

Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.

KMA – Katedra matematiky PřF

9. 4. 2025

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM



UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Prírodovědná fakulta



Kooperativní hry N hráčů

- Nyní zobecníme kooperativní hry na obecný počet N hráčů.
- Uvažujeme hru s *přenosnou výhrou*.
- Když jsou dva hráči, tak jsou jen dvě možnosti - buď se dohodnou na spolupráci, nebo budou vystupovat jako konkurenti.
- V případě N hráčů vzniká nový problém - s kým spolupracovat a proti komu.
- Ze hry v normálním tvaru přejdeme na hru ve tvaru charakteristické funkce.

Definice

Uvažujeme hru N hráčů, množinu všech hráčů označíme symbolem Q . **Koalicí** se rozumí skupina hráčů spolupracujících při volbě strategií, případně při přerozdělování výhry. **Koaliční strukturou** se nazývá množina všech koalic, které se v dané situaci z uvažovaných hráčů vytvoří. Koalice budem značit písmeny K, L, Q apod., případně je udáme jako množinu obsahující členy koalice, např. $\{1\}$, $\{3, 4, 6\}$ atd. **Protikoalicí** ke koalici $K \subseteq Q$ se rozumí množina hráčů

$$K^- = Q \setminus K = \{i \in Q; i \notin K\}.$$

Množina všech hráčů Q se nazývá **velká koalice**. Prázdná množina se nazývá **prázdná koalice**.

Kooperativní hry N hráčů

Zatímco ve hře se dvěma hráči máme pouze dvě řešení, v koaliční hře se třemi hráči máme již pět možných řešení.

- Všichni hráči spolupracují.
- První a druhý hráč tvoří koalici proti třetímu hráči.
- První a třetí hráč tvoří koalici proti druhému hráči.
- Druhý a třetí hráč tvoří koalici proti prvnímu hráči.
- Všichni hráči hrají samostatně.

Počet možných koalic rychle roste s počtem hráčů. Ve hře s N hráči je možné vytvořit $2^N - 1$ koalic, přičemž jeden hráč může být členem $2^{N-1} - 1$ různých koalic (nepočítáme prázdnou koalici).

Pro tři hráče jsou možné koalice

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Koaliční struktura může být například

$$(\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}).$$

Předpokládáme hru s **volnou disjunktí koaliční strukturou**, tedy jsou přípustné jakékoli koalice a každý hráč může být členem pouze jedné koalice. Pak počet možných koaličních struktur je

$$R(N) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^k (-k)^{-j} \binom{k}{j} (k-j)^N$$

Pro rostoucí počet hráčů N dostáváme řadu hodnot $R(2) = 2$, $R(3) = 5$, $R(4) = 52$ atd.

- Hráči vyhodnocují sílu jednotlivých koalic a přemýšlí, které koalice se zúčastní.
- V rámci koalice dále přemýšlí, jak rozdělit společný zisk.
- Podíl na zisku musí být větší než nekooperativní zisk jednotlivce.
- Cílem hráče není vytvořit koalici, ale zajistit si lepší výsledek než je ten nekooperativní.
- Každý hráč má snahu optimalizovat svůj vlastní individuální zisk a podle toho se rozhoduje.

Definice

Hra ve tvaru charakteristické funkce sestává z množiny hráčů

$$Q = \{1, 2, \dots, N\}$$

a reálné funkce v definované na množině všech koalic, pro kterou platí

$$v(\emptyset) = 0.$$

Pro jednoduchost budeme symbolem v značit i příslušnou hru ve tvaru charakteristické funkce.

Definice

Charakteristická funkce je **superaditivní**, pokud pro každé dvě disjunktní koalice K, L platí

$$v(K \cup L) \geq v(K) + v(L).$$

Definice

Hra ve tvaru charakteristické funkce (předpokládáme superaditivitu) se nazývá **nepodstatná**, jestliže platí

$$v(Q) = \sum_{i=1}^N v(\{i\}).$$

Hra, která není nepodstatná, se nazývá **podstatná**.

Věta

Nechť K je libovolná koalice hráčů v nepodstatné hře. Potom

$$v(K) = \sum_{i \in K} v(\{i\}).$$

V nepodstatné hře nemá smysl tvořit koalice (není žádná přidaná hodnota).

Představme si kooperativní hru tří hráčů $Q = \{1, 2, 3\}$ s charakteristickou funkcí

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 5, v(Q) = 100$$

Situace zřejmě vedou na velkou koalici. Jaké bude rozložení zisků pro jednotlivé hráče?

Jaké bude v situaci, kdy $v(\{3\}) = 50$?

Kooperativní hry N hráčů

Pro vyjádření rozdělení zisku si zavedeme vektory $a \in \mathbb{R}^N$.

Definice

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s množinou hráčů

$$Q = \{1, 2, \dots, N\}.$$

N -tice $\mathbf{a}$ reálných čísel se nazývá **imputace**, jsou-li splněny následující podmínky:

- **individuální racionálnost**: pro každého hráče i je

$$a_i \geq v(\{i\})$$

- **kolektivní racionálnost**: platí

$$\sum_{i=1}^N a_i = v(Q)$$

Imputace je tedy přerozdělení zisku koalice mezi její členy.

Věta

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. Je-li v nepodstatná, pak má právě jednu imputaci, a to

$$\mathbf{a} = (v(\{1\}), v(\{2\}), \dots, v(\{N\})).$$

Je-li v podstatná, pak má nekonečně mnoho imputací.

Definice

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce, K je koalice, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ jsou imputace. řekneme, že **$\mathbf{a}$ dominuje $\mathbf{b}$ pro koalici K** , jestliže platí:

- $a_i > b_i$ pro všechna $i \in K$
- $\sum_{i \in K} a_i \leq v(K)$.

Dominanci budeme značit $\mathbf{a} \succ_K \mathbf{b}$

Příklad

Uvažujme hru v normálním tvaru, máme tři hráče, každý dvě strategie.
Hra je zadaná následující tabulkou.

Trojice strategií	Výplatní vektory
1,1,1	-2,1,2
1,1,2	1,1,-1
1,2,1	0,-1,2
1,2,2	-1,2,0
2,1,1	1,-1,1
2,1,2	0,0,1
2,2,1	1,0,0
2,2,2	1,2,-2

Kooperativní hry N hráčů

Množina hráčů je tedy $Q = \{1, 2, 3\}$ a všechny možné koalice jsou

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Nejprve uvažujme koalici $K = \{1, 2\}$ a protikoalici $K^- = \{3\}$. Koalice K má čtyři společné strategie: $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$. Protikoalice má dvě ryzí strategie: 1,2. Zajímá-li nás, co je koalice K schopna pro sebe zajistit, uvažujeme dvoumaticovou hru. Hráči 1 a 2 tvoří koalici proti hráči 2, jejich zisk se tudíž sčítá.

strategie	1	2
$(1,1)$	-1,2	2,-1
$(1,2)$	-1,2	1,0
$(2,1)$	0,1	0,1
$(2,2)$	1,0	3,-2

Hra má Nashův rovnovážný bod v čistých strategiích: $((2,2),1)$ s výplatami pro koalici K : 1 a pro protikoalici K^- : 0.

Tedy $v(\{1, 2\}) = 1$ a $v(\{3\}) = 0$.

Obdobně postupujeme pro koalici $K = \{1, 3\}$ a protikoalici $K^- = \{2\}$ a nakonec pro koalici $K = \{2, 3\}$ a protikoalici $K^- = \{1\}$.

Zisk velké koalice je $v(\{1, 2, 3\}) = 1$ a zisk prázdné koalice $v(\emptyset) = 0$.

Tedy máme hru ve tvaru charakteristické funkce.:

$$v(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$v(\{2\}) = -\frac{1}{3}$$

$$v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = 1$$

$$v(\{1, 3\}) = \frac{4}{3}$$

$$v(\{2, 3\}) = \frac{3}{4}$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 1$$

$$v(\emptyset) = 0$$

Hra je podstatná. Charakteristická funkce je superaditivní.

Uvažujme imputace

$$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

Oba vektory jsou imputací dle definice. Zároveň $\mathbf{b}$ dominuje $\mathbf{a}$ pro koalici $\{1, 2\}$.

$$\mathbf{b} \succ_{\{1,2\}} \mathbf{a}$$

△

Nyní se budeme věnovat konceptům řešení hry ve tvaru charakteristické funkce. Zajímá nás predikce racionálního chování hráčů. V kooperativních hrách s přenositelným užitekem je to i forma rozdělení zisku.

- Jádro hry
- Shapleyho hodnota
- Shapley-Shubikův index
- Banzhafův index
- Nukleolus

Za předpokladu superaditivity je velká koalice nejefektivnější provedení hry. Pak nás zajímá distribuce zisků.

Je zřejmé, že bude-li nějaká imputace dominována pro nějakou koalici jinou imputací, budou mít hráči této koalice snahu zrušit původní koalici a ustavit tuto výhodnější.

Definice

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. **Jádro hry** je tvořeno všemi imputacemi, které nejsou dominovány žádnou jinou imputací pro žádnou jinou koalici.

Tedy je to taková množina imputací, že každá případná koalice K obdrží alespoň $v(K)$, tzn. může obdržet víc. Je-li imputace $\mathbf{a}$ v jádru dané hry, nemá žádná skupina hráčů důvod vytvořit jinou koalici a nahradit $\mathbf{a}$ jinou imputací. Pokud je jádro prázdné, neexistuje stabilní kooperativní řešení, které by ustanovilo velkou koalici.

Kooperativní hry N hráčů - jádro hry

K usnadnění rozhodnutí, zda jistá imputace leží v jádru hry či nikoli, slouží následující věty.

Věta

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči a necht' $\mathbf{a}$ je imputace. Potom $\mathbf{a}$ leží v jádru hry v právě tehdy, když

$$\sum_{i \in K} a_i \geq v(K)$$

pro každou koalici K .

Věta

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči a necht' $\mathbf{a}$ je N -tice čísel. Potom $\mathbf{a}$ je imputace v jádru, právě když platí:

- $\sum_{i=1}^N a_i = v(Q)$
- $\sum_{i \in K} a_i \geq v(K)$ pro každou koalici K .

Kooperativní hry N hráčů - jádro hry

Tedy pokud bychom se vrátili k našemu příkladu:

$$v(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$v(\{2\}) = -\frac{1}{3}$$

$$v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = 1$$

$$v(\{1, 3\}) = \frac{4}{3}$$

$$v(\{2, 3\}) = \frac{3}{4}$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 1$$

$$v(\emptyset) = 0$$

Jádro hry musí splňovat

$$a_1 \geq \frac{1}{4}$$

$$a_2 \geq -\frac{1}{3}$$

$$a_3 \geq 0$$

$$a_1 + a_2 \geq 1$$

$$a_1 + a_3 \geq \frac{4}{3}$$

$$a_2 + a_3 \geq \frac{3}{4}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Takový vektor $\mathbf{a}$, který splňuje všechny nerovnice, nenalezneme. Jádro hry je tedy prázdné.

Kooperativní hry N hráčů - jádro hry

Příklad

Uvažujme hru tří hráčů, každý hráč má zisk $v(\{i\}) = 1$, zisk velké koalice $v(Q) = 90$. Dále $v(\{1, 2\}) = 50$, $v(\{1, 3\}) = 20$, $v(\{2, 3\}) = 10$.

Jádro hry je určeno:

$$a_1 \geq 1$$

$$a_2 \geq 1$$

$$a_3 \geq 1$$

$$a_1 + a_2 \geq 50$$

$$a_1 + a_3 \geq 20$$

$$a_2 + a_3 \geq 10$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 90$$

Tedy v jádru hry je například imputace

$$(40, 30, 20).$$



Soustava pro výpočet jádra generovaná z charakteristické funkce z předchozího příkladu má nekonečně mnoho řešení. Potřebujeme zjemnění řešení, návod na výběr konkrétní imputace z jádra.

Nejvýznamnější koncept kooperativních her je Shapleyho hodnota

- cílem je modelovat přínos hráče $i \in K$ pro koalici K
- slouží pro přerozdělování zisku koalice
- hráč se zúčastní koalice při imputaci, která mu přinese jeho „spravedlivý“ podíl
- zkoumáme vliv neúčasti hráče v koalici

$$v(K) - v(K \setminus \{i\})$$

Koalice $K \setminus \{i\}$ má $k - 1$ členů a lze tedy vytvořit

$$\binom{N-1}{k-1} = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}$$

způsoby.

Zkoumáme střední hodnotu přínosu hráče i do všech možných k -členných koalic:

$$\begin{aligned} h_i(k) &= \sum_{K \subset Q, k=|K|, i \in K} \frac{v(K) - v(K \setminus \{i\})}{\binom{N-1}{k-1}} \\ &= \sum_{K \subset Q, k=|K|, i \in K} \frac{(k-1)!(N-k)!}{(N-1)!} (v(K) - v(K \setminus \{i\})) \end{aligned}$$

Kooperativní hry N hráčů - Shapleyho hodnota

Střední hodnota přínosu hráče i k úhrnu všech jednočlenných, dvoučlenných, ..., N -členných koalic je dána vztahem

$$H_i = \sum_{k=1}^N \frac{h_i(k)}{N} = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K| - 1)!(N - |K|)!}{N!} (v(K) - v(K \setminus \{i\})).$$

Definice

Shapleyho vektor hry N hráčů ve tvaru charakteristické funkce je definován jako vektor

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2, \dots, H_N),$$

jehož i -tá složka H_i je vypočtena předchozím vztahem. Složka H_i se nazývá **Shapleyho hodnota** pro hráče i .

Věta

Shapleyho vektor zadané hry je imputací ve hře.

Příklad

Máme hru tří hráčů s charakteristickou funkcí:

K	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(K)$	100	10	0	150	110	20	200

Pak

$$\begin{array}{lll} h_1(1) = 100 & h_2(1) = 10 & h_3(1) = 0 \\ h_1(2) = \frac{140+110}{2} & h_2(2) = \frac{50+20}{2} & h_3(2) = \frac{10+10}{2} \\ h_1(3) = 180 & h_2(3) = 90 & h_3(3) = 50 \end{array}$$

Celkem tedy $H_1 = \frac{100+125+180}{3} = 132$, $H_2 = 45$, $H_3 = 20$. Shapleyho vektor pro zadanou hru je

$$\mathbf{H} = (132, 45, 20)$$



Shapleyho vektor má následující vlastnosti.

- individuální racionalita: $H_i \geq v(\{i\})$ pro všechny $i \in Q$
- efektivita: $\sum_{i \in Q} H_i = v(Q)$
- symetrie: pro každé dva hráče $i, j \in Q$, pro které platí $v(K \cup \{i\}) = v(K \cup \{j\})$ pro všechny $K \subseteq Q, i \notin K, j \notin K$ je $H_i = H_j$
- aditivita: pokud kombinujeme dvě hry v a w stejné struktury, pak platí, že $H_i(v) + H_i(w) = H_i(v + w)$
- nulový hráč nebere nic: pokud existuje hráč i takový, že $v(K \cup \{i\}) = v(K), \forall K \subset Q, i \notin K$, pak je $H_i = 0$

Kooperativní hry N hráčů - Shapleyho hodnota

Vrátíme se ještě k předchozímu příkladu s charakteristickou funkcí
 $v(\{i\}) = 1$, $v(Q) = 90$, $v(\{1, 2\}) = 50$, $v(\{1, 3\}) = 20$, $v(\{2, 3\}) = 10$.

Pak máme následující hodnoty

$$\begin{array}{lll} h_1(1) = 1 & h_2(1) = 1 & h_3(1) = 1 \\ h_1(2) = \frac{49+19}{2} & h_2(2) = \frac{49+9}{2} & h_3(2) = \frac{19+9}{2} \\ h_1(3) = 80 & h_2(3) = 70 & h_3(3) = 40 \end{array}$$

Celkem tedy $H_1 = \frac{1+34+80}{3} = 38,3$, $H_2 = 33,3$, $H_3 = 18,3$.

Shapleyho vektor pro zadanou hru je

$$\mathbf{H} = (38,3; 33,3; 18,3)$$



Kooperativní hry N hráčů - Shapleyho hodnota

Střední hodnota přínosu hráče i k úhrnu všech jednočlenných, dvoučlenných, ..., N -členných koalic je dána vztahem

$$H_i = \sum_{k=1}^N \frac{h_i(k)}{N} = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K| - 1)!(N - |K|)!}{N!} (v(K) - v(K \setminus \{i\})).$$

Definice

Shapleyho vektor hry N hráčů ve tvaru charakteristické funkce je definován jako vektor

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2, \dots, H_N),$$

jehož i -tá složka H_i je vypočtena předchozím vztahem. Složka H_i se nazývá **Shapleyho hodnota** pro hráče i .

Věta

Shapleyho vektor zadané hry je imputací ve hře.

Příklad

Ukážeme si jiný příklad na využití Shapleyho hodnoty. 4 firmy zvažují postavit most. Cena mostu je 20 milionů. Jednotlivé firmy jsou ochotny zaplatit maximálně $u_1 = 10$, $u_2 = 8$, $u_3 = 12$, $u_4 = 16$ milionů, které odpovídají užitku firem z nového mostu (úspora času, pohonných hmot při dopravě apod.). Jakým způsobem by se celkové náklady měly rozdělit mezi firmy?

Uvažujeme charakteristickou funkci ve tvaru

$$v(K) = \max\left\{\sum_{i \in K} u_i - 20; 0\right\}$$

Charakteristická funkce vyjadřuje zisk koalice.

Kooperativní hry N hráčů - Shapleyho hodnota

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{2, 3\}) = 0, v(\{1, 3\}) = 2, v(\{2, 4\}) = 4, v(\{3, 4\}) = 8$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 10, v(\{1, 2, 4\}) = 14, v(\{1, 3, 4\}) = 18, v(\{2, 3, 4\}) = 16$$

$$v(\{1, 2, 3, 4\}) = 26$$

Nyní spočteme Shapleyho hodnoty dle vzorce

$$H_i = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K| - 1)!(N - |K|)!}{N!} (v(K) - v(K \setminus \{i\})).$$

Kooperativní hry N hráčů - Shapleyho hodnota

Tedy

$$\begin{aligned}H_1 &= \frac{1 \cdot 2}{4!} [(v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) + (v(\{1, 4\}) - v(\{4\}))] \\&+ \frac{2 \cdot 1}{4!} [(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) + (v(\{1, 2, 4\}) - v(\{2, 4\}) + (v(\{1, 3, 4\}) - v(\{3, 4\}))] \\&+ \frac{3!0!}{4!} (v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{2, 3, 4\})) \\&= \frac{1}{12}(2 + 6) + \frac{1}{12}(10 + 10 + 10) + \frac{1}{4} \cdot 10 = \frac{68}{12} = \frac{17}{3} \\H_2 &= \frac{13}{3} \\H_3 &= \frac{20}{3} \\H_4 &= \frac{28}{3}\end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = \left(\frac{17}{3}, \frac{13}{3}, \frac{20}{3}, \frac{28}{3} \right)$$

Kooperativní hry N hráčů - Shapleyho hodnota

Platby pro jednotlivé firmy po té určíme jako

$$u_i - H_i.$$

Tedy

$$1. \text{ firma} \quad 10 - \frac{17}{3} = \frac{13}{3}$$

$$2. \text{ firma} \quad 8 - \frac{13}{3} = \frac{11}{3}$$

$$3. \text{ firma} \quad 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3}$$

$$4. \text{ firma} \quad 16 - \frac{28}{3} = \frac{20}{3}$$

Celkem zaplatí

$$\frac{13}{3} + \frac{11}{3} + \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = \underline{20}$$

△

Nyní uvažujme tzv. volební hru.

- $Q = \{1, 2, \dots, N\}$ je množina politických stran v parlamentu
- počet poslanců i -té strany bude označován jako a_i
- celkový počet zástupců v parlamentu $a_0 = \sum_{i=1}^N a_i$
- **hlasovací pravidlo** α určuje minimální počet hlasujících, který je potřeba k vítězství v hlasování $\lfloor \alpha a_0 \rfloor + 1$
- pak pro vítěznou koalici o m politických stranách ($1 \leq m \leq N$) platí

$$\sum_{i=1}^m a_i - \lfloor \alpha a_0 \rfloor > 0$$

- v opačném případě jde o koalici poraženou, která nemůže prosadit svou vůli

Volební hru uvažujeme jako kooperativní hru N hráčů ve tvaru charakteristické funkce.

- pro všechny koalice K platí buď $v(K) = 0$ nebo $v(K) = 1$
- takovou hru v označujeme jako **prostou hru**
- $v(K) = 1$ pro vítěznou koalici K a $v(K) = 0$ pro poraženou koalici

Pro další analýzu je nutné přijmout následující tři předpoklady (v reálu ne vždy splněné)

- všichni zástupci jedné strany hlasují vždy jednotně
- vytvoří-li se v určité fázi hlasovacího procesu nějaká koalice stran, pak také všichni členové této koalice hlasují totožně
- je možno vytvořit libovolnou koalici stran a všechny koalice jsou stejně pravděpodobné

Kooperativní hry N hráčů - Shapley-Shubikův index

Nyní na takovou volební hru aplikujeme Shapleyovu hodnotu.

$$H_i = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K| - 1)!(N - |K|)!}{N!} (v(K) - v(K \setminus \{i\})).$$

Vzhledem k charakteristické funkci se Shapleyova hodnota zjednoduší na vztah

$$H_i = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K| - 1)!(N - |K|)!}{N!},$$

kde sumace probíhá přes všechny vítězné koalice K takové, že $i \in K$ a $K - \{i\}$ je poražená.

Pak pro Shapleyovy hodnoty platí

$$\sum_{i=1}^N H_i = 1, H_i \geq 0$$

a hodnota H_i se nazývá **Shapley-Shubikův index síly** i -tého hráče. Hodnotu lze interpretovat jako pravděpodobnost, že i -tá strana bude nezbytná při sestavování vítězných koalicí.

Kooperativní hry N hráčů - Shapley-Shubikův index

Příklad

Předpokládejme, že v parlamentu s 200 poslanci jsou zastoupeny tři strany A, B, C, přičemž strana A má 95 poslanců, strana B má 85 poslanců a strana C má v parlamentu 20 zástupců. Pro úroveň $\alpha = 0,5$ můžeme definovat následující volební hru:

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

$$v(\{A, B\}) = v(\{A, C\}) = v(\{B, C\}) = 1$$

$$v(\{A, B, C\}) = 1$$

Dosazením do vzorce

$$H_i = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K| - 1)!(N - |K|)!}{N!},$$

získáme

$$\mathbf{H} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Kooperativní hry N hráčů - Shapley-Shubikův index

Pokud bychom však uvažovali $\alpha = 0,6$ (vítězná koalice musí mít 120 hlasů), dostaneme odlišnou volební hru:

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

$$v(\{A, C\}) = v(\{B, C\}) = 0$$

$$v(\{A, B\}) = 1$$

$$v(\{A, B, C\}) = 1$$

Zde získáme

$$\mathbf{H} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right).$$

Moc je v parlamentu soustředěna do rukou dvou velkých stran.



Děkuji za pozornost.