

Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.

KMA – Katedra matematiky PřF

26. 3. 2025

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM



UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Prírodovědná fakulta



Dále si ukážeme možnost řešení pomocí nejlepších odpovědí.

Definice

Nejlepší odpovědi prvního hráče na strategii $\mathbf{y}$ druhého hráče se rozumí množina

$$BR_1(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x}^0 \in X; \forall \mathbf{x} \in X \text{ platí } v_1(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) \geq v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}.$$

Analogicky nejlepší odpovědi druhého hráče na strategii $\mathbf{x}$ prvního hráče se rozumí množina

$$BR_2(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}^0 \in Y; \forall \mathbf{y} \in Y \text{ platí } v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}^0) \geq v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}.$$

Pak platí následující věta:

Věta

Strategie $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ tvoří rovnovážný bod právě tehdy, když

$$\mathbf{x}^0 \in BR_1(\mathbf{y}^0)$$

a zároveň

$$\mathbf{y}^0 \in BR_2(\mathbf{x}^0).$$

Hledáme-li rovnovážný bod, můžeme postupovat tak, že sestrojíme nejlepší odpovědi a nalezneme jejich průsečík.

Vzájemně nejlepší odpovědi

Nejprve si řekneme, co jsou očekávané hodnoty výhry.

Definice

Očekávané hodnoty výhry jsou definovány vztahy:
první hráč

$$v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij}$$

druhý hráč

$$v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j b_{ij}$$

Uvažujme předchozí příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a spočítejme očekávané hodnoty výhry.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$v_1(x_1, y_1) = x_1(5y_1 - 2) - 2y_1 + 1$$

$$v_2(x_1, y_1) = y_1(5x_1 - 3) - 3x_1 + 2$$

Nejprve hledáme nejlepší odpovědi prvního hráče na různé hodnoty y_1

- je-li $0 \leq y_1 < \frac{2}{5}$, pak je očekávaná hodnota výhry prvního hráče pro pevnou hodnotu y_1 lineární funkce klesající, tedy největší hodnoty bude nabývat pro $x_1 = 0$
- je-li $y_1 = \frac{2}{5}$, pak je očekávaná hodnota výhry prvního hráče konstantní funkce, jakákoli hodnota x_1 je nejlepší odpovědí na tuto strategii druhého hráče
- a nakonec je-li $\frac{2}{5} < y_1 \leq 1$, pak je očekávaná hodnota výhry lineární funkce rostoucí, tedy největší hodnoty bude nabývat pro $x_1 = 1$

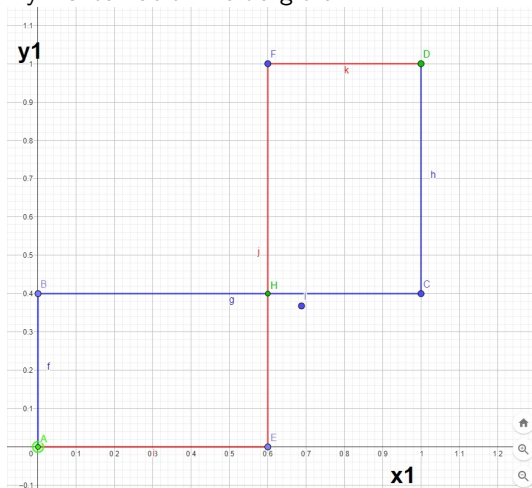
Obdobně hledáme nejlepší odpovědi druhého hráče na různé hodnoty x_1

$$v_2(x_1, y_1) = y_1(5x_1 - 3) - 3x_1 + 2$$

- je-li $0 \leq x_1 < \frac{3}{5}$, pak je očekávaná hodnota výhry druhého hráče pro pevnou hodnotu x_1 lineární funkce klesající, tedy největší hodnoty bude nabývat pro $y_1 = 0$
- je-li $x_1 = \frac{3}{5}$, pak je očekávaná hodnota výhry druhého hráče konstantní funkce, jakákoli hodnota y_1 je nejlepší odpovědí na tuto strategii prvního hráče
- je-li $\frac{3}{5} < x_1 \leq 1$, pak je očekávaná hodnota výhry lineární funkce rostoucí, tedy největší hodnoty bude nabývat pro $y_1 = 1$

Vzájemně nejlepší odpovědi - příklad

Nyní si to zobrazíme do grafu:



V grafu vidíme tři rovnovážné body stejné jako ty, které jsme získali řešení úlohy kvadratického programování:

$$\mathbf{x}'^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}'^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}''^0 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \mathbf{y}''^0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problémy Nashovy rovnováhy - věžňovo dilema

Nashova rovnováha představuje jeden ze základních stavebních kamenů teorie her. Nicméně, může nás přivést k řešení, která vyvolávají určité obavy.

Jedním z nejznámějších modelových konfliktů je situace známá jako věžňovo dilema. V této hře jsou dva vězni, kteří spáchali určitý zločin, odděleně uvězněni a stojí před možností rozhodnout se mezi dvěma variantami: mlčet nebo se přiznat. Pokud oba vězni přiznají a svědčí proti sobě, oba dostanou trest 5 let. Jestliže se jeden přizná a druhý zůstane ticho, udavač bude osvobozen a druhý dostane výrazně vyšší trest, 8 let. V případě, že se oba vězni rozhodnou mlčet, nebudou plně usvědčeni a obdrží pouze 2 roky za menší přestupky. Hra věžňovo dilema může být například ve tvaru.

$$\begin{pmatrix} -2; -2 & -8; 0 \\ 0; -8 & -5; -5 \end{pmatrix}$$

První strategie jsou mlčet a druhé strategie přiznat. Roky strávené ve vězení mají záporný užitek, tedy uvádíme záporná čísla.

Po nalezení řádkových a sloupcových maxim zjistíme, že ve hře existuje jediná Nashova rovnováha:

$$\begin{pmatrix} -2; -2 & -8; [0] \\ (0); -8 & (-5); [-5] \end{pmatrix}$$

Racionální hráči, kteří nemohou kooperovat, budou vždy volit strategii *přiznat*. Paradoxem je, že i když řešení (*mlčet*, *mlčet*) s výplatami (-2,-2) je lepší než rovnovážné řešení, neodpovídá podmínkám Nashovy rovnováhy. Tento paradox ukazuje, že zcela racionální hráči, kteří jednají ve svém nejlepším zájmu, mohou nakonec skončit v situaci, která je pro všechny nevýhodná. Tato hra poskytuje analogii s ekonomickou teorií, zejména při studiu chování nevynutitelných kartelových dohod.

Dalším modelovým konfliktem je situace manželského sporu. Představme si, že manželé plánují trávit večer společně ve městě, ale každý z nich má odlišné preference. Manžel by nejraději sledoval sportovní utkání, zatímco manželka by dala přednost nákupům. Nyní jsou oba v práci a večer se mají setkat, přičemž každý se rozhoduje samostatně (předpokládejme). Tuto situaci můžeme znázornit pomocí dvoumaticové hry.

$$\begin{pmatrix} 2; 1 & -1; -1 \\ -1; -1 & 1; 2 \end{pmatrix}$$

Jedná se o modelový příklad, který jsme před chvílí diskutovali. Problém spočívá v existenci více rovnovážných řešení, z nichž žádné není dominující, a tudíž hráči nemají jasno, které řešení zvolit. Pokud manžel zvolí první řádek (sportovní utkání) a manželka druhý sloupec (nákupy), řešením bude bod $(-1, -1)$, který není rovnovážným bodem a není výhodný pro žádného z hráčů.

V konfliktu typu kuře, který si můžeme představit jako souboj dvou firem působících ve stejné oblasti, obě usilují o zdvojnásobení své těžby. Existují dvě možná rozhodnutí: buď ustoupit od svého záměru a zůstat při stávajícím rozsahu těžby, nebo neustoupit. V případě, že obě firmy ustoupí, situace se nezmění. Jestliže jedna firma ustoupí a druhá nikoli, ta ustupující si zhorší svou pozici, zatímco ta neustupující si ji zlepší. Pokud však žádná firma neustoupí, dojde k ekologické katastrofě, která bude mít negativní důsledky pro obě firmy. Tuto situaci lze ilustrovat pomocí dvoumaticové hry.

$$\begin{pmatrix} 0; 0 & (-5); [5] \\ (5); [-5] & -100; -100 \end{pmatrix}$$

Tato hra má dvě ryzí rovnovážné strategie - (ustoupit, neustoupit) a (neustoupit, ustoupit). Pokud hráči každý zvolí pro sebe výhodnější bod, dostanou se do situace (neustoupit, neustoupit), která je pro všechny nevýhodná.

- Konflikty typu kuře a manželský spor poukazují na problém vícenásobné Nashovy rovnováhy.
- V případě existence více rovnovážných řešení, z nichž alespoň dvě jsou nedominovaná, hráči čelí nejistotě ohledně toho, jaké řešení zvolit.
- Pokud každý hráč volí rozhodnutí, které je pro něj výhodnější, může dojít k situaci, kde se hráči nacházejí mimo rámec Nashovy rovnováhy.
- Koncept Nashovy rovnováhy v těchto situacích neposkytuje jednoznačný návod k výběru optimálního rozhodnutí, což může vést k nejistotě a obtížím při strategickém rozhodování.

Kooperativní hry dvou hráčů

- Předpokládejme nyní, že hráči mohou spolupracovat (ale nemusí).
- Před hrou mohou uzavírat závazné dohody.
- Je zřejmé, že hráči budou inklinovat k spolupráci a uzavření dohody, pokud to bude pro oba přínosné, tj. pokud tím oba získají větší výhru, než kdyby nespolupracovali.
- Spolupráce má význam pouze u her s nenulovým součtem.

Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou

Začněme zkoumáním her, kde hráči mají možnost uzavřít závazné dohody před začátkem hry, přičemž výsledný zisk, který vytvoří, nemůže být následně přerozdělen.

Definice

Uvažujme dvoumaticovou hru dvou hráčů s výplatními maticemi A, B typu $m \times n$. **Společná strategie** je matice pravděpodobností $P = (p_{ij})$ typu $m \times n$, tj.

$$p_{ij} \geq 0 \text{ pro } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Společná strategie přiřazuje pravděpodobnost každé dvojici ryzích strategií. Potom očekávané hodnoty výplatní funkce jsou

$$v_1(P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} a_{ij}, \quad v_2(P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} b_{ij}$$

Kooperativní hra s nepřenosnou výhrou - příklad

Mějme hru dvou hráčů určenou dvoumaticí

$$\begin{pmatrix} 2; 0 & -1; -1 & 0; 3 \\ -2; -1 & 3; -1 & 0; 2 \end{pmatrix}.$$

Jedna možná společná strategie by byla určená maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Očekávané výhry prvního, resp. druhého hráče by byly

$$v_1(P) = \frac{1}{8} \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-2) + \frac{5}{24} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 0 = \frac{3}{8}$$

$$v_2(P) = \frac{1}{8} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{5}{24} \cdot (-1) + \frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{17}{24}$$

V kooperativní hře hráči uzavírají dohodu ohledně společné strategie, kterou mají zvolit.

Definice

Kooperativní výplatní oblast je množina

$$K = \{(v_1(P), v_2(P)) : P \text{ je společná strategie}\}.$$

K je konvexní, uzavřená a omezená množina obsahující odpovídající nekooperativní oblast.

Kooperativní hra s nepřenosnou výhodou - příklad

Vraťme se ke konfliktu typu manželský spor.

$$\begin{pmatrix} 2; 1 & -1; -1 \\ -1; -1 & 1; 2 \end{pmatrix}$$

řešili jsme jako nekooperativní hru. Máme dva rovnovážné body v ryzích strategiích a jeden rovnovážný bod ve smíšených strategiích.

$$\mathbf{x}'^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}'^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}''^0 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \mathbf{y}''^0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Přitom očekávané hodnoty výhry jsme určili takto.

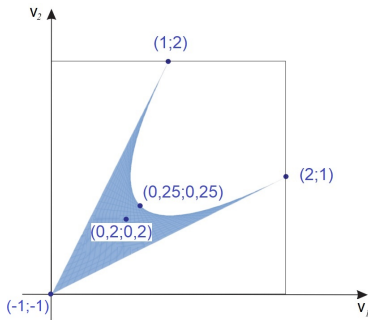
$$v_1(x_1, y_1) = x_1(5y_1 - 2) - 2y_1 + 1$$

$$v_2(x_1, y_1) = y_1(5x_1 - 3) - 3x_1 + 2$$

Rovnovážný bod	Očekávaná hodnota výhry
$((1;0),(1;0))$	$(2;1)$
$((0,6;0,4),(0,4;0,6))$	$(0,2;0,2)$
$((0;1),(0;1))$	$(1;2)$

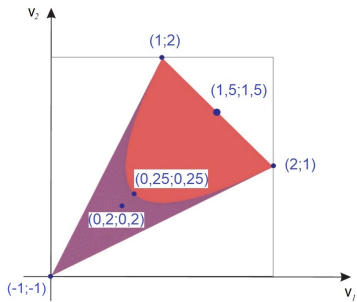
Kooperativní hra s nepřenosnou výhodou - příklad

Potom všechny dvojice výplatních funkcí, tj. dosažitelné body v rámci nekooperativní hry lze zobrazit takto:



Kooperativní hra s nepřenosnou výhodou - příklad

Potom kooperativní výplatní oblast této hry vypadá takto:



Zobrazený bod $(1,5;1,5)$ je pro společnou strategii

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

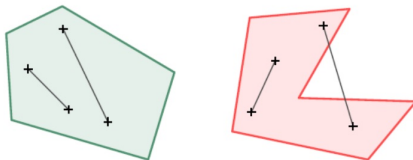
Kooperativní hra s nepřenosnou výhodou

Abychom mohli vyslovit důležitou větu, připomeneme si základní pojmy týkající se konvexních množin.

Definice

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **konvexní**, jestliže pro každé $x, y \in M$ a každé reálné číslo $t, 0 \leq t \leq 1$, platí

$$tx + (1 - t)y \in M$$



Definice

Nechť $N = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ je konečná podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexní kombinací** množiny N se rozumí vektor

$$w = \sum_{i=1}^k t_i x_i, \text{ kde } t_1 + \dots + t_k = 1, \forall i : t_i \geq 0.$$

Definice

Nechť A je libovolná podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexním uzávěrem** množiny A se rozumí množina všech konvexních kombinací konečných podmnožin množiny A .

Platí následující věta.

Věta

Uvažujme hru dvou hráčů určenou maticemi A a B typu $m \times n$. Kooperativní výplatní oblast je konvexní uzávěr množiny bodů v $\mathbb{R}^2$, jejichž souřadnice jsou prvky dvoumatice tvořené maticemi A a B .

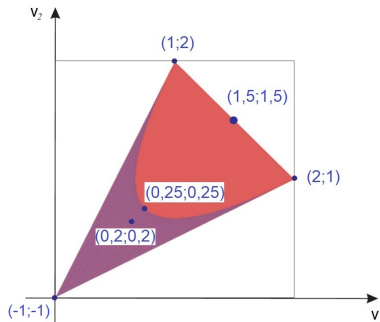
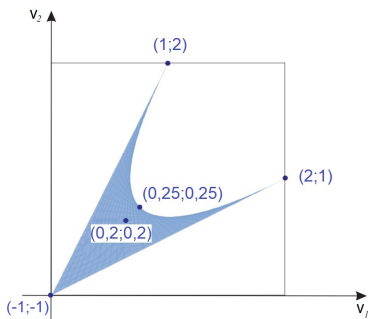
Důkaz je zřejmý. Je-li P společná strategie, pak odpovídající dvojice hodnot výplatních funkcí jsou

$$(v_1(P), v_2(P)) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} a_{ij}, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} b_{ij} \right).$$

Všechny tyto body vytvoří konvexní uzávěr množiny $\{(a_{ij}, b_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. A naopak jakýkoli bod konvexního uzávěru této množiny je výplatní dvojicí.

Kooperativní hra s nepřenosnou výhodou

Konflikt manželský spor:



Nyní předpokládejme **přenosnou výhru**, tj. že hráči si společnou výhru mohou přerozdělit dle dohody.

- V případě, kdy výplatou je například užitek (jak je to ve hře manželský spor), není možné tento užitek přenést z jednoho hráče na druhého.
- Pokud je výplatou například zisk v penězích, hráči mají možnost tento zisk libovolně přerozdělovat.
- Toto otevírá možnost situace, kdy jeden hráč by při kooperaci získal dle výplatní matice menší výhru než při nekooperaci. Nicméně, vzhledem k přenosnosti výhry může druhý hráč přispět částí svého zisku, aby ho přiměl ke spolupráci.

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

Uvažujme následující dvoumaticovou hru, kdy výplatami si představíme například výhru v korunách.

$$\begin{pmatrix} 1;5 & 4;2 & 2;3 \\ 2;2 & 1;9 & 1;4 \\ 3;4 & 3;1 & 4;0 \end{pmatrix}$$

Nejprve nás zajímá zaručená výhra, tj. kolik hráč získá bez spolupráce.

- rovnovážná zaručená výhra Nashův rovnovážný bod, je-li právě jeden
- maximinová zaručená výhra zaručená výhra hráče, pokud se mu ten druhý bude snažit co nejvíce uškodit

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

Rovnovážná zaručená výhra:

- hráči se dohodli, že spolupracovat nebudou
- zvolí tedy sedlový prvek Nashovu rovnováhu
- zaručená výhra 1. hráče, označíme $v(\{1\})$
- zaručená výhra 2. hráče, označíme $v(\{2\})$

$$\begin{pmatrix} 1; [5] & (4); 2 & 2; 3 \\ 2; 2 & 1; [9] & 1; 4 \\ (3); [4] & 3; 1 & (4); 0 \end{pmatrix}$$

tedy

- $v(\{1\}) = 3$ Kč
- $v(\{2\}) = 4$ Kč

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

Maximinová zaručená výhra:

- hráči se dohodnou, že spolupracovat budou, ale co když protihráč dohodu nedodrží
- kolik dokáže hráč získat, i když mu protihráč bude dělat naschvály
- zaručená výhra 1. hráče $v(\{1\}) = \max_i \min_j a_{ij}$
- zaručená výhra 2. hráče $v(\{2\}) = \max_j \min_i a_{ij}$

1; 5	4; 2	2; 3	→ 1
2; 2	1; 9	1; 4	→ 1
3; 4	3; 1	4; 0	→ 3
↓	↓	↓	
2	1	0	

tedy

- $v(\{1\}) = 3$ Kč
- $v(\{2\}) = 2$ Kč

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

- nyní budeme hledat celkovou výhru hráčů při spolupráci
- jejich společnou výhru označíme $v(\{1, 2\})$
- kolik získají celkem při strategii x_1 a y_2 , kolik při strategii x_3 a y_3 ?

$$\begin{pmatrix} 1; 5 & 4; 2 & 2; 3 \\ 2; 2 & 1; 9 & 1; 4 \\ 3; 4 & 3; 1 & 4; 0 \end{pmatrix}$$

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 4 & \mathbf{10} & 5 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Pak $v(\{1, 2\}) = \max_i \max_j (a_{ij} + b_{ij}) = 10$ Kč.

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

- Rovnovážná zaručená výhra
 $v(\{1\}) = 3$ Kč
 $v(\{2\}) = 4$ Kč
 $10 > 3 + 4$, tedy spolupráce se vyplatí
- Maximinová zaručená výhra
 $v(\{1\}) = 3$ Kč
 $v(\{2\}) = 2$ Kč
 $10 > 3 + 2$, tedy spolupráce se vyplatí

Takže první hráč zvolí druhou strategii a druhý hráč také zvolí druhou strategii, čímž dohromady získají 10 Kč. Otázkou zůstává, jak si tuto výhru rozdělit mezi sebou.

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

- Celkový zisk musí být rozdělen mezi hráče, označme a_1 zisk prvního hráče a a_2 zisk druhého hráče.
- Platí tedy rovnice $a_1 + a_2 = v(1, 2)$, kde $v(1, 2)$ je celkový zisk.
- První hráč musí dostat alespoň svou zaručenou výhru, což znamená $a_1 \geq v(1)$.
- Stejně tak druhý hráč musí dostat alespoň svou zaručenou výhru, což znamená $a_2 \geq v(2)$.

Kooperativní hra s přenosnou výhrou - příklad

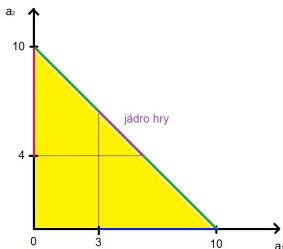
Uvažujme rovnovážnou zaručenou výhru.

$$a_1 + a_2 = v(\{1, 2\}) = 10 \text{ Kč}$$

$$a_1 \geq v(\{1\}) = 3 \text{ Kč}$$

$$a_2 \geq v(\{2\}) = 4 \text{ Kč}$$

jádro hry = všechny dvojice (a_1, a_2) , které splňují uvedené vztahy



Kterou možnost z jádra hry vybrat?

- Teorie vyjednávání, jako odvětví teorie her, se zabývá procesem dohody a spolupráce mezi hráči.
- Základy této teorie byly položeny Johnem Nashem v jeho člancích z let 1950 a 1953.
- Při analýze vyjednávání předpokládáme existenci **množiny přípustných dohod**, které jsou možné mezi hráči.
- Zároveň existuje **bod nedohody**, který představuje situaci, kdy hráči nedosáhnou dohody.
- Před vyjednáváním je hráčům znám bod nedohody, který můžeme určit na základě maximinové nebo rovnovážné zaručené výhry.
- Hráči při vyjednávání hledají řešení, které je pro ně výhodnější než nedohoda.

Vyjednávací problém je charakterizován

- množinou hráčů $\{1, 2, \dots, n\}$, my budeme nadále uvažovat pouze dva hráče $\{1, 2\}$
- množinou přípustných dohod P
- bodem nedohody
- množinou užitkových funkcí, které každé přípustné dohodě i bodu nedohody přiřadí užitek pro i -tého hráče

Ukážeme si následně čtyři typy řešení:

- Nashovo vyjednávací řešení
- rovnostářské vyjednávací řešení
- utilitární vyjednávací řešení
- vyjednávací řešení Kalai-Smorodinského

Uvažujeme vyjednávací hru se dvěma hráči, označíme

- užitkovou funkci prvního hráče $u_1(x)$
- užitkovou funkci druhého hráče $u_2(y)$
- Nashovo vyjednávací řešení (x^*, y^*)
- bod nedohody (x^0, y^0)

Na základě von Neumannovy a Morgensternovy teorie užitečnosti Nash stanovil následující axiomy, které musí (x^*, y^*) splňovat:

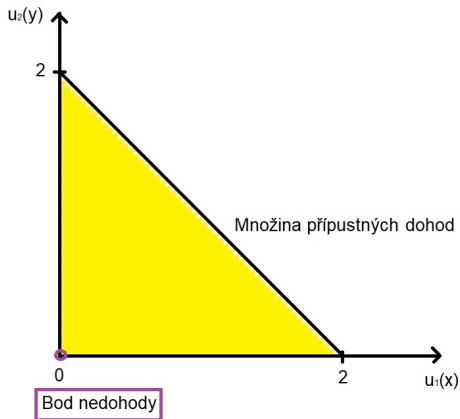
- paretovská optimalita
- symetrie
- nezávislost na lineární transformaci
- nezávislost na irelevantních alternativách

Příklad

Význam axiomů si ukážeme rovnou na příkladu

- dva hráči si mají mezi sebe jakkoliv rozdělit částku 2 Kč
- pokud se nedohodnou, dostane každý 0 Kč (**bod nedohody**)
- pro jednoduchost předpokládejme, že užitek obou hráčů odpovídá finančnímu zisku
- $u_1(x) = x$
- $u_2(y) = y$
- hledáme Nashovo vyjednávací řešení (x^*, y^*)

Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

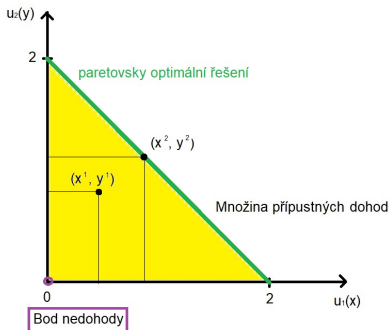


Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

1. axiom - paretovská optimalita

Uvažujme přípustné dohody (x^1, y^1) a (x^2, y^2) , pokud $u_1(x^2) > u_1(x^1)$ a zároveň $u_2(y^2) > u_2(y^1)$, pak (x^1, y^1) nemůže být vyjednávacím řešením (x^*, y^*) .

- vyjadřuje maximalizaci užitku obou hráčů
- řešení, které je dominované, nemůže být vyjednávacím řešením

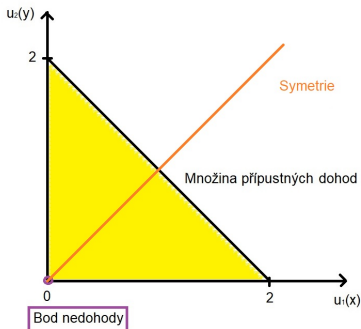


2. axiom - symetrie

Je-li množina přípustných dohod symetrická

(tj. $(u_1(x), u_2(y)) \in P \Leftrightarrow (u_2(y), u_1(x)) \in P$) a $u_1(x^0) = u_2(y^0)$, pak $u_1(x^*) = u_2(y^*)$

- pokud je problém symetrický, pak v Nashově rovnovážném řešení musí mít oba hráči stejný užitek
- oba hráči mají stejné vyjednávací schopnosti



3. axiom - nezávislost na lineární transformaci

Pokud transformujeme původní užitkové funkce pomocí lineární transformace:

$$u'_1(x) = au_1(x) + b$$

$$u'_2(y) = cu_2(y) + d,$$

kde $a, c > 0$, pak vyjednávacím řešením nového problému je opět (x^, y^*) s užitky $u'_1(x^*) = au_1(x^*) + b$ a $u'_2(y^*) = cu_2(y^*) + d$.*

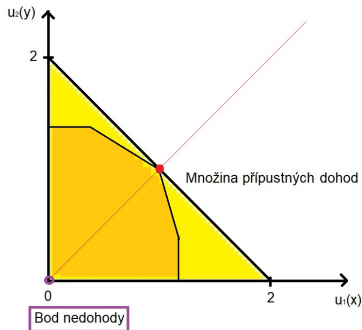
- je to obdobné jako u ekvivalentní hry, vynásobením kladnou konstantou a přičtením libovolné konstanty se rovnovážné strategie nezmění

4. axiom - nezávislost na irelevantních alternativách

Je-li $P' \subseteq P$ množina přípustných dohod a $(x^, y^*) \in P'$, pak se Nashovo vyjednávací řešení (x^*, y^*) nezmění.*

- pokud je nová množina přípustných dohod podmnožinou té původní a zároveň obsahuje Nashovo vyjednávací řešení, pak se řešení nezmění
- $P \setminus P'$ tvoří irelevantní alternativy, jejichž přítomnost nebo nepřítomnost ve vyjednávací množině nesmí mít vliv na výsledek vyjednávání.

Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení



- v každém vyjednávacím problému **existuje právě jedno vyjednávací řešení, které splňuje výše uvedené axiomy**
- toto jediné vyjednávací řešení ve hře dvou hráčů, které splňuje všechny axiomy, maximalizuje hodnotu **Nashova součinu**

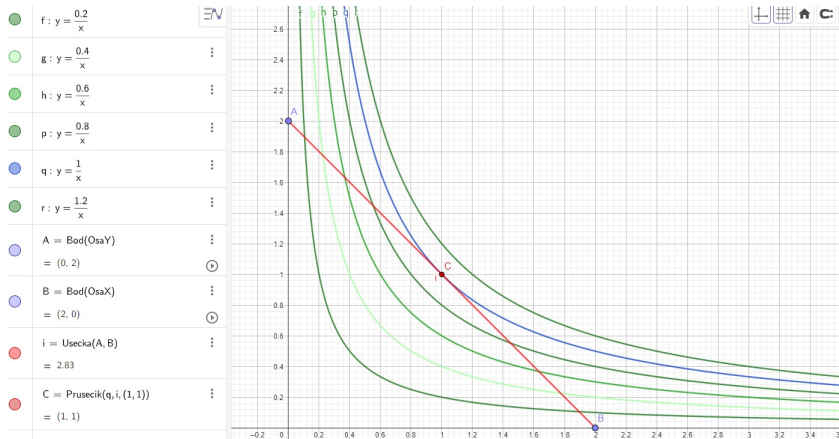
$$(u_1(x^*) - u_1(x^0))(u_2(y^*) - u_2(y^0)).$$

Když se vrátíme k našemu příkladu, spočítáme Nashův součin:

$$(u_1(x^*) - u_1(x^0))(u_2(y^*) - u_2(y^0)) = (u_1(x^*) - 0)(u_2(y^*) - 0) = u_1(x^*)u_2(y^*).$$

Množina přípustných dohod je omezena nerovnicí $u_1(x) + u_2(y) \leq 2$ a Nashův součin tak nabývá maxima v bodě $(u_1(1), u_2(1)) = (1, 1)$.

Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení



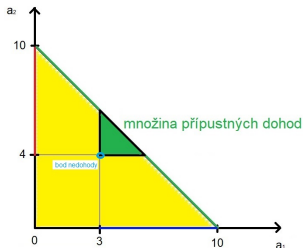
Připomeňme si hru z předchozí kapitoly.

$$a_1 + a_2 = v(\{1, 2\}) = 10 \text{ Kč}$$

$$a_1 \geq v(\{1\}) = 3 \text{ Kč}$$

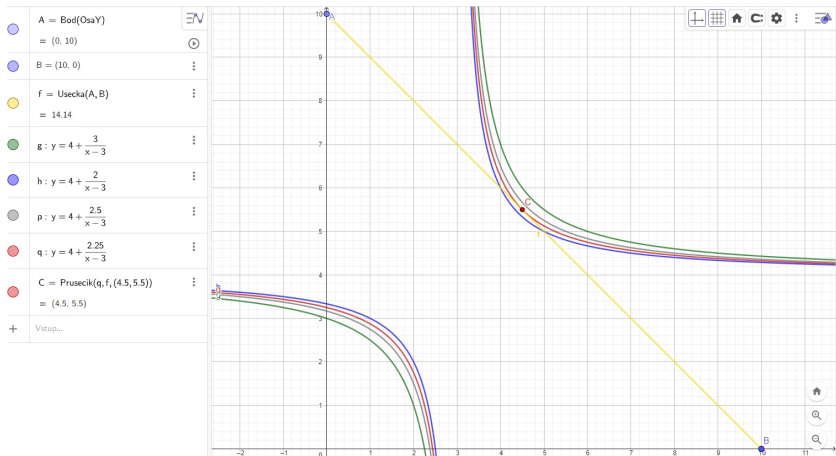
$$a_2 \geq v(\{2\}) = 4 \text{ Kč}$$

jádro hry = všechny dvojice (a_1, a_2) , které splňují uvedené vztahy



Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

Nashův součin $(x^* - 3)(y^* - 4)$ nabývá maxima v bodě $(\frac{9}{2}, \frac{11}{2})$



Teorie vyjednávání - Nashovo vyjednávací řešení

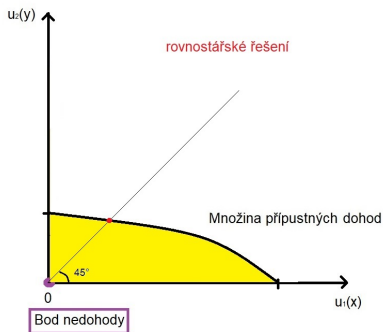
Ilustrativní příklad vyjednávacího problému z Nashova článku (1950): Bill a Jack jsou dva kamarádi, kteří mají různé věci, které mohou mezi sebou vyměňovat. Jakého nejvýhodnějšího řešení mohou chlapci výměnou dosáhnout?

Billovy věci	Užitek pro Billa	Užitek pro Jacka
knížka	2	4
káča	2	2
míč	2	1
pálka	2	2
krabička	4	1
Jackovy věci		
psací pero	10	1
hračka	4	1
nůž	6	2
čapka	2	2

Nashův součin nabývá svého maxima pro směnu, ve které Bill dá Jackovi knížku a káču, míč a pátku výměnou za psací pero, hračku a nůž. Užítky Billa a Jacka budou 24 a 11 a Nashův součin bude mít hodnotu $(24-12)(11-6)=60$. Můžete si ověřit, že není možné najít jinou směnu, která by dosahovala vyšší hodnoty Nashova součinu.

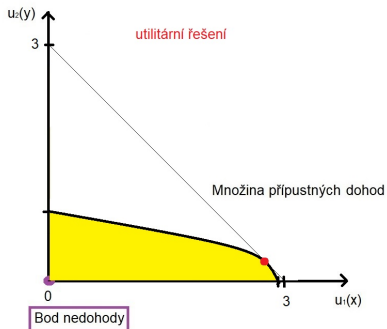
Teorie vyjednávání - rovnostářské vyjednávací řešení

- obvykle lidé očekávají určitou "spravedlnost" v rozdělování
- rovnostářské řešení předpokládá pro všechny hráče shodné užitky z jejich kooperace, tedy
- $(u_1(x^*) - u_1(x^0)) = (u_2(y^*) - u_2(y^0))$
- toto řešení je v rozporu s Nashovým axiomem č. 3 - nezávislost na lineární transformaci



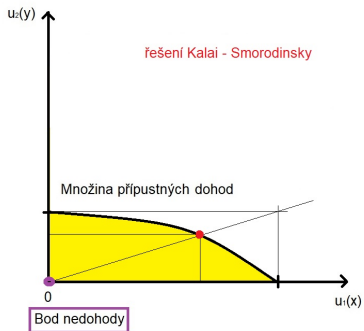
Teorie vyjednávání - utilitární vyjednávací řešení

- utilitární vyjednávací řešení vyžaduje maximalizaci celkového užitku pro společnost (veřejné blaho)
- maximalizujeme součet $(u_1(x^*) - u_1(x^0)) + (u_2(y^*) - u_2(y^0))$
- stejně jako rovnostářské řešení je v rozporu s Nashovým axiomem č. 3 - nezávislost na lineární transformaci



- jedná se o řešení vycházející z neoptimističtějších očekávání
- kritizují Nashovo řešení, vyřazení 4. axiomu - nezávislost na irelevantních alternativách
- místo něj axiom 5 - monotónnost
- *pokud dojde k rozšíření množiny přípustných dohod, užitek hráče se zlepší nebo zůstane stejný*
- poměr nárůstu užitků pro hráče je stejný s poměrem nárůstu užitků v případě, že by hráči dosáhli maximálního možného užitku
- $$\frac{u_1(x^*) - u_1(x^0)}{u_2(y^*) - u_2(y^0)} = \frac{\max(u_1(x) - u_1(x^0))}{\max(u_2(y) - u_2(y^0))}$$

Teorie vyjednávání - vyjednávací řešení Kalai-Smorodinsky



- Všechna čtyři zmíněná řešení vyjednávacího problému pracují s bodem nedohody.
- Změna tohoto bodu nedohody má za následek změnu vyjednávacího řešení.
- Zdá se tedy, že klíčovým strategickým tahem hráče, ještě před samotným začátkem vyjednávání, je získání výhodnějšího postavení prostřednictvím manipulace s bodem nedohody. Toho lze dosáhnout například hrozbou nebo manipulací faktů apod.

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Nyní všechno spojíme do konkrétního příkladu. Uvažujme maticovou hru 3×2 , výplaty jsou výhry v korunách.

$$\begin{pmatrix} 1; 6 & 3; 2 \\ 3; 4 & 2; 6 \\ 4; 4 & 1; 6 \end{pmatrix}$$

Jako bod nedohody budeme uvažovat maximinovou výhru

- zaručená výhra 1. hráče $v(\{1\}) = \max_i \min_j a_{ij}$
- zaručená výhra 2. hráče $v(\{2\}) = \max_j \min_i a_{ij}$

$$\begin{array}{ccc} 1; 6 & 3; 2 & \longrightarrow 1 \\ 3; 4 & 2; 6 & \longrightarrow 2 \\ 4; 4 & 1; 6 & \longrightarrow 1 \\ \downarrow & \downarrow & \\ 4 & 2 & \end{array}$$

tedy

- $v(\{1\}) = 2$ Kč
- $v(\{2\}) = 4$ Kč

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Dále zjistíme celkovou výhru hráčů při spolupráci

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & \mathbf{8} \\ \mathbf{8} & 7 \end{pmatrix}$$

$$v(\{1, 2\}) = \max_i \max_j (a_{ij} + b_{ij}) = 8 \text{ Kč.}$$

Rozdělení mezi hráče musí splňovat následující:

- $a_1 + a_2 = 8$
- $a_1 \geq 2$
- $a_2 \geq 4$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Pro rozdělení výhry pomocí teorie vyjednávání musíme znát užitkové funkce jednotlivých hráčů. Podle vztahu k riziku rozlišujeme hráče (vztah zisk-užitek)

- neutrální k riziku: $u(x) = x$
- citlivý k riziku: $u(x) = \sqrt{x}$
- vyhledávající riziko $u(x) = x^2$

Zde budeme uvažovat prvního hráče neutrálního k riziku a druhého hráče vyhledávajícího riziko.

$$\begin{aligned}u_1(x) &= x \\ u_2(y) &= y^2\end{aligned}$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Nejprve sestrojíme množinu přípustných dohod.

$$\begin{aligned}(x^0, y^0) &= (2, 4) \\ (u_1(x^0), u_2(y^0)) &= (2, 16)\end{aligned}$$

přitom

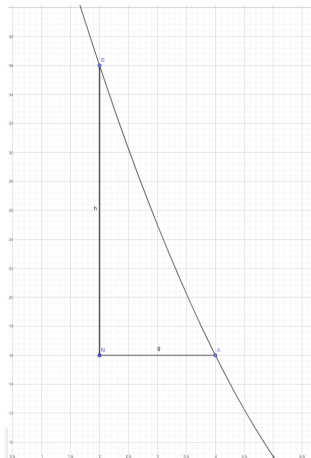
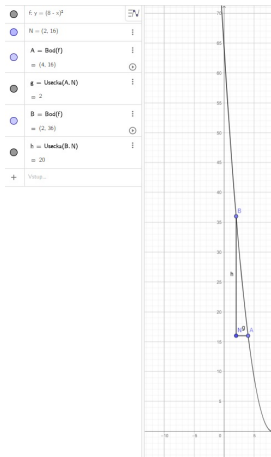
$$x^* + y^* = 8$$

Graf užitkových funkcí $u_1(x)$ a $u_2(y)$ je dán vztahem

$$\begin{aligned}u_1(x) &= x \\ u_2(y) &= y^2 = (8 - x)^2 = (8 - u_1(x))^2\end{aligned}$$

Na ose x zobrazíme $u_1(x)$ a na ose y zobrazíme $u_2(y)$.

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení



Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Nashovo řešení

Vyjádříme Nashův součin:

$$\begin{aligned}(u_1(x^*) - u_1(x^0))(u_2(y^*) - u_2(y^0)) &= (x^* - 2)((y^*)^2 - 16) = \\ &= (8 - y^* - 2)((y^*)^2 - 16) = (6 - y^*)((y^*)^2 - 16) = -(y^*)^3 + 6(y^*)^2 + 16y^* - 96\end{aligned}$$

Hledáme maximum, tedy položíme první derivaci rovnu nule.

$$-3(y^*)^2 + 12y^* + 16 = 0$$

Kvadratická rovnice má jedno kladné řešení y^* :

$$y^* = 2 + \sqrt{4 + \frac{16}{3}} \doteq 5,055$$

$$x^* = 8 - 2 - \sqrt{4 + \frac{16}{3}} = 6 - \sqrt{4 + \frac{16}{3}} \doteq 2,945$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Nashovo vyjednávací řešení $(x^*, y^*) = (5, 055; 2, 945)$ s užitky pro jednotlivé hráče

$$u_1(x^*) = 6 - \sqrt{4 + \frac{16}{3}} \doteq 2, 945$$

$$u_2(y^*) = (2 + \sqrt{4 + \frac{16}{3}})^2 \doteq 25, 554$$

a hodnotou Nashova součinu

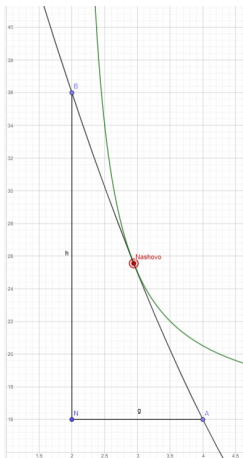
$$(u_1(x^*) - u_1(x^0))(u_2(y^*) - u_2(y^0)) = (2, 945 - 2)(25, 554 - 16) = 9, 029.$$

Do grafu zakreslíme jako

$$(u_1(x^*) - 2)(u_2(y^*) - 16) = 9, 029$$

$$u_2(y^*) = 16 + \frac{9, 029}{u_1(x^*) - 2}$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhodou s vyjednáváním řešení



Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

rovnostářské řešení

U rovnostářského řešení požadujeme rovnost

$$\begin{aligned}u_1(x^*) - u_1(x^0) &= u_2(y^*) - u_2(y^0) \\x^* - 2 &= (y^*)^2 - 16 \\8 - y^* - 2 &= (y^*)^2 - 16\end{aligned}$$

Tedy

$$(y^*)^2 + y^* - 22 = 0$$

Kvadratická rovnice má jedno kladné řešení y^* :

$$\begin{aligned}y^* &= \frac{-1 + \sqrt{89}}{2} \doteq 4,217 \\x^* &= 8 - \frac{-1 + \sqrt{89}}{2} \doteq 3,783\end{aligned}$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhodou s vyjednáváním řešení

Rovnostářské vyjednávací řešení $(x^*, y^*) = (3, 783; 4, 217)$ s užitky pro jednotlivé hráče

$$u_1(x^*) = 8 - \frac{-1 + \sqrt{89}}{2} \doteq 3,783$$

$$u_2(y^*) = \left(\frac{-1 + \sqrt{89}}{2}\right)^2 \doteq 17,783$$

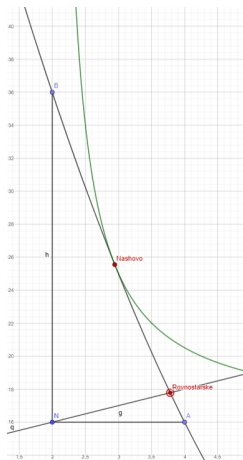
Do grafu zakreslíme jako

$$y = x + k,$$

konstantu k určíme tak, že přímka musí procházet bodem nedohody $(2, 16)$, tedy

$$y = x + 14.$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhodou s vyjednáváním řešení



Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

utilitární řešení

Maximalizujeme součet

$$\begin{aligned}(u_1(x^*) - u_1(x^0)) + (u_2(y^*) - u_2(y^0)) &= (x^* - 2) + ((y^*)^2 - 16) \\ &= 8 - y^* - 2 + (y^*)^2 - 16 \\ &= (y^*)^2 - y^* - 10\end{aligned}$$

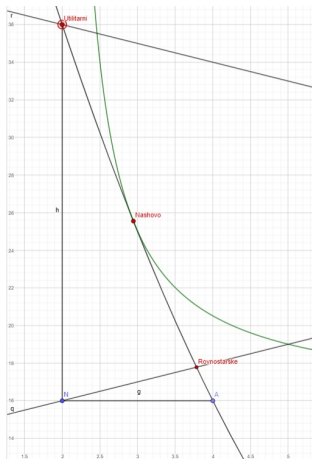
Tato funkce nabývá svého maxima na intervalu $y^* \in [4, 6]$ v bodě $y^* = 6$.

$$\begin{aligned}y^* &= 6 \\ x^* &= 2 \\ u_1(x^*) &= 2 \\ u_2(y^*) &= 36\end{aligned}$$

Do grafu zakreslíme jako $y = -x + k$, konstantu k určíme tak, že přímka musí procházet bodem utilitárního řešení $(2, 36)$, tedy

$$y = -x + 38.$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhodou s vyjednáváním řešení



Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Kalai-Smorodinského řešení

$$\begin{aligned}\frac{u_1(x^*) - u_1(x^0)}{u_2(y^*) - u_2(y^0)} &= \frac{\max(u_1(x)) - u_1(x^0)}{\max(u_2(y)) - u_2(y^0)} \\ \frac{u_1(x^*) - 2}{u_2(y^*) - 16} &= \frac{4 - 2}{36 - 16} \\ u_1(x^*) - 2 &= \frac{1}{10}(u_2(y^*) - 16) \\ u_2(y^*) &= 10u_1(x^*) - 4 \\ (y^*)^2 &= 10(8 - y^*) - 4 \\ (y^*)^2 + 10y^* - 76 &= 0\end{aligned}$$

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Kvadratická rovnice má jedno kladné řešení y^* :

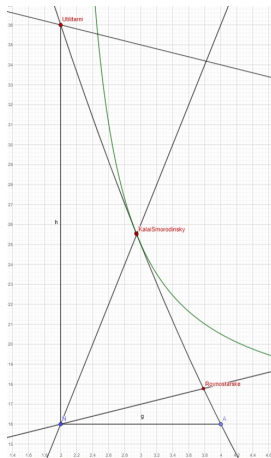
$$\begin{aligned}y^* &= -5 + \sqrt{101} \doteq 5,050 \\x^* &= 8 + 5 - \sqrt{101} \doteq 2,950\end{aligned}$$

Kalai-Smorodinského vyjednávací řešení $(x^*, y^*) = (2,950; 5,050)$ s užitky pro jednotlivé hráče

$$\begin{aligned}u_1(x^*) &= 13 - \sqrt{101} \doteq 2,950 \\u_2(y^*) &= \left(-5 + \sqrt{101}\right)^2 \doteq 25,501\end{aligned}$$

Do grafu zakreslíme jako $u_2(y^*) = 10u_1(x^*) - 4$.

Příklad kooperativní hry s přenosnou výhodou s vyjednáváním řešení



Příklad kooperativní hry s přenosnou výhrou s vyjednáváním řešení

Shrnutí hry

$$\begin{pmatrix} 1; 6 & 3; 2 \\ 3; 4 & 2; 6 \\ 4; 4 & 1; 6 \end{pmatrix}$$

Hráči zvolí strategie (x_2, y_2) nebo (x_3, y_1) , v obou případech získají 8 Kč.
Možné rozdělení výhry je následující:

- Nashovo řešení: $(2,945; 5,055)$
- rovnostářské řešení: $(3,783; 4,217)$
- utilitární řešení: $(2; 6)$
- Kalai-Smorodinského řešení $(2,950; 5,050)$

Děkuji za pozornost.