Kapitola 4 – Euklidovské prostory

4.1. **Definice euklidovského prostoru**

4.1.1. DEFINICE

Nechť E je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, $(\ ,\ ): E^2 \to \mathbb{R}$. E se nazývá euklidovský prostor, platí-li:

(I) Pro všechna $\vec{u} \in E$: $(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$.
(II) Pro všechna $\vec{u} \in E$: $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ právě tehdy, když $\vec{u} = \vec{0}$.
(III) Pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in E$: $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$.
(IV) Pro všechna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$: $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w})$.
(V) Pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pro všechna $c \in \mathbb{R}$: $(\vec{u}, c \cdot \vec{v}) = c \cdot (\vec{u}, \vec{v})$.

Pro $\vec{u}, \vec{v} \in E$ se číslo $(\vec{u}, \vec{v})$ nazývá skalární součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

4.1.2. PŘÍKLAD

Uvažme vektorový prostor $\mathbb{R}^n$. Definujeme $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + \cdots + x_n \cdot y_n$ pro libovolná $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pak $\mathbb{R}^n$ je euklidovský prostor.

4.2. **Cauchyova nerovnost**

4.2.1. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{v} \in E$. Normou vektoru $\vec{v}$ rozumíme číslo $\sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$. Normu vektoru $\vec{v}$ značíme $\|\vec{v}\|$.

4.2.2. VĚTA (Cauchyova)

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Platí: $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně závislé vektory.

Důkaz: Rozlišíme dva případy:

(I) $\vec{y} = \vec{0}$ (II) $\vec{y} \neq \vec{0}$

ad (I): $|(\vec{x}, \vec{y})| = |(\vec{x}, \vec{0})| = |0| = 0$, $\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{0}\| = \|\vec{x}\| \cdot 0 = 0$. Uvědomme si také, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$, tj. vektory $\vec{x}$ a $\vec{0}$, jsou lineárně závislé.

ad (II): Pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ položme $f(c) = (\vec{x} - c \cdot \vec{y}, \vec{x} - c \cdot \vec{y})$. Platí:
$0 \leq f(c) = (\vec{x}, \vec{x}) - 2 \cdot c \cdot (\vec{x}, \vec{y}) + c^2 \cdot (\vec{y}, \vec{y})$. Je $(\vec{y}, \vec{y}) > 0$. Kvadratická trojčlen $f(c)$ s reálnými koeficienty má nekladný diskriminant, tj. $(\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}) \leq 0$. Pak $\sqrt{(\vec{x}, \vec{y})^2} \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}$, čili $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Rovnost nastává právě tehdy, když $f(c)$ má nulový diskriminant, a to je právě tehdy, když existuje $c_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $f(c_0) = (\vec{x} - c_0 \cdot \vec{y}, \vec{x} - c_0 \cdot \vec{y}) = 0$ a to je právě tehdy, když existuje $c_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $\vec{x} = c_0 \cdot \vec{y}$, a to je právě tehdy, když vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně závislé.

4.3. **Norma a metrika**

4.3.1. VĚTA

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{v}, \vec{w} \in E$, $c \in \mathbb{R}$. Platí:

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0$
(b) $\|\vec{v}\| = 0$ právě tehdy, když $\vec{v} = \vec{0}$
(c) $\|c \cdot \vec{v}\| = |c| \cdot \|\vec{v}\|$
(d) $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Důkaz:

(a) Důkaz přenecháváme čtenáři.
(b) Důkaz přenecháváme čtenáři.

(c) Důkaz přenecháváme čtenáři.

(d) $\|\vec{v}+\vec{w}\|=(\vec{v}+\vec{w},\ \vec{v}+\vec{w})=(\vec{v},\ \vec{v})+2\cdot(\vec{v},\ \vec{w})+(\vec{w},\ \vec{w})$

$=\|\vec{v}\|^2+2\cdot(\vec{v},\ \vec{w})+\|\vec{w}\|^2\leq\|\vec{v}\|^2+2\cdot|(\vec{v},\ \vec{w})|+\|\vec{w}\|^2$.

Podle Cauchyovy nerovnosti je $|(\vec{v},\ \vec{w})|\leq\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$, takže

$\|\vec{v}+\vec{w}\|^2\leq\|\vec{v}\|^2+2\cdot\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|+\|\vec{w}\|^2=(\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|)^2$. Odtud máme: $\|\vec{v}+\vec{w}\|\leq\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$.

4.3.2. DEFINICE

Nechť M je množina, $\rho:\mathrm{M}^2\rightarrow\mathbb{R}$. Zobrazení ρ se nazývá metrika na množině M, platí-li:

(I) Pro všechna $x,\ y\in\mathrm{M}$: $\rho(x,\ y)\geq0$.

(II) Pro všechna $x,\ y\in\mathrm{M}$: $\rho(x,\ y)=0$ právě tehdy, když $x=y$.

(III) Pro všechna $x,\ y\in\mathrm{M}$: $\rho(x,\ y)=\rho(y,\ x)$.

(IV) Pro všechna $x,\ y,\ z\in\mathrm{M}$: $\rho(x,\ z)\leq\rho(x,\ y)+\rho(y,\ z)$.

4.3.3. VĚTA

Nechť E je euklidovský prostor. Platí: Zobrazení $\rho:E^2\rightarrow\mathbb{R}$ definované vztahem $\rho(\vec{x},\ \vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|$ (pro každé $\vec{x},\ \vec{y}\in E$) je metrika na množině E.

Důkaz: Ověříme, že zobrazení ρ splňuje podmínky (I) – (IV) z definice 4.3.2.

(I) ověření přenecháváme čtenáři

(II) ověření přenecháváme čtenáři

(III) ověření přenecháváme čtenáři

(IV) Nechť $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\in E$. Chceme: $\rho(\vec{x},\ \vec{z})\leq\rho(\vec{x},\ \vec{y})+\rho(\vec{y},\ \vec{z})$.

$\rho(\vec{x},\ \vec{z})=\|\vec{x}-\vec{z}\|=\|(\vec{x}-\vec{y})+(\vec{y}-\vec{z})\|\leq\|\vec{x}-\vec{y}\|+\|\vec{y}-\vec{z}\|=\rho(\vec{x},\ \vec{y})+\rho(\vec{y},\ \vec{z})$ (využili jsme trojúhelníkovou nerovnost – viz 4.3.1.).

4.4. **Ortogonalita, velikost úhlu vektorů**

4.4.1. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{x},\ \vec{y}\in E$. Říkáme, že vektor $\vec{x}$ je ortogonální k vektoru $\vec{y}$, pokud $(\vec{x},\ \vec{y})=0$. Označení $\vec{x}\perp\vec{y}$.

4.4.2. POZNÁMKA

$(\vec{x},\ \vec{y})=0$ právě tehdy, když $(\vec{y},\ \vec{x})=0$, neboť $(\vec{x},\ \vec{y})=(\vec{y},\ \vec{x})$. Takže $\vec{x}\perp\vec{y}$ právě tehdy, když $\vec{y}\perp\vec{x}$. Proto říkáme, že vektory $\vec{x},\ \vec{y}$ jsou vzájemně ortogonální.

4.4.3. VĚTA (Pythagorova)

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{x},\ \vec{y}\in E$. Platí:

$\vec{x}\perp\vec{y}$ právě tehdy, když $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2$.

Důkaz: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=(\vec{x}+\vec{y},\ \vec{x}+\vec{y})=(\vec{x},\ \vec{x})+2\cdot(\vec{x},\ \vec{y})+(\vec{y},\ \vec{y})=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\cdot(\vec{x},\ \vec{y})$. Vidíme, že $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2\Leftrightarrow2\cdot(\vec{x},\ \vec{y})=0\Leftrightarrow(\vec{x},\ \vec{y})=0\Leftrightarrow\vec{x}\perp\vec{y}$.

Poznatek:

Nechť E je euklidovský prostor $\vec{x},\ \vec{y}\in E$, $\vec{x}\neq\vec{0}$, $\vec{y}\neq\vec{0}$. Podle Cauchyovy nerovnosti (4.2.2.) platí: $|(\vec{x},\ \vec{y})|\leq\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$. Pak $\dfrac{|(\vec{x},\ \vec{y})|}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}\leq1$, neboli ekvivalentně $-1\leq\dfrac{(\vec{x},\ \vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}\leq1$.

Pak existuje právě jedno $\alpha\in[0,\ \pi]$ tak, že $\cos\alpha=\dfrac{(\vec{x},\ \vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$.

Tento poznatek ospravedlňuje následující definici.

4.4.4. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{x}, \vec{y} \in E$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Nechť $\alpha \in [0, \pi]$, $\cos\alpha = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$.

Číslo α se nazývá velikost úhlu vektorů $\vec{x}, \vec{y}$.

4.5. **Ortogonální báze**

4.5.1. TVRZENÍ

Nechť E je euklidovský prostor, $n \in \mathbb{N}$, $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in E - \{\vec{0}\}$. Jestliže $\vec{v_i} \perp \vec{v_j}$ pro každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, pak vektory $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: Nechť $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_n \cdot \vec{v_n} = \vec{0}$. Chceme: $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Buď $i \in \{1, \ldots, n\}$. Platí:

$$
\begin{aligned}
0 &= (\vec{0}, \vec{v_i}) = (c_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + c_n \cdot \vec{v_n}, \vec{v_i}) \\
&= c_1 \cdot (\vec{v_1}, \vec{v_i}) + \cdots + c_{i-1} \cdot (\overrightarrow{v_{i-1}}, \vec{v_i}) + c_i \cdot (\vec{v_i}, \vec{v_i}) + c_{i+1} \cdot (\overrightarrow{v_{i+1}}, \vec{v_i}) + \cdots + c_n \cdot (\vec{v_n}, \vec{v_i}) \\
&= c_1 \cdot 0 + \cdots + c_{i-1} \cdot 0 + c_i \cdot (\vec{v_i}, \vec{v_i}) + c_{i+1} \cdot 0 + \cdots + c_n \cdot 0 \\
&= c_i \cdot (\vec{v_i}, \vec{v_i}).
\end{aligned}
$$

Protože $\vec{v_i} \neq \vec{0}$, je $(\vec{v_i}, \vec{v_i}) \neq 0$ a tudíž $c_i = 0$.

4.5.2. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, $B \subseteq E$. B se nazývá ortogonální báze prostoru E, platí-li:

(I) B je báze vektorového prostoru E.

(II) Pro všechny vektory $\vec{x}, \vec{y} \in B$: Jestliže $\vec{x} \neq \vec{y}$, pak $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Je-li navíc splněna podmínka

(III) Pro všechny vektory $\vec{x} \in B$: $\|\vec{x}\| = 1$.

nazývá se B ortonormální báze prostoru E.

4.5.3. ALGORITMUS (Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces)

Nechť E je euklidovský prostor.

VSTUP: Lineárně nezávislé vektory $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$.

VÝSTUP: Nenulové vektory $\vec{g_1}, \vec{g_2}, \ldots, \vec{g_n}$ splňující $\langle\{\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_n}\}\rangle = \langle\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}\rangle$ a $\vec{g_i} \perp \vec{g_j}$ pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

PROCES: Na počátku klademe $\vec{g_1} = \vec{v_1}$. Nechť $1 < k \leq n$ a nechť jsou již sestrojeny vektory $\vec{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_{k-1}}$. Klademe $\vec{g_k} = \vec{v_k} + c_1 \cdot \vec{g_1} + \cdots + c_{k-1} \cdot \overrightarrow{g_{k-1}}$, kde

$$
c_1 = -\frac{(\vec{g_1}, \vec{v_k})}{(\vec{g_1}, \vec{g_1})},\ c_2 = -\frac{(\vec{g_2}, \vec{v_k})}{(\vec{g_2}, \vec{g_2})},\ \ldots,\ c_{k-1} = -\frac{(\overrightarrow{g_{k-1}}, \vec{v_k})}{(\overrightarrow{g_{k-1}}, \overrightarrow{g_{k-1}})}.
$$

Důkaz korektnosti algoritmu: Indukcí pro $k = 1, 2, \ldots, n$ dokážeme:

(I) vektory $\vec{g_1}, \vec{g_2}, \ldots, \vec{g_k}$ jsou nenulové.

(II) $\langle\{\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_k}\}\rangle = \langle\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}\}\rangle$.

(III) $\vec{g_i} \perp \vec{g_j}$ pro každé $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$.

$k = 1$:

ad (I) $\vec{g_1} = \vec{0}$ by znamenalo, že $\vec{v_1} = \vec{0}$ a že vektory $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ jsou lineárně závislé;to by byl spor. Takže $\vec{g_1} \neq \vec{0}$.

ad (II): zřejmě platí

ad (III): zřejmě platí

$k > 1$:

ad (I): Z indukčního předpokladu víme, že vektory $\vec{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_{k-1}}$ jsou nenulové. Zbývá ukázat, že $\vec{g_k} \neq \vec{0}$. Předpokládejme opak, tj. $\vec{g_k} = \vec{0}$. Pak

$\vec{v_k} = (-c_1) \cdot \vec{g_1} + \cdots + (-c_{k-1}) \cdot \overrightarrow{g_{k-1}} \in \langle\{\vec{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_{k-1}}\}\rangle$

Ovšem dle indukčního předpokladu $\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\}\rangle=\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\}\rangle$, takže $\vec{v}_k\in\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\}\rangle$. Tedy vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k$ nejsou lineárně nezávislé. Pak též vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k, \dots, \vec{v}_n$ nejsou lineárně nezávislé, spor. Nutně tedy $\vec{g}_k\neq\vec{0}$.

ad (II): $\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\}\rangle\subseteq\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}\rangle$: Stačí ukázat, že $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\in\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}\rangle$. Dle indukčního předpokladu $\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\}\rangle=\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\}\rangle$, takže $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\in\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\}\rangle=\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\}\rangle\subseteq\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k\}\rangle$. Zbývá ukázat, že $\vec{g}_k\in\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}\rangle$. Víme, že $\vec{g}_k=\vec{v}_k+c_1\cdot\vec{g}_1+\dots+c_{k-1}\cdot\vec{g}_{k-1}$. Ovšem $\vec{v}_k, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\in\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}\rangle$, takže $\vec{g}_k\in\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}\rangle$.

$\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}\rangle\subseteq\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\}\rangle$:

Stačí ukázat, že $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\in\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\}\rangle$. Dle indukčního předpokladu $\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\}\rangle=\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\}\rangle$, takže $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\in\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\}\rangle=\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\}\rangle\subseteq\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}, \vec{g}_k\}\rangle$. Zbývá ukázat, že $\vec{v}_k\in\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\}\rangle$. Víme, že $\vec{v}_k=(-c_1)\cdot\vec{g}_1+\dots+(-c_{k-1})\cdot\vec{g}_{k-1}+\vec{g}_k$. Nutně tedy $\vec{v}_k\in\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\}\rangle$.

ad (III): Nechť $i, j\in\{1, \dots, k\}$, $i\neq j$. Chceme: $\vec{g}_i\perp\vec{g}_j$. Jestliže $i, j\leq k-1$, pak $\vec{g}_i\perp\vec{g}_j$ dle indukčního předpokladu. Zbývá tedy ukázat, že $g_k\perp g_1, g_k\perp g_2, \dots, g_k\perp g_{k-1}$. Zvolíme libovolně $i\in\{1, \dots, k-1\}$ a počítejme:

$(\vec{g}_k, \vec{g}_i)=(\vec{v}_k+c_1\cdot\vec{g}_1+\dots+c_{k-1}\cdot\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_i)=$

$=(\vec{v}_k, \vec{g}_i)+c_1\cdot(\vec{g}_1, \vec{g}_i)+\dots+c_{i-1}\cdot(\vec{g}_{i-1}, \vec{g}_i)+c_i\cdot(\vec{g}_i, \vec{g}_i)+c_{i+1}\cdot(\vec{g}_{i+1}, \vec{g}_i)+\dots+c_{k-1}\cdot(\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_i).$

Ještě jednou si uvědomme, že dle idukčního předpokladu $(\vec{g}_1, \vec{g}_i)=0, \dots, (\vec{g}_{i-1}, \vec{g}_i)=0, (\vec{g}_{i+1}, \vec{g}_i)=0, \dots, (\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_i)=0$. Pak

$(\vec{g}_k, \vec{g}_i)=(\vec{v}_k, \vec{g}_i)+c_1\cdot 0+\dots+c_{i-1}\cdot 0+c_i\cdot(\vec{g}_i, \vec{g}_i)+c_{i+1}\cdot 0+\dots+c_{k-1}\cdot 0=$

$=(\vec{v}_k, \vec{g}_i)+c_i\cdot(\vec{g}_i, \vec{g}_i)=(\vec{v}_k, \vec{g}_i)+(-\dfrac{(\vec{g}_i, \vec{v}_k)}{(\vec{g}_i, \vec{g}_i)})\cdot(\vec{g}_i, \vec{g}_i)=$

$=(\vec{v}_k, \vec{g}_i)-(\vec{g}_i, \vec{v}_k)=0.$

Tudíž $\vec{g}_k\perp\vec{g}_i$.

4.5.4. VĚTA

V každém euklidovském prostoru konečné dimenze existuje ortogonální báze.

Důkaz: Nechť E je euklidovský prostor konečné dimenze. Nechť $dim\, E=n$. Je-li $n=0$, je $\emptyset$ ortogonální báze prostoru E. Nechť $n>0$. Nechť $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ je báze prostoru E. Aplikujeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces (4.5.3.) na vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Obdržíme vektory $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$. Ukážeme, že $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$ je ortogonální báze prostoru E. Víme, že $\langle\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}\rangle=\langle\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}\rangle=E$. Dále, $\vec{g}_i\perp\vec{g}_j$ pro každé $i, j\in\{1, \dots, n\}$, $i\neq j$. Zbývá dokázat, že vektory $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ jsou lineárně nezávislé. To ihned plyne z 4.5.1. (Uvědomme si, že vektory $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ jsou nenulové).

4.5.5. DŮSLEDEK

V každém netriviálním euklidovském prostoru konečné dimenze existuje ortonormální báze.

Důkaz: Nechť E je netriviální euklidovský prostor konečné dimenze. Dle 4.5.4. existuje ortogonální báze B prostoru E. Nechť $B=\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$ ($n=dim\, E$). Je $\vec{g}_i\neq\vec{0}$ pro každé $i\in\{1, \dots, n\}$ - jinak bychom měli spor s lineární nezávislostí vektorů $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$. Položme $\vec{e}_1=\dfrac{1}{\|\vec{g}_1\|}\cdot\vec{g}_1, \dots, \vec{e}_n=\dfrac{1}{\|\vec{g}_n\|}\cdot\vec{g}_n$. Ukážeme: $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ je ortonormální báze prostoru E. Protože $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ jsou nenulové, jsou též $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ nenulové. Nechť $i, j\in\{1, \dots, n\}$, $i\neq j$. Počítejme:

$(\vec{e}_i, \vec{e}_j)=(\dfrac{1}{\|\vec{g}_i\|}\cdot\vec{g}_i, \dfrac{1}{\|\vec{g}_j\|}\cdot\vec{g}_j)=\dfrac{1}{\|\vec{g}_i\|}\cdot\dfrac{1}{\|\vec{g}_j\|}\cdot(\vec{g}_i, \vec{g}_j)=0$, neboť $\vec{g}_i\perp\vec{g}_j$. Takže $\vec{e}_i\perp\vec{e}_j$.

Dále: Nechť $i \in \{1, \ldots, n\}$. Počítejme $\|\vec{e}_i\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \cdot \vec{g}_i \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \right| \cdot \|\vec{g}_i\| = \frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \cdot \|\vec{g}_i\| = 1$.
Protože $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ jsou nenulové a $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, jsou vektory $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ lineárně nezávislé (viz 4.5.1.). Jelikož $\dim E = n$, je $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ báze prostoru E, která je ortonormální.

4.6. **Izomorfismus euklidovských prostorů**

4.6.1. DEFINICE
Nechť E_1 je euklidovský prostor se skalárním součinem $(\ ,\ )_1$, nechť E_2 je euklidovský prostor se skalárním součinem $(\ ,\ )_2$, $\varphi\, E_1 \to E_2$. Zobrazení φ se nazývá izomorfismus euklidovských prostorů E_1 a E_2 platí-li:
(I) φ je izomorfismus vektorových prostorů E_1 a E_2.
(II) Pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in E_1$ platí: $(\vec{x}, \vec{y})_1 = (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}))_2$.
Pokud existuje izomorfismus euklidovských prostorů E_1 a E_2, říkáme, že prostory E_1 a E_2 jsou izomorfní.

4.7. **Věta o reprezentaci euklidovských prostorů konečné dimenze**

4.7.1. VĚTA (o reprezentaci euklidovských prostorů konečné dimenze)
Nechť E je euklidovský prostor konečné dimenze, $\dim E = n$ ($n \in \mathbb{N}$). Platí: euklidovské prostory E a $\mathbb{R}^n$ jsou izomorfní.
Důkaz: Dle 4.5.5. existuje ortonormální báze $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ euklidovského prostoru E. Pro každé $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ položme $\varphi(\vec{x}) = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n$. Zřejmě φ zobrazuje $\mathbb{R}^n$ do E. Ukážeme, že φ je izomorfismus euklidovských prostorů:
(I) φ je izomorfismus vektorových prostorů $\mathbb{R}^n$ a E.
(a) φ je homomorfismus
Nechť $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Chceme: $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$.

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}+\vec{y}) &= \varphi((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) = \varphi((x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)) \\ &= (x_1+y_1)\cdot\vec{e}_1 + \cdots + (x_n+y_n)\cdot\vec{e}_n = x_1\cdot\vec{e}_1 + y_1\cdot\vec{e}_1 + \cdots + x_n\cdot\vec{e}_n + y_n\cdot\vec{e}_n \\ &= (x_1\cdot\vec{e}_1 + \cdots + x_n\cdot\vec{e}_n) + (y_1\cdot\vec{e}_1 + \cdots + y_n\cdot\vec{e}_n) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}).\end{aligned}$$

Nechť $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Chceme: $\varphi(c\cdot\vec{x}) = c\cdot\varphi(\vec{x})$.

$$\begin{aligned}&\varphi(c\cdot\vec{x}) = \varphi(c\cdot(x_1, \ldots, x_n)) = \varphi((c\cdot x_1, \ldots, c\cdot x_n)) = (c\cdot x_1)\cdot\vec{e}_1 + \cdots + (c\cdot x_n)\cdot\vec{e}_n \\ &= c\cdot(x_1\cdot\vec{e}_1) + \cdots + c\cdot(x_n\cdot\vec{e}_n) = c\cdot(x_1\cdot\vec{e}_1 + \cdots + x_n\cdot\vec{e}_n) = c\cdot\varphi(\vec{x}).\end{aligned}$$

(b) φ je injekce
Nechť $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{y})$. Chceme: $\vec{x} = \vec{y}$.

$$\vec{0} = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y}) = (x_1\cdot\vec{e}_1 + \cdots + x_n\cdot\vec{e}_n) - (y_1\cdot\vec{e}_1 + \cdots + y_n\cdot\vec{e}_n) = (x_1 - y_1)\cdot\vec{e}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\cdot\vec{e}_n.$$

Vektory $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ jsou lienárně nezávislé, takže $x_1 - y_1 = \cdots = x_n - y_n = 0$, což dává $x_1 = y_1, \cdots, x_n = y_n$.
(c) φ je surjekce
Nechť $\vec{y} \in E$. Chceme: existuje $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\varphi(\vec{x}) = \vec{y}$. Víme, že $\langle B \rangle = E$. Existují tedy $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, $\vec{y} = y_1\cdot\vec{e}_1 + \cdots + y_n\cdot\vec{e}_n$. Položme $\vec{x} = (y_1, \ldots, y_n)$. Pak $\varphi(\vec{x}) = y_1\cdot\vec{e}_1 + \cdots + y_n\cdot\vec{e}_n = \vec{y}$.
(II) Nechť $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Chceme: $(\vec{x}, \vec{y}) = (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}))$.

$$
\begin{aligned}
(\varphi(\vec{x}),\ \varphi(\vec{y})) &= (x_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+x_n\cdot\vec{e}_n,\ y_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+y_n\cdot\vec{e}_n)\\
&= (x_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+x_n\cdot\vec{e}_n,\ y_1\cdot\vec{e}_1)+\cdots+(x_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+x_n\cdot\vec{e}_n,\ y_n\cdot\vec{e}_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot\vec{e}_i,\ y_1\cdot\vec{e}_1)+\cdots+\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot\vec{e}_i,\ y_n\cdot\vec{e}_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_1\cdot(\vec{e}_i,\ \vec{e}_1)+\cdots+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_n\cdot(\vec{e}_i,\ \vec{e}_n).
\end{aligned}
$$

Uvědomme si, že $(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j)=0$ pro každé $i,\ j\in\{1,\ \dots,\ n\}$, $i\neq j$. Pak

$$
\begin{aligned}
(\varphi(\vec{x}),\ \varphi(\vec{y})) &= x_1\cdot y_1\cdot(\vec{e}_1,\ \vec{e}_1)+x_2\cdot y_2\cdot(\vec{e}_2,\ \vec{e}_2)+\cdots+x_n\cdot y_n\cdot(\vec{e}_n,\ \vec{e}_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i\cdot\|\vec{e}_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i\cdot 1^2=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i=(\vec{x},\ \vec{y}).
\end{aligned}
$$

4.8. **Ortogonální doplněk podprostoru**

4.8.1. DEFINICE

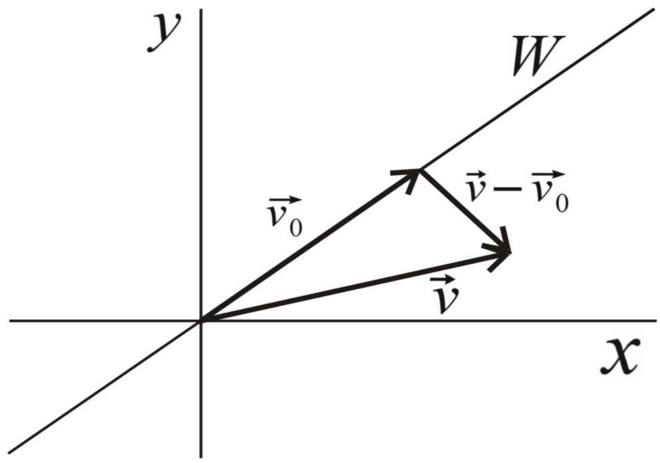
Nechť E je euklidovský prostor, W je podprostor prostoru E. Říkáme, že vektor $\vec{v}$ je ortogonální k podrpostoru W, jestliže $\vec{v}\perp\vec{x}$ pro každý vektor $\vec{x}\in W$ (značení: $\vec{v}\perp W$).

4.8.2. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, W je podprostor prostoru E. Množina $\{\vec{v}\in E|\vec{v}\perp W\}$ se nazývá ortogonální doplněk podprostoru W (v prostoru E). Označení: $W^{\perp}$.

4.8.3. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, W je podprostor prostoru E, $\vec{v}\in E$. Vektor $\vec{v}_0\in W$ se nazývá ortogonální průmět vektoru $\vec{v}$ do podprostoru W, jestliže $\vec{v}-\vec{v}_0\perp W$.



4.8.4. TVRZENÍ

Ortogonální průmět vektoru do podprostoru konečné dimenze vždy existuje a je určen jednoznačně.

Důkaz: Buď E euklidovský prostor, W jeho podprostor konečné dimenze, $\vec{v}\in E$.

Rozlišme dva případy:

(I) W je triviální.

Položíme $\vec{v}_0=\vec{0}$. Jiná možnost ani není.

(II) W je netriviální.

Podle 4.5.5. existuje ortonormální báze $\{\vec{e}_1,\ \dots,\ \vec{e}_k\}$ podprostoru W ($k=dim\,W$). Nejdříve si uvědomme: $\vec{x}\perp W$ právě tehdy, když $\vec{x}\perp\vec{e}_i$ pro každé $i\in\{1,\ \dots,\ k\}$. ($\vec{x}$ je libovolný vektor z E).

Zdůvodnění:

Nechť $\vec{y}\in W$, $\vec{x}\perp\vec{e}_i$ pro $i=1, \ldots, k$. Chceme: $\vec{x}\perp\vec{y}$.
Existují $d_1, \ldots, d_k\in\mathbb{R}$ tak, že $\vec{y}=d_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+d_k\cdot\vec{e}_k$.
Pak $(\vec{x}, \vec{y})=(\vec{x}, d_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+d_k\cdot\vec{e}_k)=d_1\cdot(\vec{x}, \vec{e}_1)+\cdots+d_k\cdot(\vec{x}, \vec{e}_k)=d_1\cdot 0+\cdots+d_k\cdot 0=0$.
Takže $\vec{x}\perp\vec{y}$.
Hledáme $c_1, \ldots, c_k\in\mathbb{R}$ tak, aby $\vec{v}-(c_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+c_k\cdot\vec{e}_k)\perp\vec{e}_i$ pro každé $i\in\{1, \ldots, k\}$. K ukončení důkazu tvrzení stačí ukázat, že následující systém k rovnic o neznámých $c_1, \ldots, c_k$ má právě jedno řešení:

$$\begin{aligned}&(\vec{v}-(c_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+c_k\cdot\vec{e}_k), \vec{e}_1)=0\\ &\vdots\\ &(\vec{v}-(c_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+c_k\cdot\vec{e}_k), \vec{e}_k)=0.\end{aligned}$$

Soustavu označíme $*$.

Nechť $i\in\{1, \ldots, k\}$. Počítejme:

$$(\vec{v}-(c_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+c_k\cdot\vec{e}_k), \vec{e}_i)=(\vec{v}, \vec{e}_i)-((c_1\cdot\vec{e}_1+\cdots+c_k\cdot\vec{e}_k), \vec{e}_i)$$
$$=(\vec{v}, \vec{e}_i)-\sum_{j=1}^{k} c_j\cdot(\vec{e}_j, \vec{e}_i)=(\vec{v}, \vec{e}_i)-c_i\cdot(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$$
$$=(\vec{v}, \vec{e}_i)-c_i\cdot 1=(\vec{v}, \vec{e}_i)-c_i.$$

Soustava $(*)$ má tedy tvar

$$\begin{aligned}&(\vec{v}, \vec{e}_1)-c_1=0\\ &\vdots\\ &(\vec{v}, \vec{e}_k)-c_k=0\end{aligned}$$

a je vidět, že má právě jedno řešení.

4.8.5. VĚTA

Nechť E je euklidovský prostor, W je podprostor prostoru E.
Platí: $W^\perp$ je podprostor prostoru E a (v případě, že E má konečnou dimenzi) $\dim W+\dim W^\perp=\dim E$, $W+W^\perp=E$.
Důkaz:
(I) Dokážeme, že $W^\perp$ je podprostor.
Nechť $\vec{u}, \vec{v}\in W^\perp$. Chceme: $\vec{u}+\vec{v}\in W^\perp$.
Nechť $\vec{x}\in W$. Počítejme: $(\vec{u}+\vec{v}, \vec{x})=(\vec{u}, \vec{x})+(\vec{v}, \vec{x})=0+0=0$, tedy $\vec{u}+\vec{v}\perp W$, $\vec{u}+\vec{v}\in W^\perp$.
Nechť $\vec{u}\in W^\perp$, $c\in\mathbb{R}$. Chceme: $c\cdot\vec{u}\in W^\perp$.
Nechť $\vec{x}\in W$. Počítejme:
$(c\cdot\vec{u}, \vec{x})=c\cdot(\vec{u}, \vec{x})=c\cdot 0=0$. Tedy $c\cdot\vec{u}\perp W$, $c\cdot\vec{u}\in W^\perp$.
Ještě chceme: $\vec{0}\in W^\perp$. Zřejmě pro každé $\vec{x}\in W$ je $(\vec{0}, \vec{x})=0$, tedy $\vec{0}\perp W$, $\vec{0}\in W^\perp$.
(II) Předpokládejme, že E má konečnou dimenzi. Nejdříve dokážeme, že $W+W^\perp=E$.
$W+W^\perp\subseteq E$: To je jasné.
$E\subseteq W+W^\perp$: Nechť $\vec{v}\in E$. Protože E má konečnou dimenzi, má konečnou dimenzi též podprostor W. Dle 4.8.4. existuje ortogonální průmět $\vec{v}_0$ vektoru $\vec{v}$ do prostoru W. Platí: $\vec{v}=\vec{v}_0+(\vec{v}-\vec{v}_0)$, $\vec{v}_0\in W$, $\vec{v}-\vec{v}_0\perp W$, tj. $\vec{v}-\vec{v}_0\in W^\perp$. Vidíme, že $\vec{v}\in W+W^\perp$.
Dle 3.2.2. platí: $\dim W+\dim W^\perp=\dim(W\cap W^\perp)+\dim(W+W^\perp)$. Vzhledem k výše dokázanému $\dim W+\dim W^\perp=\dim(W\cap W^\perp)+\dim E$. Nechť $\vec{x}\in W\cap W^\perp$. Pak $\vec{x}\perp\vec{x}$, tedy $(\vec{x}, \vec{x})=0$, což dává $\vec{x}=\vec{0}$. Proto $W\cap W^\perp=\{\vec{0}\}$, $\dim(W\cap W^\perp)=0$, $\dim W+\dim W^\perp=\dim E$.

4.8.6. VĚTA

Nechť E je euklidovský prostor, P je podprostor prostoru E, $\vec{v}\in E$, $\vec{v}_0$ je ortogonální průmět vektoru $\vec{v}$ do P ($\vec{v}_0\in P$).
Platí: Pro všechna $\vec{x}\in P$ je $\|\vec{v}-\vec{v}_0\|\leq\|\vec{v}-\vec{x}\|$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $\vec{x}=\vec{v}_0$.
Důkaz: Nechť $\vec{x}\in P$. $\vec{v}-\vec{x}=(\vec{v}-\vec{v}_0)+(\vec{v}_0-\vec{x})$. Je $\vec{v}-\vec{v}_0\perp P$, tedy specielně $\vec{v}-\vec{v}_0\perp\vec{v}_0-\vec{x}$.

Podle Pythagorovy věty (4.4.3.) platí: $\|\vec{v}-\vec{x}\|^2=\|\vec{v}-\vec{v_0}\|^2+\|\vec{v_0}-\vec{x}\|^2$. Pak $\|\vec{v}-\vec{v_0}\|^2\leq\|\vec{v}-\vec{x}\|^2$, takže $\|\vec{v}-\vec{v_0}\|\leq\|\vec{v}-\vec{x}\|$. Rovnost nastává právě tehdy, když $\|\vec{v_0}-\vec{x}\|=0$, což je právě tehdy, když $\vec{x}=\vec{v_0}$.