

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM



Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Základy matematiky
Teoretické základy informatiky I

KMA/ZAM
KI/TZI1

Přednáška 02
Predikátový počet

jiri.cihlar@ujep.cz



O čem budeme hovořit:

- Predikáty a kvantifikátory
- Jazyk predikátového počtu
- Důležité tautologie
- Číselné kvantifikátory
- Omezené kvantifikátory

Predikáty a kvantifikátory

Predikáty

Příklady predikátů:

- Číslo x je větší než 2.
- Množina X je podmnožinou množiny Y .
- Přímký a , b jsou rovnoběžné.
- Prvek x náleží množině V .

Predikáty formulují to, že objekty o nichž uvažujeme mají určité vlastnosti.

Predikáty nejsou výroky, obsahují proměnné pro objekty.

Predikáty neobsahují logické spojky ani kvantifikátory.

Obecný a existenční kvantifikátor



Příklady výroků s kvantifikátory:

- **Existuje alespoň jedno** prvočíslo.
- **Každé** reálné číslo má svou druhou mocninu kladnou.
- **Ke každému** kladnému číslu **existuje alespoň jedno** ještě menší kladné číslo.
- **Každá** kvadratická rovnice má **nejvýše dva** reálné kořeny.

Jak vzniká z predikátu výrok?

Kombinováním těchto dvou možností:

- dosazování konstant za proměnné,
- kvantifikováním proměnných.

Příklady: původní predikát
utvořený výrok

$$x < y$$

$$(\forall x) \ x < 2$$

původní predikát
utvořený výrok

$$A \subseteq B$$

$$(\forall B) (\exists A) A \subseteq B$$

Jazyk predikátového počtu

Abeceda predikátového počtu

Základ jazyka predikátové logiky tvoří tyto symboly:

- proměnné pro individua: $a, b, \dots, x, y, z, \dots$
- symboly pro logické spojky: $\neg, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- symboly pro kvantifikátory:

$\forall$ obecný (pro všechna), $\exists$ existenční (existuje)

- pomocné symboly – závorky: $(,)$

Dalšími symboly jazyka jsou:

- relační symbol pro rovnost: $=$
- další relační symboly, například $\in, <, |, \parallel$, apod.
- funkční symboly, například $+, -, \dots$, a podobně

Termy

Term je výraz určující individuum.

Definice:

1. každá proměnná či konstanta je term
2. je-li F funkční symbol a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy, pak $F(t_1, \dots, t_n)$ je term
3. každý term vznikne konečným počtem užití pravidel 1. a 2.

Například x , $x + 0$, $(x + y) \cdot 1$ jsou termy aritmetiky, resp. A , $A \cap \emptyset$ jsou termy teorie množin.

Formule predikátového počtu

Formule vyjadřují tvrzení o individuích.

Definice:

- 1) je-li R relační symbol a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy, pak $R(t_1, \dots, t_n)$ je (tzv. atomická) formule,
- 2) jsou-li φ a ψ formule, jsou formulemi rovněž výrazy $\neg \varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$,
- 3) je-li x proměnná a φ formule, jsou formulemi rovněž výrazy $(\forall x) \varphi(x)$ a $(\exists x) \varphi(x)$,
- 4) každá formule vznikne konečným počtem užití pravidel 1), 2) a 3).

Příklady formulí predikátového počtu

Příklady formulí aritmetiky reálných čísel

- $x + 0 = x \cdot y$
- $x + y = y + x \wedge x \cdot y = y \cdot x$
- $(\forall x) (x < 0 \rightarrow x \cdot x > 0)$

Příklady formulí teorie množin

- $A \cup B = C$
- $(\exists x) x \in \emptyset$
- $(\forall A) (\forall B) (A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A)$

Důležité tautologie

Jak znázornit pravdivost formulí

Schémata místo tabulek

$(\exists x) \varphi(x)$

$(\forall x) \varphi(x)$

$(\exists x) \neg \varphi(x)$

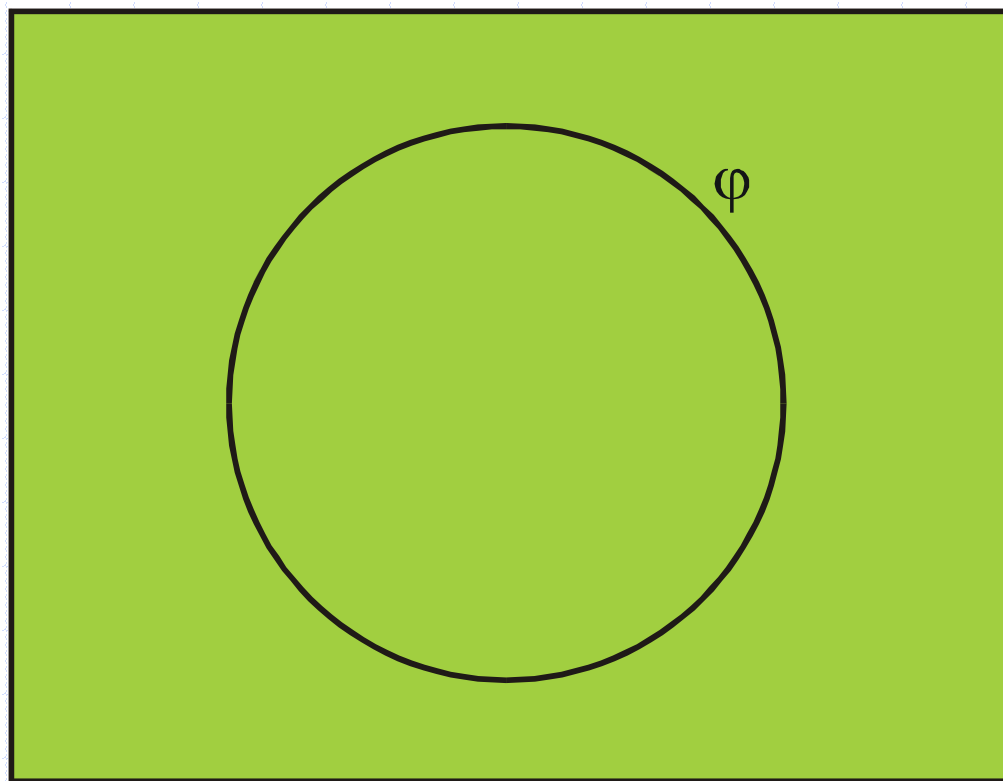
$(\forall x) \neg \varphi(x)$

$\neg(\exists x) \varphi(x)$

$\neg(\forall x) \varphi(x)$

$\neg(\exists x) \neg \varphi(x)$

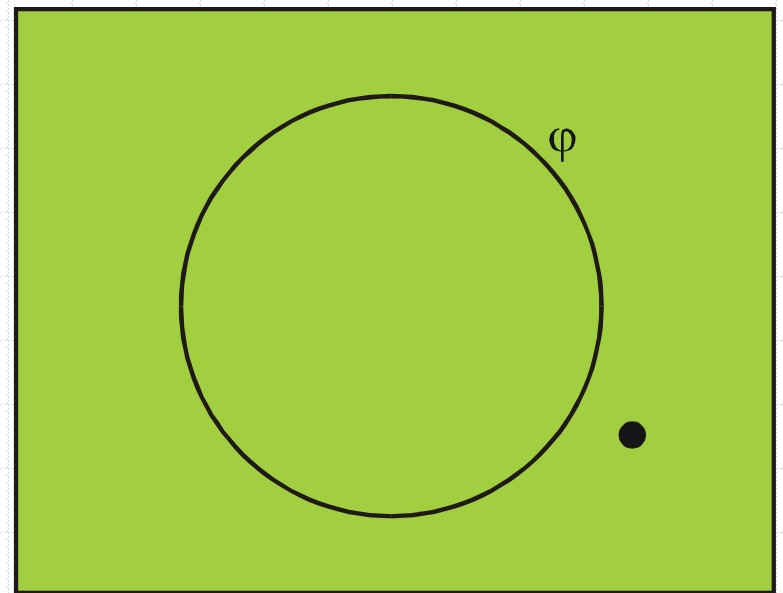
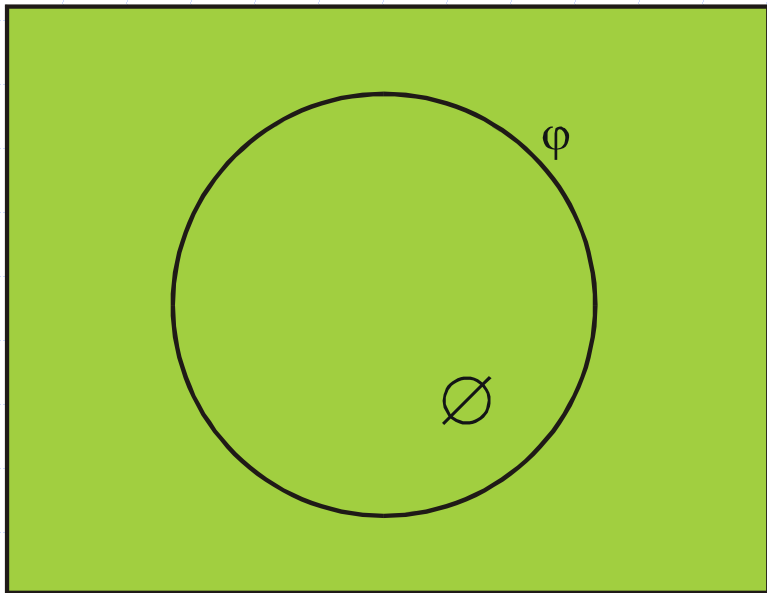
$\neg(\forall x) \neg \varphi(x)$



Negování kvantifikátorů

$$\neg(\exists x) \varphi(x) \Leftrightarrow (\forall x) \neg\varphi(x)$$

$$\neg(\forall x) \varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg\varphi(x)$$



Záměna pořadí kvantifikátorů

Kvantifikátory téhož druhu lze zaměňovat:

$$(\exists x) (\exists y) \varphi(x, y) \Leftrightarrow (\exists y) (\exists x) \varphi(x, y)$$

$$(\forall x) (\forall y) \varphi(x, y) \Leftrightarrow (\forall y) (\forall x) \varphi(x, y)$$

Kvantifikátory téhož druhu nelze vždy zaměňovat!

Platí pouze vyplývání:

$$(\exists x) (\forall y) \varphi(x, y) \Rightarrow (\forall y) (\exists x) \varphi(x, y)$$

Obrácené vyplývání neplatí, například tyto výroky mají různou pravdivost:

$$(\forall y) (\exists x) x > y \quad (\exists x) (\forall y) x > y$$

Distribuce kvantifikátorů

Pro různé kombinace kvantifikátoru ? a logické spojky • můžeme zkoumat pomocí schémat logickou ekvivalenci či vyplývání mezi dvěma formulemi tohoto typu:

$$(?x) (\varphi(x) \bullet \psi(x)) \quad ((?x) \varphi(x) \bullet (?x) \psi(x))$$

Jaké vztahy platí mezi následujícími formulemi?

$$(\forall x) (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \quad ((\forall x) \varphi(x) \wedge (\forall x) \psi(x))$$

$$(\exists x) (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \quad ((\exists x) \varphi(x) \wedge (\exists x) \psi(x))$$

$$(\forall x) (\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad ((\forall x) \varphi(x) \vee (\forall x) \psi(x))$$

$$(\exists x) (\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad ((\exists x) \varphi(x) \vee (\exists x) \psi(x))$$

atd.

Číselné kvantifikátory

Omezené kvantifikátory

Číselné kvantifikátory

Následující formule vyjadřují, že:

existuje alespoň jedno ... splňující formuli φ

existují alespoň dvě ... splňující formuli φ

existují alespoň tři ... splňující formuli φ

$$(\exists x) \varphi(x)$$

$$(\exists x) (\exists y) \varphi(x) \wedge \varphi(y) \wedge x \neq y$$

$$(\exists x) (\exists y) (\exists z) \varphi(x) \wedge \varphi(y) \wedge \varphi(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z$$

Negacemi pak získáme formule, vyjadřující, že:

neexistuje žádné ... splňující formuli φ

existuje nejvýše jedno ... splňující formuli φ , atd.

Číselné kvantifikátory

Konjunkcí formulí

„existuje alespoň n “ a „existuje nejvýše n “
získáme formuli vyjadřující „existuje právě n “ .

Často se užívá formule $(\exists!x) \varphi(x)$, která má význam
existuje právě jedno ... splňující formuli φ .

Zapišeme ji takto:

$$(\exists x) \varphi(x) \wedge (\forall x) (\forall y) \varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow x = y$$

Dokážeme-li v nějaké teorii, že existuje právě jeden objekt x s vlastností $\varphi(x)$, můžeme do jazyka teorie zavést novou konstantu.

Omezené kvantifikátory

Často se používají formule, které mají působnost kvantifikátorů omezenou na nějakou množinu.

Formuli $(\exists x \in M) \varphi(x)$ budeme číst „**existuje alespoň jedno x z množiny M , pro něž platí $\varphi(x)$** “, a její význam je dán následující definicí:

$$(\exists x \in M) \varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x) (x \in M \wedge \varphi(x))$$

Formuli $(\forall x \in M) \varphi(x)$ budeme číst „**pro všechna x z množiny M platí $\varphi(x)$** “, a její význam je dán následující definicí:

$$(\forall x \in M) \varphi(x) \Leftrightarrow (\forall x) (x \in M \rightarrow \varphi(x))$$

Negování omezených kvantifikátorů

Odvodíme postupně:

$$\begin{aligned} & \neg (\exists x \in M) \varphi(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \neg ((\exists x) (x \in M \wedge \varphi(x))) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (\forall x) \neg (x \in M \wedge \varphi(x)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (\forall x) (\neg (x \in M) \vee \neg \varphi(x)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (\forall x) (x \in M \rightarrow \neg \varphi(x)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (\forall x \in M) \neg \varphi(x) \end{aligned}$$

Podobně bychom odvodili, že platí:

$$\neg (\forall x \in M) \varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x \in M) \neg \varphi(x)$$

Co je třeba znát a umět?

- Chápat pojem predikát a jeho vztah k výročkům,
- znát obecný a existenční kvantifikátor,
- rozumět pojům term a formule predikátového počtu,
- aktivně znát důležité tautologie predikátového počtu a umět je odůvodňovat pomocí schémat,
- umět užívat číselné kvantifikátory,
- umět užívat omezené kvantifikátory.

Děkuji za pozornost

