

## Úlohy 5

Na případné chyby mě prosím upozorněte. Děkuji.

1. Zapište všechny podmnožiny množiny  $\{1, 2, 3\}$ .

Řešení:

$$\text{Pot}(\{1, 2, 3\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

2. Určete, které z následujících množin se rovnají:

- (a)  $\{x \in \mathbb{N}; x < 0\}$
- (b)  $\{0\}$
- (c)  $\emptyset$
- (d)  $\{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2\}$
- (e)  $\{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 2\}$
- (f)  $\{x \in \mathbb{Z}; -3 < x < 3\}$
- (g)  $\{x \in \mathbb{Z}; |x| \leq 0\}$
- (h)  $\{x \in \mathbb{Z}; |x| < 0\}$ .

Řešení: (a)=(c)=(h), (b)=(g), (d)=(e)

3. V množině  $\mathbb{Z}$  určete doplňky následujících množin

- (a)  $A_1 = \{x \in \mathbb{Z}; x < 1\}$

Řešení:  $\overline{A_1} = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 1\}$

- (b)  $A_2 = \mathbb{N}$
- (c)  $A_3 = \mathbb{Z}$
- (d)  $A_4 = \{x \in \mathbb{Z}; \sqrt{x^2} = |x|\}$
- (e)  $A_5 = \{x \in \mathbb{Z}; |x| > 0\}$

4. Je dána základní množina  $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Určete všechny dvojice množin  $X$  a  $Y$ , které splňují všechny následující podmínky (nejednou):

- $X \subseteq J, Y \subseteq J$
- $X \cap Y = \{2, 5\}$
- $X \cup \{3, 5\} = \{3, 4, 5, 6\}$
- $\overline{Y} \cup \{2, 3, 4, 5\} = J$

Řešení:

- (a)  $X \subseteq J, Y \subseteq J \Rightarrow$  obě jsou podmnožinou množiny  $J$

- (b)  $X \cap Y = \{2, 5\} \Rightarrow X$  i  $Y$  obsahují prvky 2 a 5
- (c)  $X \cup \{3, 5\} = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow X$  obsahuje nutně prvky 4, 6, může a nemusí obsahovat prvky 3, 5 (z této podmínky, kvůli té předchozí prvek 5 obsahovat musí).
- (d)  $\bar{Y} \cup \{2, 3, 4, 5\} = J \Rightarrow$  v doplňku k  $Y$  musí být nutně prvky  $\{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , tyto prvky tedy nemohou být v množině  $Y$  a množina  $Y$  může obsahovat pouze prvky  $\{2, 3, 4, 5\}$

Závěr: Vzhledem k tomu, že množina  $X$  musí obsahovat prvek 4, pak ho množina  $Y$  obsahovat nemůže, protože jinak by byl v jejich průniku a to není. Prvek 3 může být v množině  $X$  i  $Y$ , ale ne v obou zároveň. Tedy dvojice množin splňující podmínky jsou možné tři, a to následující:

- $X = \{2, 4, 5, 6\}$  a  $Y = \{2, 5\}$
- $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  a  $Y = \{2, 5\}$
- $X = \{2, 4, 5, 6\}$  a  $Y = \{2, 3, 5\}$

5. Určete  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ , jestliže

- (a)  $A = \{1, 2, 5, 8\}$  a  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ;
- (b)  $A = \{x \in \mathbb{N}; x > 2\}$  a  $B = \{x \in \mathbb{N}; x < 7\}$ ;

Řešení:

- i.  $A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$
- ii.  $A \cup B = \mathbb{N}$
- iii.  $A \setminus B = \{7, 8, 9, \dots\}$
- iv.  $B \setminus A = \{0, 1, 2\}$

test 20.11. bude z Úloh 1-4 a z části Úloh 5: 1.-5.

- (c)  $A = \{x \in \mathbb{Z}; x > -3\}$  a  $B = \{x \in \mathbb{Z}; x > -5\}$ ;
- (d)  $A = \mathbb{N}$  a  $B = \mathbb{Z}$ ;
- (e)  $A = \{x \in \mathbb{Z}; x < 0\}$  a  $B = \{x \in \mathbb{Z}; \sqrt{x^2} = x\}$ .



6. Rešte pomocí Vennových diagramů

- (a) Je známo: Z 825 oslovených osob 380 uvedlo, že používá počítač doma nebo v zaměstnání. Počet osob, které používají počítač doma, je dvakrát větší než počet těch, kteří používají počítač doma i v zaměstnání, a je o 40 menší než počet těch, kteří používají počítač pouze v zaměstnání.

Určete:

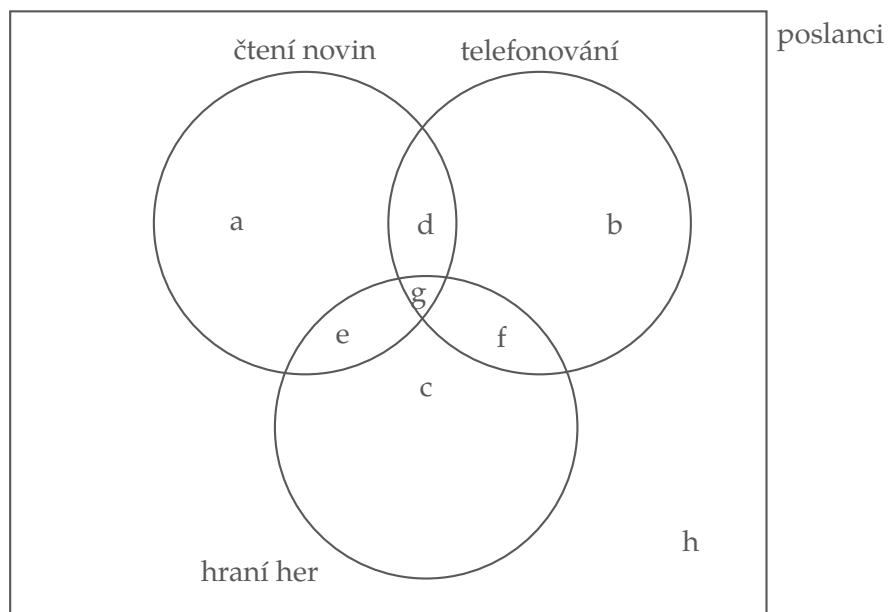
- i. Kolik oslovených osob používá počítač pouze v zaměstnání?
  - ii. Kolik oslovených osob používá počítač doma?
- (b) Je známo: Při jednání jedné nejmenované poslanecké sněmovny byl proveden průzkum pracovního vytížení přítomných poslanců. Bylo zjištěno, že kromě sledování průběhu projednávání zákona poslanci stíhají číst noviny, telefonovat a hrát hry na notebooku. Noviny čte 34 poslanců, telefonuje jich

36 a hraním her se trápí 38 poslanců. Žádnou z těchto tří činností nevykonává a jednání sleduje 35 poslanců. Pouze dva poslanci pak stíhají všechny tři činnosti najednou. Čte a zároveň telefonuje 6 poslanců a 3 poslanci zároveň čtou a hrají hry. Telefonuje nebo hraje hry 65 poslanců.

Určete:

- i. Kolik poslanců pouze telefonuje?
- ii. Kolik poslanců hraje hry nebo čte?
- iii. Kolik poslanců dokáže vykonávat alespoň dvě z uvedených činností?
- iv. Kolik poslanců je přítomno jednání sněmovny?

Řešení: Zakreslíme Vennův diagram pro názornost:



Označili jsme jednotlivé skupiny poslanců podle toho, jaké činnosti vykonávají:

- *a*: poslanci, kteří pouze čtou noviny
- *b*: poslanci, kteří pouze telefonují
- *c*: poslanci, kteří pouze hrají hry
- *d*: poslanci, kteří čtou a zároveň telefonují, ale nehrají hry
- *e*: poslanci, kteří čtou a zároveň hrají hry, ale netelefonují
- *f*: poslanci, kteří telefonují a zároveň hrají hry, ale nečtou
- *g*: poslanci, kteří čtou, telefonují a hrají hry
- *h*: poslanci, kteří nevykonávají žádnou z těchto tří činností

Známe následující údaje:

- i. Noviny čte celkem 34 poslanců, tedy:

$$a + d + e + g = 34$$

- ii. Telefonuje celkem 36 poslanců, tedy:

$$b + d + f + g = 36$$

iii. Hry hraje celkem 38 poslanců, tedy:

$$c + e + f + g = 38$$

iv. Průzkumu se neúčastní a žádnou z těchto činností nedělá 35 poslanců, tedy:

$$h = 35$$

v. Dva poslanci vykonávají všechny tři činnosti, tedy:

$$g = 2$$

vi. Čte a zároveň telefonuje 6 poslanců, tedy:

$$d + g = 6$$

vii. Čte a zároveň hraje hry 3 poslanci, tedy:

$$e + g = 3$$

viii. Telefonuje nebo hraje hry celkem 65 poslanců, tedy:

$$b + f + c + d + e + g = 65$$

- Vypočítáme  $d$  a  $e$ :

Z rovnice  $d + g = 6$  vyplývá:

$$d = 6 - g = 6 - 2 = 4$$

Z rovnice  $e + g = 3$  vyplývá:

$$e = 3 - g = 3 - 2 = 1$$

- Použitím ostatních rovnic určíme  $a, b, c, f$ :

Dosadíme  $d, e$  a  $g$  do první rovnice:

$$a + d + e + g = 34 \Rightarrow a + 4 + 1 + 2 = 34 \Rightarrow a = 27$$

Dosadíme  $d$  a  $g$  do druhé rovnice:

$$b + d + f + g = 36 \Rightarrow b + 4 + f + 2 = 36 \Rightarrow b + f = 30$$

Dosadíme  $e$  a  $g$  do třetí rovnice:

$$c + e + f + g = 38 \Rightarrow c + 1 + f + 2 = 38 \Rightarrow c + f = 35$$

Z rovnice  $b + f + c + d + e + g = 65$ :

$$b + f + c + 4 + 1 + 2 = 65 \Rightarrow b + f + c = 58$$

Máme nyní soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$b + f = 30$$

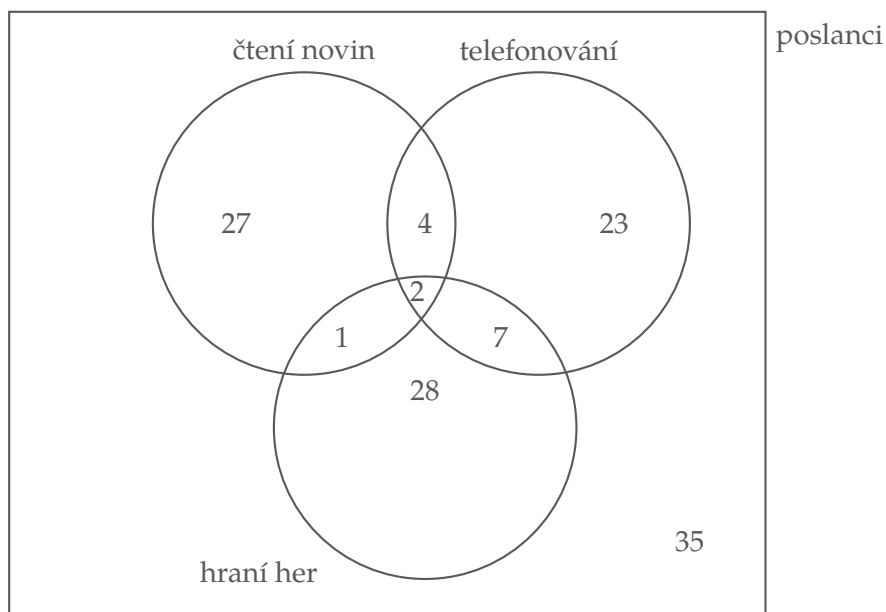
$$c + f = 35$$

$$b + f + c = 58$$

Z nich určíme  $b = 23, c = 28, f = 7$ .

Tím jsme došli k výsledku:

$$a = 27, b = 23, c = 28, d = 4, e = 1, f = 7, g = 2, h = 35$$



A můžeme zodpovědět dotazy:

- i. Kolik poslanců pouze telefonuje?  $\boxed{23}$
  - ii. Kolik poslanců hraje hry nebo čte?  $27 + 4 + 2 + 1 + 7 + 28 = \boxed{69}$
  - iii. Kolik poslanců dokáže vykonávat alespoň dvě z uvedených činností?  $4 + 1 + 2 + 7 = \boxed{14}$
  - iv. Kolik poslanců je přítomno jednání sněmovny?  $\boxed{127}$
- (c) Žáci 7.A se chystají na sportovní výcviky. Pět žáků umí lyžovat, jezdit na kole i plavat. Dva žáci neumí ani jedno. Lyžovat umí 20 žáků, jezdit na kole umí 19 žáků a plavat umí 17 žáků. Lyžovat i jezdit na kole umí 12 žáků, lyžovat i plavat umí také 12 žáků a jezdit na kole i plavat umí 7 žáků. Kolik je celkem žáků ve třídě?
- (d) Do třídy 5.A chodí 30 žáků. Hudební školu z této třídy navštěvuje 6 žáků, do modelářského kroužku chodí o 5 žáků více než do hudební školy. Dramatický kroužek navštěvuje o tři žáky méně, než kroužek modelářský. Dva žáci chodí do modelářského kroužku i hudební školy, žádný žák nechodí zároveň do dramatického i modelářského kroužku. 10 žáků nechodí do žádného kroužku. Kolik žáků navštěvuje dvě ze zmíněných zájmových činností?
- (e) Ve škole je 20 učitelů. 10 učí humanitní vědy, 8 učí sociální vědy a 6 učí přírodní vědy. Dva učitelé učí humanitní i sociální vědy, ale žádný neučí sociální a přírodní vědy. Kolik učitelů učí humanitní i přírodní vědy?
- (f) 200 studentů dělalo zkoušky z češtiny, matematiky a fyziky. 114 studentů udělalo češtinu, 50 studentů udělalo matematiku a 41 studentů udělalo fyziku. Zkoušku z češtiny i matematiky udělalo 14 studentů, z matematiky i fyziky 15 studentů a z češtiny i fyziky 11 studentů. Všechny tři zkoušky udělalo 5 studentů. Kolik studentů neudělalo ani jednu zkoušku?

- (g) Každý student mluví alespoň jedním z následujících jazyků - angličtina, němčina, francouzština. Studentů je celkem třicet. 25 jich mluví anglicky, z toho 6 mluví i německy. Všemi jazyky mluví stejné množství studentů jako množství studentů mluvících pouze německy. A stejné množství studentů mluví pouze francouzsky. Studentů, kteří mluví francouzsky, je o 2 více než těch, co mluví německy. Studentů, kteří mluví jen anglicky, je více než dvakrát tolik než těch, co mluví jen německy a francouzsky. Kolik studentů mluví jednotlivými jazyky?
- (h) Stejný počet studentů a učitelů se zúčastnil průzkumu, kde odpovídali na jednu otázku (ano – ne). 60 % těch, co odpověděli „ano“ byli učitelé a 80 % těch, co odpověděli „ne“ byli studenti. Kolik procent studentů odpovědělo „ano“?

7. Zakreslete Vennův diagram pro čtyři množiny.

8. Zjednodušte (např. za použití Vennových diagramů)

(a)  $(C \cup (A \cap C)) \cup (A \cup (B \cap (A \cup B)))$

(b)  $((C \cap A) \cup (A \cap B)) \cup ((A \cup C) \cap (B \cup A))$

9. Dokažte! (Vennův diagram je nápovědou, zda to lze dokázat, nicméně nelze ho v tuto chvíli považovat za důkaz.)

(a)  $(\forall A) A \subseteq A$

(b)  $(\forall A) \emptyset \subseteq A$

(c)  $(\forall A, B, C) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

**Řešení:**

Budeme dokazovat rovnost těchto dvou množin dvojím inkluzním důkazem.

- Důkaz inkluze  $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$ :

Vezměme si libovolný prvek  $x \in A \setminus (B \cup C)$ . To znamená, že:

- $x \in A$ ,
- $x \notin B \cup C$ , tedy  $x \notin B$  a  $x \notin C$ .

Z toho plyne, že:

- $x \in A \setminus B$  (protože  $x \in A$  a  $x \notin B$ ),
- $x \notin C$ .

Tedy  $x \in (A \setminus B) \setminus C$ .

Tím jsme ukázali, že  $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$ .

- Důkaz inkluze  $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \cup C)$ :

Vezměme si libovolný prvek  $x \in (A \setminus B) \setminus C$ . To znamená, že:

- $x \in A \setminus B$ , což znamená, že  $x \in A$  a  $x \notin B$ ,
- $x \notin C$ .

Z toho plyne, že:

- $x \notin B \cup C$  (protože  $x \notin B$  a  $x \notin C$ ),

–  $x \in A$ .

Tedy  $x \in A \setminus (B \cup C)$ .

Tím jsme ukázali, že  $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \cup C)$ .

Protože platí obě inkluze, dostáváme, že  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ .

(d)  $(\forall A, B, C) A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

**Řešení:** Budeme postupovat podle logické ekvivalence. Napíšeme si nejprve, co znamená, že je  $x$  prvkem  $A \setminus (B \cap C)$  a postupujeme dále.

$$\begin{aligned}(x \in A) \wedge (x \notin (B \cap C)) &\equiv (x \in A) \wedge ((x \notin B) \vee (x \notin C)) \equiv \\ &\equiv ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin C))\end{aligned}$$

Poslední výraz odpovídá právě  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ . Tedy jsme dokázali, že prvek je v množině na levé straně právě tehdy, když je v množině na pravé straně, což je definice rovnosti dvou množin.

(e)  $(\forall A, B) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(f)  $(\forall A, B) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

10. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí následující tvrzení

(a)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

(b)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(c)  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

(d)  $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus D)$

(e)  $(\forall A, B) \text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B) \subseteq \text{Pot}(A \cup B)$

**Řešení:**

Nechť  $A$  a  $B$  jsou libovolné množiny. Potenční množina  $\text{Pot}(A)$  obsahuje všechny podmnožiny množiny  $A$ . Podobně potenční množina  $\text{Pot}(B)$  obsahuje všechny podmnožiny množiny  $B$ .

Spojíme-li množiny  $\text{Pot}(A)$  a  $\text{Pot}(B)$ , získáme množinu, která obsahuje všechny podmnožiny množiny  $A$  a podmnožiny množiny  $B$ . Každá podmnožina  $X \subseteq A$  nebo  $Y \subseteq B$  je také podmnožinou množiny  $A \cup B$ . To znamená, že všechny prvky z  $\text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B)$  jsou také podmnožiny množiny  $A \cup B$ , a tudíž patří do  $\text{Pot}(A \cup B)$ .

Proto platí, že:

$$\text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B) \subseteq \text{Pot}(A \cup B)$$

*Poznámka:* Proč neplatí?

$$\text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B) = \text{Pot}(A \cup B)$$

Uvažujme

- $A = \{1\}$ ,
- $B = \{2\}$ .

Pak

- $A \cup B = \{1, 2\}$ ,
- $\text{Pot}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ,