Algebra I – úlohy k procvičení – 21.10.2020

1. Dokažte, že neexistuje žádný surjektivní homomorfismus grupy $\mathbb{Q}$ s operací $+$ na grupu $\mathbb{Z}$ s operací $+$.

2. Nechť G_1, G_2 jsou grupy, $\varphi : G_1 \to G_2$ je surjektivní homomorfismus. Jestliže $\ker \varphi = \{1\}$, pak φ je isomorfismus. Dokažte.

3. Nechť n je kladné celé číslo. Nechť $GL(n, \mathbb{R})$ je množina všech čtvercových regulárních matic n-tého stupně nad $\mathbb{R}$.

   Dokažte: $GL(n, \mathbb{R})$ s operací násobení matic je grupa. (Poznámka: Grupa $GL(n, \mathbb{R})$ se nazývá obecná lineární grupa.)

4. Nechť n je kladné celé číslo. Najděte nějaký surjektivní homomorfismus grupy $GL(n, \mathbb{R})$ na grupu $\mathbb{R}^\times$. (Poznámka: Grupa $GL(n, \mathbb{R})$ je zavedena v úloze číslo 3. Operací v grupě $\mathbb{R}^\times$ je násobení reálných čísel.)

5. Uveďte příklad dvou čtyřprvkových grup, které nejsou isomorfní.