Úlohy 3

Na případné chyby mě prosím upozorněte. Děkuji.

1. Vymyslíme si následující definici:
   Def.: Řekneme, že přirozené číslo n má *vlastnost* V, pokud existují přirozená čísla $i, j; i < j$; splňující $n = 2i \cdot j$. Rozhodněte, která z čísel 3, 4, 5, 6 mají vlastnost V.

   Řešení: Pro $i = 1$ a $j = 2$ získáme $n = 4$. Pro $i = 1$ a $j = 3$ získáme $n = 6$. Číslo 3 ani 5 nelze získat žádnou volbou i, j. Tedy čísla 4 a 6 mají *vlastnost* V.

2. Uvažujme následující definici:
   Def.: Řekneme, že přirozená čísla a, b jsou *p-spojena*, pokud $a - b$ nebo $b - a$ je prvočíslo. Rozhodněte, která z dvojic čísel 7 a 4, 12 a 14, 3 a 13 jsou p-spojena.

3. U následujících definic určete definiendum (celé) a definiens. Dále určete rodový pojem (*genus proximum*) a specifický druhový rozdíl (*differentiam specifikam*). Promyslete, zda vám v definici něco nechybí, či zda definice není vícenásobná, tj. definuje více pojmů. Ve druhém případě rozdělte definice na dílčí.

   (a) **Def.:** Nechť $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je reflexivní právě tehdy, když $(\forall a \in M)$ platí $(a, a) \in R$.

   Řešení:

   Definiendum: Definiendum je pojem, který se definuje, což je v tomto případě **reflexivní**.

   Definiens: Definiens je vysvětlení definienda, tedy to, co definuje jeho význam. V tomto případě je definiens: R **je reflexivní právě tehdy, když** $(\forall a \in M)$ **platí** $(a, a) \in R$.

   Rodový pojem: Rodový pojem označuje širší kategorii, do které definiendum spadá. Zde je rodovým pojmem **binární relace** R, protože reflexivní relace je specifický druh binární relace.

   Specifický druhový rozdíl: Specifický rozdíl je vlastnost, která odlišuje definiendum od jiných pojmů spadajících pod rodový pojem. V tomto případě je specifickým rozdílem **když pro všechna** $a \in M$ **platí** $(a, a) \in R$. Tato vlastnost odlišuje reflexivní relace od ostatních typů binárních relací (například symetrických či tranzitivních relací).

   Definice je úplná a neobsahuje více pojmů, které by vyžadovaly rozdělení. Definuje jeden konkrétní pojem: reflexivní binární relaci.

   (b) **Def.:** Nechť $(M, \preceq)$ je uspořádaná množina. Prvek $x \in M$ je minimální právě tehdy, když pro každé $y \in M$ platí, že z $y \preceq x$ vyplývá $x \preceq y$.

   (c) **Def.:** Strom je jednoduchý graf bez kružnic.

   Řešení:

   Definiendum: strom.

   Definiens: jednoduchý graf bez kružnic.

   Rodový pojem: graf.

Specifický druhový rozdíl: jednoduchý a bez kružnic.

Definice je úplná a neobsahuje více pojmů, které by vyžadovaly rozdělení. Definuje jeden konkrétní pojem: strom.

(d) **Def.:** Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$. Řekneme, že a dělí b, značeno $a \mid b$, jestliže existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $b = k \cdot a$. V takovém případě říkáme, že a je faktor b a že b je násobek a. Také říkáme, že b je dělitelné a.

(e) **Def.:** $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$.

(f) **Def.:** Nechť $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$. Řekneme, že je to prvočíslo, jestliže jediná přirozená čísla, která jej dělí, jsou a a 1. Řekneme, že je to číslo složené, jestliže to není prvočíslo.

(g) **Def.:** Nechť $n \in \mathbb{N}$. Symbolem $\mathbb{Z}_n$ značíme množinu $\{0, 1, 2, \ldots n-1\}$.

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z}_n) \quad a \oplus b = (a+b) \pmod{n}.$$

(h) **Def.:** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pak tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

4. Přeložte následující neformální zápisy úvah do češtiny:

(a) n prvočíslo $\Rightarrow$ (n liché $\vee\, n = 2$)

Řešení: Pokud je n prvočíslo, pak je to číslo liché nebo je to číslo 2.

(b) $(a > 0 \wedge a^2 - a - 2 = 0) \Rightarrow a = 2$.

5. U následujících tvrzení, seznáte-li, že jsou ve tvaru implikace, nejprve určete, co je nutnou a co postačující podmínkou. Následně vyslovte jejich negaci, obrácení a obměnu. Není nutné umět všechny symboly interpretovat. Budete-li se domnívat, že věta je ve tvaru ekvivalence, rozložte ji na konjunkci dvou implikací a postupujte od začátku.

(a) Je-li n prvočíslo, pak jsou všechna $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ invertibilní.

Řešení:

Symbolický zápis: $(\forall n \in \mathbb{N}):$ (n je prvočíslo $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\} : a$ je invertibilní).

Postačující podmínka: n je prvočíslo.

Nutná podmínka: Všechna $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ jsou invertibilní.

Negace: Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že n je prvočíslo a existuje alespoň jedno $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, které není invertibilní.

Obrácení: Pokud všechna $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ jsou invertibilní, pak je n prvočíslo.

Obměna: Pokud existuje alespoň jedno $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, které není invertibilní, pak n není prvočíslo.

(b) Nechť $n \in \mathbb{N}$ je prvočíslo. Je-li $a \in \mathbb{Z}$ nesoudělné s n, pak platí

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

(c) Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pro čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou následující podmínky ekvivalentní: (i) $a \equiv b \pmod{n}$; (ii) existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $b = a + kn$.

(d) Množina $\mathbb{Z}$ je spočetná.

Řešení:

Symbolický zápis: $\forall M \quad M = \mathbb{Z} \Rightarrow M$ je spočetná

Postačující podmínka: M je množina celých čísel.

Nutná podmínka: M je spočetná.

Negace:

- M je nespočetná.
- Existuje množina M, která je množinou celých čísel a zároveň je nespočetná.

Obrácení: Pokud M je spočetná, pak je M množina celých čísel.

Obměna: Pokud je M nespočetná, pak M není množinou celých čísel.

(e) Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$. Potom platí $\lim(a_n + b_n) = A + B$.

(f) Pokud je funkce g spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, pak je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.

(g) Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existují $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ a platí $f'_+(a) = f'_-(a)$.

(h) Množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.

(i) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbb{R}$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbb{R}$. Potom platí $A = B$.

(j) Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí $\lim(a_n + b_n) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován.

(k) Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost splňující $\lim a_n = 0$. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergentní.

(l) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right)$$