomto bode deriváciu.

Aby bola funkcia $f(x)$ spojitá v bode 1, musí platiť $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$. Aby mala v tomto bode deriváciu, musí platiť $f'_-(1) = f'_+(1)$. Vieme, že

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1, \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (ax+b) = a+b, \\ f'_-(1) &= 2, \\ f'_+(1) &= a. \end{aligned}$$

Preto $a = 2$ a $b = -1$.

5. Nájdite lokálne extrémy funkcie $y = x\sqrt[3]{x-1}$.

   Funkciu zderivujeme: $y' = \sqrt[3]{x-1} + x \cdot \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4x-3}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, $x \neq 1$. Nájdeme stacionárne body: $\frac{4x-3}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$. Určíme znamienko prvej derivácie na intervaloch $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ a $(1, \infty)$. Funkcia je klesajúca na intervale $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ (derivácia je záporná) a rastúca na intervaloch $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ a $(1, \infty)$ (derivácia je kladná). V bode $x = \frac{3}{4}$ teda má lokálne minimum. Jeho hodnota je $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

6. Určte najväčšiu hodnotu súčinu m-tej a n-tej mocniny $(m, n > 0)$ dvoch kladných čísel, ktorých súčet je a.

   Označme dané kladné čísla x, y. Ich súčet je a, teda $y = a - x$. Hľadáme maximum funkcie $f(x) = x^m(a-x)^n$. Zderivujeme ju:

   $$f'(x) = mx^{m-1}(a-x)^n - x^m n(a-x)^{n-1} = x^{m-1}(a-x)^{n-1}(ma - mx - nx)$$

   a nájdeme stacionárne body: $x^{m-1}(a-x)^{n-1}(ma-mx-nx) = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$, $x = a$ alebo $x = \frac{ma}{m+n}$. Čísla x aj $a - x$ majú byť kladné, preto nás zaujíma len bod $x = \frac{ma}{m+n}$. Funkcia $f(x)$ je rastúca na intervale $\left\langle 0, \frac{ma}{m+n} \right\rangle$ a klesajúca na intervale $\left\langle \frac{ma}{m+n}, a \right\rangle$. V bode $x = \frac{ma}{m+n}$ je teda hľadané maximum. Preto $x = \frac{ma}{m+n}$, $y = \frac{na}{m+n}$ a $x^m y^n = \frac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$.