

## Kapitola 4 – Euklidovské prostory

### 4.1. Definice euklidovského prostoru

#### 4.1.1. DEFINICE

Nechť  $E$  je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel  $\mathbb{R}$ ,  $(\cdot, \cdot): E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  $E$  se nazývá euklidovský prostor, platí-li:

- (I) Pro všechna  $\vec{u} \in E$ :  $(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$ .
  - (II) Pro všechna  $\vec{u} \in E$ :  $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$  právě tehdy, když  $\vec{u} = \vec{0}$ .
  - (III) Pro všechna  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ :  $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$ .
  - (IV) Pro všechna  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$ :  $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w})$ .
  - (V) Pro všechna  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ , pro všechna  $c \in \mathbb{R}$ :  $(\vec{u}, c \cdot \vec{v}) = c \cdot (\vec{u}, \vec{v})$ .
- Pro  $\vec{u}, \vec{v} \in E$  se číslo  $(\vec{u}, \vec{v})$  nazývá skalární součin vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ .

#### 4.1.2. PŘÍKLAD

Uvažme vektorový prostor  $\mathbb{R}^n$ . Definujeme  $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + \dots + x_n \cdot y_n$  pro libovolná  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Pak  $\mathbb{R}^n$  je euklidovský prostor.

### 4.2. Cauchyova nerovnost

#### 4.2.1. DEFINICE

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $\vec{v} \in E$ . Normou vektoru  $\vec{v}$  rozumíme číslo  $\sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$ . Normu vektoru  $\vec{v}$  značíme  $\|\vec{v}\|$ .

#### 4.2.2. VĚTA (Cauchyova)

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ . Platí:  $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ , přičemž rovnost nastává právě tehdy, když  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  jsou lineárně závislé vektory.

Důkaz: Rozlišíme dva případy:

- (I)  $\vec{y} = \vec{0}$
- (II)  $\vec{y} \neq \vec{0}$

ad (I):  $|(\vec{x}, \vec{y})| = |(\vec{x}, \vec{0})| = |0| = 0$ ,  $\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{0}\| = \|\vec{x}\| \cdot 0 = 0$ . Uvědomme si také, že vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$ , tj. vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{0}$ , jsou lineárně závislé.

ad (II): Pro libovolné  $c \in \mathbb{R}$  položme  $f(c) = (\vec{x} - c \cdot \vec{y}, \vec{x} - c \cdot \vec{y})$ . Platí:

$0 \leq f(c) = (\vec{x}, \vec{x}) - 2 \cdot c \cdot (\vec{x}, \vec{y}) + c^2 \cdot (\vec{y}, \vec{y})$ . Je  $(\vec{y}, \vec{y}) > 0$ . Kvadratická trojčlen  $f(c)$  s reálnými koeficienty má nekladný diskriminant, tj.  $(\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}) \leq 0$ . Pak  $\sqrt{(\vec{x}, \vec{y})^2} \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}$ , čili  $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ .

Rovnost nastává právě tehdy, když  $f(c)$  má nulový diskriminant, a to je právě tehdy, když existuje  $c_0 \in \mathbb{R}$  tak, že  $f(c_0) = (\vec{x} - c_0 \cdot \vec{y}, \vec{x} - c_0 \cdot \vec{y}) = 0$  a to je právě tehdy, když existuje  $c_0 \in \mathbb{R}$  tak, že  $\vec{x} = c_0 \cdot \vec{y}$ , a to je právě tehdy, když vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  jsou lineárně závislé.

### 4.3. Norma a metrika

#### 4.3.1. VĚTA

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $\vec{v}, \vec{w} \in E$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Platí:

- (a)  $\|\vec{v}\| \geq 0$
- (b)  $\|\vec{v}\| = 0$  právě tehdy, když  $\vec{v} = \vec{0}$
- (c)  $\|c \cdot \vec{v}\| = |c| \cdot \|\vec{v}\|$
- (d)  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$  (trojúhelníková nerovnost)

Důkaz:

- (a) Důkaz přenecháváme čtenáři.
- (b) Důkaz přenecháváme čtenáři.

(c) Důkaz přenecháváme čtenáři.

$$(d) \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{v}) + 2 \cdot (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \\ = \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot (\vec{v}, \vec{w}) + \|\vec{w}\|^2 \leq \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot |(\vec{v}, \vec{w})| + \|\vec{w}\|^2.$$

Podle Cauchyovy nerovnosti je  $|(\vec{v}, \vec{w})| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$ , takže  $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 \leq \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| + \|\vec{w}\|^2 = (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2$ . Odtud máme:  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ .

#### 4.3.2. DEFINICE

Nechť  $M$  je množina,  $\rho: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Zobrazení  $\rho$  se nazývá metrika na množině  $M$ , platí-li:

(I) Pro všechna  $x, y \in M$ :  $\rho(x, y) \geq 0$ .

(II) Pro všechna  $x, y \in M$ :  $\rho(x, y) = 0$  právě tehdy, když  $x = y$ .

(III) Pro všechna  $x, y \in M$ :  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ .

(IV) Pro všechna  $x, y, z \in M$ :  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

#### 4.3.3. VĚTA

Nechť  $E$  je euklidovský prostor. Platí: Zobrazení  $\rho: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definované vztahem

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad (\text{pro každé } \vec{x}, \vec{y} \in E)$$
 je metrika na množině  $E$ .

Důkaz: Ověříme, že zobrazení  $\rho$  splňuje podmínky (I) – (IV) z definice 4.3.2.

(I) ověření přenecháváme čtenáři

(II) ověření přenecháváme čtenáři

(III) ověření přenecháváme čtenáři

(IV) Nechť  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$ . Chceme:  $\rho(\vec{x}, \vec{z}) \leq \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z})$ .

$$\rho(\vec{x}, \vec{z}) = \|\vec{x} - \vec{z}\| = \|(\vec{x} - \vec{y}) + (\vec{y} - \vec{z})\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| = \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z}) \quad (\text{využili jsme trojúhelníkovou nerovnost – viz 4.3.1.}).$$

### 4.4. Ortogonalita, velikost úhlu vektorů

#### 4.4.1. DEFINICE

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ . Říkáme, že vektor  $\vec{x}$  je ortogonální k vektoru  $\vec{y}$ , pokud  $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ . Označení  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

#### 4.4.2. POZNÁMKA

$(\vec{x}, \vec{y}) = 0$  právě tehdy, když  $(\vec{y}, \vec{x}) = 0$ , neboť  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ . Takže  $\vec{x} \perp \vec{y}$  právě tehdy, když  $\vec{y} \perp \vec{x}$ . Proto říkáme, že vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  jsou vzájemně ortogonální.

#### 4.4.3. VĚTA (Pythagorova)

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ . Platí:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \text{ právě tehdy, když } \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Důkaz:  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2 \cdot (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \cdot (\vec{x}, \vec{y})$ . Vidíme, že  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow 2 \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$ .

*Poznatek:*

Nechť  $E$  je euklidovský prostor  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ ,  $\vec{x} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{y} \neq \vec{0}$ . Podle Cauchyovy nerovnosti (4.2.2.)

platí:  $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ . Pak  $\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1$ , neboli ekvivalentně  $-1 \leq \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1$ .

Pak existuje právě jedno  $\alpha \in [0, \pi]$  tak, že  $\cos \alpha = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$ .

Tento poznatek ospravedlňuje následující definici.

#### 4.4.4. DEFINICE

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ ,  $\vec{x} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{y} \neq \vec{0}$ . Necht'  $\alpha \in [0, \pi]$ ,  $\cos \alpha = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$ .  
Číslo  $\alpha$  se nazývá velikost úhlu vektorů  $\vec{x}, \vec{y}$ .

#### 4.5. Ortogonální báze

##### 4.5.1. TVRZENÍ

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in E - \{\vec{0}\}$ . Jestliže  $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$  pro každé  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , pak vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: Necht'  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ,  $c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ . Chceme:  $c_1 = \dots = c_n = 0$ . Bud'  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Platí:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{0}, \vec{v}_i) = (c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n, \vec{v}_i) \\ &= c_1 \cdot (\vec{v}_1, \vec{v}_i) + \dots + c_{i-1} \cdot (\vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i) + c_i \cdot (\vec{v}_i, \vec{v}_i) + c_{i+1} \cdot (\vec{v}_{i+1}, \vec{v}_i) + \dots + c_n \cdot (\vec{v}_n, \vec{v}_i) \\ &= c_1 \cdot 0 + \dots + c_{i-1} \cdot 0 + c_i \cdot (\vec{v}_i, \vec{v}_i) + c_{i+1} \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 \\ &= c_i \cdot (\vec{v}_i, \vec{v}_i). \end{aligned}$$

Protože  $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ , je  $(\vec{v}_i, \vec{v}_i) \neq 0$  a tudíž  $c_i = 0$ .

##### 4.5.2. DEFINICE

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $B \subseteq E$ .  $B$  se nazývá ortogonální báze prostoru  $E$ , platí-li:

(I)  $B$  je báze vektorového prostoru  $E$ .

(II) Pro všechny vektory  $\vec{x}, \vec{y} \in B$ : Jestliže  $\vec{x} \neq \vec{y}$ , pak  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

Je-li navíc splněna podmínka

(III) Pro všechny vektory  $\vec{x} \in B$ :  $\|\vec{x}\| = 1$ .

nazývá se  $B$  ortonormální báze prostoru  $E$ .

##### 4.5.3. ALGORITMUS (Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces)

Nechť  $E$  je euklidovský prostor.

VSTUP: Lineárně nezávislé vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ .

VÝSTUP: Nenulové vektory  $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$  splňující  $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \rangle$  a  $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$  pro každé  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ .

PROCES: Na počátku klademe  $\vec{g}_1 = \vec{v}_1$ . Necht'  $1 < k \leq n$  a necht' jsou již sestrojeny vektory  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}$ . Klademe  $\vec{g}_k = \vec{v}_k + c_1 \cdot \vec{g}_1 + \dots + c_{k-1} \cdot \vec{g}_{k-1}$ , kde

$$c_1 = -\frac{(\vec{g}_1, \vec{v}_k)}{(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}, c_2 = -\frac{(\vec{g}_2, \vec{v}_k)}{(\vec{g}_2, \vec{g}_2)}, \dots, c_{k-1} = -\frac{(\vec{g}_{k-1}, \vec{v}_k)}{(\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_{k-1})}.$$

Důkaz korektnosti algoritmu: Indukcí pro  $k = 1, 2, \dots, n$  dokážeme:

(I) vektory  $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_k$  jsou nenulové.

(II)  $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$ .

(III)  $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$  pro každé  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ .

$k = 1$ :

ad (I)  $\vec{g}_1 = \vec{0}$  by znamenalo, že  $\vec{v}_1 = \vec{0}$  a že vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  jsou lineárně závislé; to by byl spor. Takže  $\vec{g}_1 \neq \vec{0}$ .

ad (II): zřejmě platí

ad (III): zřejmě platí

$k > 1$ :

ad (I): Z indukčního předpokladu víme, že vektory  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}$  jsou nenulové. Zbývá ukázat, že  $\vec{g}_k \neq \vec{0}$ . Předpokládejme opak, tj.  $\vec{g}_k = \vec{0}$ . Pak

$$\vec{v}_k = (-c_1) \cdot \vec{g}_1 + \dots + (-c_{k-1}) \cdot \vec{g}_{k-1} \in \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle$$

Ovšem dle indukčního předpokladu  $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle$ , takže  $\vec{v}_k \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle$ . Tedy vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k$  nejsou lineárně nezávislé. Pak též vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k, \dots, \vec{v}_n$  nejsou lineárně nezávislé, spor. Nutně tedy  $\vec{g}_k \neq \vec{0}$ .

ad (II):  $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle \subseteq \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$ : Stačí ukázat, že  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$ . Dle indukčního předpokladu  $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle$ , takže  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1} \in \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle \subseteq \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k\} \rangle$ . Zbývá ukázat, že  $\vec{g}_k \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$ . Víme, že  $\vec{g}_k = \vec{v}_k + c_1 \cdot \vec{g}_1 + \dots + c_{k-1} \cdot \vec{g}_{k-1}$ . Ovšem  $\vec{v}_k, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1} \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$ , takže  $\vec{g}_k \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$ .  
 $\langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle \subseteq \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle$ :

Stačí ukázat, že  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle$ . Dle indukčního předpokladu

$\langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle = \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle$ , takže  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1} \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle = \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle \subseteq \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}, \vec{g}_k\} \rangle$ . Zbývá ukázat, že  $\vec{v}_k \in \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle$ . Víme, že  $\vec{v}_k = (-c_1) \cdot \vec{g}_1 + \dots + (-c_{k-1}) \cdot \vec{g}_{k-1} + \vec{g}_k$ . Nutně tedy  $\vec{v}_k \in \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle$ .

ad (III): Necht'  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ . Chceme:  $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$ . Jestliže  $i, j \leq k-1$ , pak  $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$  dle indukčního předpokladu. Zbývá tedy ukázat, že  $\vec{g}_k \perp \vec{g}_1, \vec{g}_k \perp \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_k \perp \vec{g}_{k-1}$ . Zvolíme libovolně  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  a počítáme:

$$\begin{aligned} (\vec{g}_k, \vec{g}_i) &= (\vec{v}_k + c_1 \cdot \vec{g}_1 + \dots + c_{k-1} \cdot \vec{g}_{k-1}, \vec{g}_i) = \\ &= (\vec{v}_k, \vec{g}_i) + c_1 \cdot (\vec{g}_1, \vec{g}_i) + \dots + c_{i-1} \cdot (\vec{g}_{i-1}, \vec{g}_i) + c_i \cdot (\vec{g}_i, \vec{g}_i) + c_{i+1} \cdot (\vec{g}_{i+1}, \vec{g}_i) + \dots + c_{k-1} \cdot (\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_i). \end{aligned}$$

Ještě jednou si uvědomme, že dle indukčního předpokladu

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_i) = 0, \dots, (\vec{g}_{i-1}, \vec{g}_i) = 0, (\vec{g}_{i+1}, \vec{g}_i) = 0, \dots, (\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_i) = 0. \text{ Pak}$$

$$(\vec{g}_k, \vec{g}_i) = (\vec{v}_k, \vec{g}_i) + c_1 \cdot 0 + \dots + c_{i-1} \cdot 0 + c_i \cdot (\vec{g}_i, \vec{g}_i) + c_{i+1} \cdot 0 + \dots + c_{k-1} \cdot 0 =$$

$$= (\vec{v}_k, \vec{g}_i) + c_i \cdot (\vec{g}_i, \vec{g}_i) = (\vec{v}_k, \vec{g}_i) + \left(-\frac{(\vec{g}_i, \vec{v}_k)}{(\vec{g}_i, \vec{g}_i)}\right) \cdot (\vec{g}_i, \vec{g}_i) =$$

$$= (\vec{v}_k, \vec{g}_i) - (\vec{g}_i, \vec{v}_k) = 0.$$

Tudíž  $\vec{g}_k \perp \vec{g}_i$ .

#### 4.5.4. VĚTA

V každém euklidovském prostoru konečné dimenze existuje ortogonální báze.

Důkaz: Necht'  $E$  je euklidovský prostor konečné dimenze. Necht'  $\dim E = n$ . Je-li  $n=0$ , je  $\emptyset$  ortogonální báze prostoru  $E$ . Necht'  $n > 0$ . Necht'  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  je báze prostoru  $E$ .

Aplikujeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces (4.5.3.) na vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ .

Obdržíme vektory  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ . Ukážeme, že  $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$  je ortogonální báze prostoru  $E$ .

Víme, že  $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \rangle = E$ . Dále,  $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$  pro každé  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ .

Zbývá dokázat, že vektory  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$  jsou lineárně nezávislé. To ihned plyne z 4.5.1.

(Uvědomme si, že vektory  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$  jsou nenulové).

#### 4.5.5. DŮSLEDEK

V každém netriviálním euklidovském prostoru konečné dimenze existuje ortonormální báze.

Důkaz: Necht'  $E$  je netriviální euklidovský prostor konečné dimenze. Dle 4.5.4. existuje ortogonální báze  $B$  prostoru  $E$ . Necht'  $B = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$  ( $n = \dim E$ ). Je  $\vec{g}_i \neq \vec{0}$  pro každé

$i \in \{1, \dots, n\}$  - jinak bychom měli spor s lineární nezávislostí vektorů  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ . Položme

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{g}_1\|} \cdot \vec{g}_1, \dots, \vec{e}_n = \frac{1}{\|\vec{g}_n\|} \cdot \vec{g}_n. \text{ Ukážeme: } \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \text{ je ortonormální báze prostoru } E.$$

Protože  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$  jsou nenulové, jsou též  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  nenulové. Necht'  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ . Počítáme:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \left(\frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \cdot \vec{g}_i, \frac{1}{\|\vec{g}_j\|} \cdot \vec{g}_j\right) = \frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \cdot \frac{1}{\|\vec{g}_j\|} \cdot (\vec{g}_i, \vec{g}_j) = 0, \text{ neboť } \vec{g}_i \perp \vec{g}_j. \text{ Takže } \vec{e}_i \perp \vec{e}_j.$$

Dále: Necht'  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Počítejme  $\|\vec{e}_i\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \cdot \vec{g}_i \right\| = \frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \cdot \|\vec{g}_i\| = 1$ .

Protože  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  jsou nenulové a  $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$  pro každé  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , jsou vektory  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  lineárně nezávislé (viz 4.5.1.). Jelikož  $\dim E = n$ , je  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  báze prostoru  $E$ , která je ortonormální.

## 4.6. Izomorfismus euklidovských prostorů

### 4.6.1. DEFINICE

Necht'  $E_1$  je euklidovský prostor se skalárním součinem  $(\cdot, \cdot)_1$ , necht'  $E_2$  je euklidovský prostor se skalárním součinem  $(\cdot, \cdot)_2$ ,  $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ . Zobrazení  $\varphi$  se nazývá izomorfismus euklidovských prostorů  $E_1$  a  $E_2$  platí-li:

(I)  $\varphi$  je izomorfismus vektorových prostorů  $E_1$  a  $E_2$ .

(II) Pro všechna  $\vec{x}, \vec{y} \in E_1$  platí:  $(\vec{x}, \vec{y})_1 = (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}))_2$ .

Pokud existuje izomorfismus euklidovských prostorů  $E_1$  a  $E_2$ , říkáme, že prostory  $E_1$  a  $E_2$  jsou izomorfní.

## 4.7. Věta o reprezentaci euklidovských prostorů konečné dimenze

### 4.7.1. VĚTA (o reprezentaci euklidovských prostorů konečné dimenze)

Necht'  $E$  je euklidovský prostor konečné dimenze,  $\dim E = n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Platí: euklidovské prostory  $E$  a  $\mathbb{R}^n$  jsou izomorfní.

Důkaz: Dle 4.5.5. existuje ortonormální báze  $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  euklidovského prostoru  $E$ . Pro každé  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  položme  $\varphi(\vec{x}) = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n$ . Zřejmě  $\varphi$  zobrazuje  $\mathbb{R}^n$  do  $E$ . Ukážeme, že  $\varphi$  je izomorfismus euklidovských prostorů:

(I)  $\varphi$  je izomorfismus vektorových prostorů  $\mathbb{R}^n$  a  $E$ .

(a)  $\varphi$  je homomorfismus

Necht'  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Chceme:  $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x} + \vec{y}) &= \varphi((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) = \varphi((x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)) \\ &= (x_1 + y_1) \cdot \vec{e}_1 + \dots + (x_n + y_n) \cdot \vec{e}_n = x_1 \cdot \vec{e}_1 + y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n + y_n \cdot \vec{e}_n \\ &= (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n) + (y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}). \end{aligned}$$

Necht'  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Chceme:  $\varphi(c \cdot \vec{x}) = c \cdot \varphi(\vec{x})$ .

$$\begin{aligned} \varphi(c \cdot \vec{x}) &= \varphi(c \cdot (x_1, \dots, x_n)) = \varphi((c \cdot x_1, \dots, c \cdot x_n)) = (c \cdot x_1) \cdot \vec{e}_1 + \dots + (c \cdot x_n) \cdot \vec{e}_n \\ &= c \cdot (x_1 \cdot \vec{e}_1) + \dots + c \cdot (x_n \cdot \vec{e}_n) = c \cdot (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n) = c \cdot \varphi(\vec{x}). \end{aligned}$$

(b)  $\varphi$  je injekce

Necht'  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{y})$ . Chceme:  $\vec{x} = \vec{y}$ .

$$\vec{0} = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y}) = (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n) - (y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n) = (x_1 - y_1) \cdot \vec{e}_1 + \dots + (x_n - y_n) \cdot \vec{e}_n.$$

Vektory  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  jsou lineárně nezávislé, takže  $x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0$ , což dává  $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ .

(c)  $\varphi$  je surjekce

Necht'  $\vec{y} \in E$ . Chceme: existuje  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tak, že  $\varphi(\vec{x}) = \vec{y}$ . Víme, že  $\langle B \rangle = E$ . Existují tedy

$y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{y} = y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n$ . Položme  $\vec{x} = (y_1, \dots, y_n)$ . Pak

$$\varphi(\vec{x}) = y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n = \vec{y}.$$

(II) Necht'  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Chceme:  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}))$ .

$$\begin{aligned}
(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) &= (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n, y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n) \\
&= (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n, y_1 \cdot \vec{e}_1) + \dots + (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n, y_n \cdot \vec{e}_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \vec{e}_i, y_1 \cdot \vec{e}_1) + \dots + \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \vec{e}_i, y_n \cdot \vec{e}_n) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_1 \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_1) + \dots + \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_n \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_n).
\end{aligned}$$

Uvědomme si, že  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$  pro každé  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ . Pak

$$\begin{aligned}
(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) &= x_1 \cdot y_1 \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + x_2 \cdot y_2 \cdot (\vec{e}_2, \vec{e}_2) + \dots + x_n \cdot y_n \cdot (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \cdot \|\vec{e}_i\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \cdot 1^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = (\vec{x}, \vec{y}).
\end{aligned}$$

## 4.8. Ortogonální doplněk podprostoru

### 4.8.1. DEFINICE

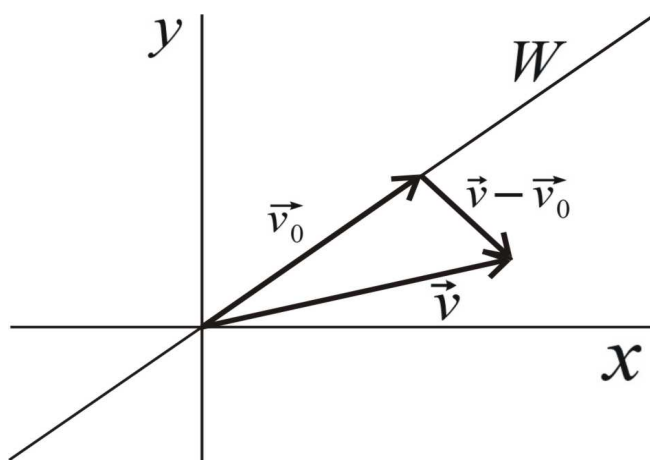
Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $W$  je podprostor prostoru  $E$ . Říkáme, že vektor  $\vec{v}$  je ortogonální k podprostoru  $W$ , jestliže  $\vec{v} \perp \vec{x}$  pro každý vektor  $\vec{x} \in W$  (značení:  $\vec{v} \perp W$ ).

### 4.8.2. DEFINICE

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $W$  je podprostor prostoru  $E$ . Množina  $\{\vec{v} \in E \mid \vec{v} \perp W\}$  se nazývá ortogonální doplněk podprostoru  $W$  (v prostoru  $E$ ). Označení:  $W^\perp$ .

### 4.8.3. DEFINICE

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $W$  je podprostor prostoru  $E$ ,  $\vec{v} \in E$ . Vektor  $\vec{v}_0 \in W$  se nazývá ortogonální průmět vektoru  $\vec{v}$  do podprostoru  $W$ , jestliže  $\vec{v} - \vec{v}_0 \perp W$ .



### 4.8.4. TVRZENÍ

Ortogonální průmět vektoru do podprostoru konečné dimenze vždy existuje a je určen jednoznačně.

Důkaz: Buď  $E$  euklidovský prostor,  $W$  jeho podprostor konečné dimenze,  $\vec{v} \in E$ .

Rozlišme dva případy:

(I)  $W$  je triviální.

Položíme  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ . Jiná možnost ani není.

(II)  $W$  je netriviální.

Podle 4.5.5. existuje ortonormální báze  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$  podprostoru  $W$  ( $k = \dim W$ ). Nejdříve si uvědomme:  $\vec{x} \perp W$  právě tehdy, když  $\vec{x} \perp \vec{e}_i$  pro každé  $i \in \{1, \dots, k\}$ . ( $\vec{x}$  je libovolný vektor z  $E$ ).

Zdůvodnění:

Nechť  $\vec{y} \in W$ ,  $\vec{x} \perp \vec{e}_i$  pro  $i=1, \dots, k$ . Chceme:  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

Existují  $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}$  tak, že  $\vec{y} = d_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + d_k \cdot \vec{e}_k$ .

Pak  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, d_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + d_k \cdot \vec{e}_k) = d_1 \cdot (\vec{x}, \vec{e}_1) + \dots + d_k \cdot (\vec{x}, \vec{e}_k) = d_1 \cdot 0 + \dots + d_k \cdot 0 = 0$ .

Takže  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

Hledáme  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  tak, aby  $\vec{v} - (c_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{e}_k) \perp \vec{e}_i$  pro každé  $i \in \{1, \dots, k\}$ . K ukončení důkazu tvrzení stačí ukázat, že následující systém  $k$  rovnic o neznámých  $c_1, \dots, c_k$  má právě jedno řešení:

$$(\vec{v} - (c_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{e}_k), \vec{e}_1) = 0$$

⋮

Soustavu označíme \*.

$$(\vec{v} - (c_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{e}_k), \vec{e}_k) = 0.$$

Nechť  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Počítejme:

$$(\vec{v} - (c_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{e}_k), \vec{e}_i) = (\vec{v}, \vec{e}_i) - ((c_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{e}_k), \vec{e}_i)$$

$$= (\vec{v}, \vec{e}_i) - \sum_{j=1}^k c_j \cdot (\vec{e}_j, \vec{e}_i) = (\vec{v}, \vec{e}_i) - c_i \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_i)$$

$$= (\vec{v}, \vec{e}_i) - c_i \cdot 1 = (\vec{v}, \vec{e}_i) - c_i.$$

Soustava (\*) má tedy tvar

$$(\vec{v}, \vec{e}_1) - c_1 = 0$$

⋮

$$(\vec{v}, \vec{e}_k) - c_k = 0$$

a je vidět, že má právě jedno řešení.

#### 4.8.5. VĚTA

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $W$  je podprostor prostoru  $E$ .

Platí:  $W^\perp$  je podprostor prostoru  $E$  a (v případě, že  $E$  má konečnou dimenzi)

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim E, \quad W + W^\perp = E.$$

Důkaz:

(I) Dokážeme, že  $W^\perp$  je podprostor.

Nechť  $\vec{u}, \vec{v} \in W^\perp$ . Chceme:  $\vec{u} + \vec{v} \in W^\perp$ .

Nechť  $\vec{x} \in W$ . Počítejme:  $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{x}) = (\vec{u}, \vec{x}) + (\vec{v}, \vec{x}) = 0 + 0 = 0$ , tedy  $\vec{u} + \vec{v} \perp W$ ,  $\vec{u} + \vec{v} \in W^\perp$ .

Nechť  $\vec{u} \in W^\perp$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Chceme:  $c \cdot \vec{u} \in W^\perp$ .

Nechť  $\vec{x} \in W$ . Počítejme:

$$(c \cdot \vec{u}, \vec{x}) = c \cdot (\vec{u}, \vec{x}) = c \cdot 0 = 0. \text{ Tedy } c \cdot \vec{u} \perp W, \quad c \cdot \vec{u} \in W^\perp.$$

Ještě chceme:  $\vec{0} \in W^\perp$ . Zřejmě pro každé  $\vec{x} \in W$  je  $(\vec{0}, \vec{x}) = 0$ , tedy  $\vec{0} \perp W$ ,  $\vec{0} \in W^\perp$ .

(II) Předpokládejme, že  $E$  má konečnou dimenzi. Nejdříve dokážeme, že  $W + W^\perp = E$ .

$W + W^\perp \subseteq E$ : To je jasné.

$E \subseteq W + W^\perp$ : Nechť  $\vec{v} \in E$ . Protože  $E$  má konečnou dimenzi, má konečnou dimenzi též podprostor  $W$ . Dle 4.8.4. existuje ortogonální průmět  $\vec{v}_0$  vektoru  $\vec{v}$  do prostoru  $W$ . Platí:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + (\vec{v} - \vec{v}_0), \quad \vec{v}_0 \in W, \quad \vec{v} - \vec{v}_0 \perp W, \text{ tj. } \vec{v} - \vec{v}_0 \in W^\perp. \text{ Vidíme, že } \vec{v} \in W + W^\perp.$$

Dle 3.2.2. platí:  $\dim W + \dim W^\perp = \dim(W \cap W^\perp) + \dim(W + W^\perp)$ . Vzhledem k výše dokázanému  $\dim W + \dim W^\perp = \dim(W \cap W^\perp) + \dim E$ . Nechť  $\vec{x} \in W \cap W^\perp$ . Pak  $\vec{x} \perp \vec{x}$ , tedy

$$(\vec{x}, \vec{x}) = 0, \text{ což dává } \vec{x} = \vec{0}. \text{ Proto } W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}, \quad \dim(W \cap W^\perp) = 0,$$

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim E.$$

#### 4.8.6. VĚTA

Nechť  $E$  je euklidovský prostor,  $P$  je podprostor prostoru  $E$ ,  $\vec{v} \in E$ ,  $\vec{v}_0$  je ortogonální průmět vektoru  $\vec{v}$  do  $P$  ( $\vec{v}_0 \in P$ ).

Platí: Pro všechna  $\vec{x} \in P$  je  $\|\vec{v} - \vec{v}_0\| \leq \|\vec{v} - \vec{x}\|$ , přičemž rovnost nastává právě tehdy, když  $\vec{x} = \vec{v}_0$ .

Důkaz: Nechť  $\vec{x} \in P$ .  $\vec{v} - \vec{x} = (\vec{v} - \vec{v}_0) + (\vec{v}_0 - \vec{x})$ . Je  $\vec{v} - \vec{v}_0 \perp P$ , tedy speciálně  $\vec{v} - \vec{v}_0 \perp \vec{v}_0 - \vec{x}$ .

Podle Pythagorovy věty (4.4.3.) platí:  $\|\vec{v}-\vec{x}\|^2=\|\vec{v}-\vec{v}_0\|^2+\|\vec{v}_0-\vec{x}\|^2$ . Pak  $\|\vec{v}-\vec{v}_0\|^2\leq\|\vec{v}-\vec{x}\|^2$ , takže  $\|\vec{v}-\vec{v}_0\|\leq\|\vec{v}-\vec{x}\|$ . Rovnost nastává právě tehdy, když  $\|\vec{v}_0-\vec{x}\|=0$ , což je právě tehdy, když  $\vec{x}=\vec{v}_0$ .