Úlohy 2

Na případné chyby mě prosím upozorněte. Děkuji.

1. Rozhodněte a zdůvodněte, zda následující sousloví jsou výroky. Pokud odpovíte kladně, určete pravdivostní hodnotu výroku za předpokladu, že je to možné.

   (a) Pro všechna reálná x platí $x \geq 0$.

   Řešení: Jedná se o výrok, výraz má smysl pro všechna reálná čísla. Jedná se o výrok nepravdivý, protože např. pro $x = -2$ výraz neplatí.

   (b) Pro všechna reálná x platí $\sqrt{x} \geq 0$.

   Řešení: Pozor, nejedná se o výrok, protože výraz pro $x < 0$ nemá smysl. Potom nemá smysl určovat jeho pravdivostní hodnotu a není tedy výrokem.

   (c) Pro všechna reálná čísla x je $\sqrt{x^2} = |x|$.

   (d) Pro všechna reálná čísla x je $\frac{x}{x} = 1$.

   (e) Existuje alespoň jedno reálné číslo, pro něž $|x| > 0$.

   (f) Pro všechna reálná $x \geq 1$ platí $\log_2 x \geq 0$.

   (g) Pro všechna reálná $x \leq 1$ platí $\log_2 x \leq 0$.

2. Utvořte negaci výroku. Snažte se utvořený výrok vyjádřit pozitivně.

   (a) Každé celé číslo je racionální.

   Řešení: Existuje celé číslo, které je iracionální.

   (b) Pro všechna reálná čísla a, b platí: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

   (c) Existuje alespoň jedno reálné číslo, pro něž $|x| > 0$.

   Řešení: Pro všechna reálná čísla x platí $|x| \leq 0$.

   (d) Pro všechna reálná čísla x je $\sqrt{x^2} = |x|$.

   (e) Každý prvek množiny M má vlastnost V.

   (f) Alespoň jeden prvek množiny M má vlastnost V.

   (g) Úhlopříčky každého čtyřúhelníku jsou navzájem kolmé.

   Řešení: Existuje čtyřúhelník, jehož úhlopříčky nejsou navzájem kolmé.

   (h) Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro něž je $x \leq |x|$.

   (i) Pro každé rozmístění pěti předmětů do čtyř přihrádek existuje přihrádka, v níž jsou alespoň dva předměty.

   Řešení: Existuje rozmístění pěti předmětů do čtyř přihrádek takové, že v každé přihrádce je nejvýše jeden předmět.

3. Utvořte negaci výroku. Snažte se utvořený výrok vyjádřit pozitivně. Posuďte pravdivost původního i vytvořeného výroku.

   (a) Pro všechna nenulová reálná čísla x je $\frac{x}{x} = 1$.

   Řešení: Existuje alespoň jedno nenulové reálné číslo x, pro které platí $\frac{x}{x} \neq 1$. Původní výrok je pravdivý, negovaný výrok je nepravdivý.

(b) Existuje alespoň jedno nezáporné reálné číslo x, pro něž je $\sqrt{x} \leq 0$.

(c) Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro něž je $x^2 < x$.

(d) Pro všechna nenulová reálná čísla x je $x > \frac{1}{x}$.

(e) Existuje alespoň jedno nenulové reálné číslo x takové, že $\frac{1}{x} > 10$.

Řešení: Pro všechna reálná nenulová čísla x platí $\frac{1}{x} \leq 10$. Původní výrok je pravdivý (existuje např. $x = \frac{1}{20}$), negovaný výrok je nepravdivý.

(f) Mezi všemi reálnými čísly, která jsou větší než 10, existuje nejmenší.

Řešení:

- Mezi všemi reálnými čísly, která jsou větší než 10, neexistuje žádné nejmenší.
- Pro každé reálné číslo x větší než 10 existuje jiné reálné číslo větší než 10, které je menší než x.

Obě varianty jsou možné. Zde je třeba si dát pozor, co vlastně výrok říká. Na první pohled by se mohlo zdát, že začíná velkým kvantifikátorem, když začíná „mezi všemi reálnými čísly“. Ale když se nad tím zamyslíme, tak ve skutečnosti říká, že „existuje nejmenší.“ Tedy bychom ho mohli symbolicky přepsat jako

$$(\exists x)\Big((x \in \mathbb{R} \wedge x > 10) \Rightarrow \big((\forall y)(y \in \mathbb{R} \wedge y > 10) \Rightarrow y \geq x\big)\Big)$$

Z tohoto symbolického zápisu už bychom měli být schopni snadno odvodit negaci.

$$(\forall x)\Big((x \in \mathbb{R} \wedge x > 10) \wedge \big((\exists y)(y \in \mathbb{R} \wedge y > 10) \wedge y < x\big)\Big)$$

Zamyslete se také nad tím, že u kvantifikace se mění kvantifikátor, ale nikoli ke které množině se vztahuje, tedy zůstává „$x > 10; x \in \mathbb{R}$“, zatímco u výroku „$y \geq x$“ měníme znaménko nerovnosti.

Původní výrok je nepravdivý, negovaný výrok je pravdivý.

(g) Mezi všemi přirozenými čísly, která jsou menší než 100, existuje největší.

(h) V každém trojúhelníku je součet velikostí libovolných dvou jeho stran větší než velikost strany třetí.

Řešení: Existuje alespoň jeden trojúhelník, ve kterém součet velikostí některých dvou jeho stran je menší nebo roven než velikost třetí strany. Původní výrok je pravdivý, negovaný výrok je nepravdivý.

(i) V každém pravoúhlém trojúhelníku s přeponou c a s odvěsnami a, b platí $a^2 + b^2 = c^2$.

(j) V každém trojúhelníku se jeho výšky protínají v jediném bodě.

(k) Existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n \neq n_0$ je $n_0 > n$.

(l) Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné.

Řešení: Existuje dvojice rovnostranných trojúhelníků, které nejsou podobné. Původní výrok je pravdivý, negovaný výrok je nepravdivý.

4. Rozhodněte, zda jsou pravdivé následující výroky:

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ (x \geq 3 \vee x < 5)$

Řešení: Ano, platí pro každé reálné číslo.

(b) $(\exists x \in \mathbb{R})\ :\ (x \geq 3 \wedge x < 0)$

Řešení: Ne, neplatí pro žádné reálné číslo.

(c) $(\forall x \in \mathbb{Z})\ :\ (x > 3 \wedge x < 7)$

Řešení: Ne, neplatí např. pro $x = 10$.

(d) $(\exists x \in \mathbb{Z})\ :\ (x \geq 3 \wedge x < 5)$

Řešení: Ano, platí např. pro $x = 4$.

(e) $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ (x > 3 \Rightarrow x^2 > 9)$

(f) $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ (x^2 > 9 \Rightarrow x > 3)$

(g) $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ (x^2 < 0 \Rightarrow x = 13)$

(h) $(\exists x \in \mathbb{R})\ :\ (x \geq 5 \Rightarrow x^2 = 40)$

(i) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ :\ x + y = 0$

Řešení: Ano, pro každé x můžeme vzít $y := -x$.

(j) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ x + y = 0$

Řešení: Ne, neexistuje y takové, že když k němu přičteme libovolné x, výsledkem bude 0.

(k) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ :\ x \cdot y = 0$

(l) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ x \cdot y = 0$

5. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí obecně (tedy pro libovolné množiny M a výroky p, q) následující tvrzení o logické ekvivalenci dvou kvantifikovaných výroků. Pokud máte pocit, že některá dvojice kvantifikovaných výroků ekvivalentní není, tak najděte příklad takových výroků p, q a množiny M, aby jeden z kvantifikovaných výroků platil a druhý ne.

   (a) $(\forall x \in M)\ :\ (p(x) \wedge q(x)) \equiv (\forall x \in M : p(x)) \wedge (\forall x \in M : q(x))$

   Řešení: Platí. Oba výrazy vyžadují platnost p i q pro všechna x.

   (b) $(\forall x \in M)\ :\ (p(x) \vee q(x)) \equiv (\forall x \in M : p(x)) \vee (\forall x \in M : q(x))$

   Řešení: Neplatí obecně, pokud platí výraz nalevo, tak je $p(x) \vee q(x)$ splněno vždy, ale nemusí nutně $p(x)$ nebo $q(x)$ platit vždy pro všechna x. Protipříklad: $M = \mathbb{R}, p(x) : x \leq 0, q(x) : x > 0$.

   (c) $(\exists x \in M)\ :\ (p(x) \wedge q(x)) \equiv (\exists x \in M : p(x)) \wedge (\exists x \in M : q(x))$

   Nápověda: Neplatí.

   (d) $(\exists x \in M)\ :\ (p(x) \vee q(x)) \equiv (\exists x \in M : p(x)) \vee (\exists x \in M : q(x))$

   Nápověda: Platí.

   (e) $(\forall x \in M)\ :\ (p(x) \Rightarrow q(x)) \equiv (\forall x \in M : p(x)) \Rightarrow (\forall x \in M : q(x))$

   Nápověda: Neplatí.

(f) $p \wedge (\forall x \in M : q(x)) \equiv \forall x \in M : (p \wedge q(x))$

Nápověda: Platí.

(g) $p \vee (\forall x \in M : q(x)) \equiv \forall x \in M : (p \vee q(x))$

Nápověda: Platí.

(h) $p \wedge (\exists x \in M : q(x)) \equiv \exists x \in M : (p \wedge q(x))$

Nápověda: Platí.

(i) $p \vee (\exists x \in M : q(x)) \equiv \exists x \in M : (p \vee q(x))$

Nápověda: Platí.

6. Znegujte formálně následující výroky. Pro každý výrok i jeho negaci si pak zvlášť rozmyslete, zda platí či ne, abyste se přesvědčili, že vždy mají opačnou pravdivost.

(a) $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ x^2 \leq 10$

Řešení: $(\exists x \in \mathbb{R}) \ : \ x^2 > 10$
Platí negovaný výrok.

(b) $(\exists x \in \mathbb{Z}) \ : \ (x \geq 2 \wedge x^2 = 16)$

Řešení: $(\forall x \in \mathbb{Z}) \ : \ (x < 2 \vee x^2 \neq 16)$
Platí původní výrok.

(c) $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ (x \neq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1)$

Řešení: $(\exists x \in \mathbb{R}) \ : \ (x \neq 0 \wedge x^2 < 1)$
Platí negovaný výrok.

(d) $(\exists! x \in \mathbb{Z}) \ : \ x + 1 = 2$

Řešení: „Neexistuje žádné x nebo existují alespoň dvě různá x, pro která platí $x + 1 = 2$.“

Pokud bychom chtěli zapsat symbolicky, je potřeba si rozepsat, co nám vlastně výrok říká.

$$(\exists x \in \mathbb{Z} \quad x + 1 = 2) \quad \wedge \quad \Big((\forall x)(\forall y)(x + 1 = 2 \wedge y + 1 = 2) \Rightarrow x = y\Big)$$

Tedy říká nám dvě věci, jednak že nějaké takové x existuje a jednak že pokud existuje ještě nějaké y splňující uvedený vztah, pak nutně $x = y$. Takto přepsaný výrok již dokážeme symbolicky znegovat. Vzpomeňme si, že negace konjunkce je disjunkce negací.

$$(\forall x \in \mathbb{Z} \quad x + 1 \neq 2) \quad \vee \quad \Big((\exists x)(\exists y)(x + 1 = 2 \wedge y + 1 = 2 \wedge x \neq y\Big)$$

Platí původní výrok.

(e) $(\exists x \in \mathbb{R}) \ : \ (x^2 < 1 \wedge x \neq 0)$

(f) $(\exists! x \in \mathbb{R}) \ : \ x^2 = 1$

(g) $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ (x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = x)$

(h) $(\exists x \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathbb{R}) \ : \ x + y = 0$

(i) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathbb{R}) \ : \ x^2 - y^2 \leq 1$

(j) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\exists y \in \mathbb{R}) \ : \ \cos(x) = \sin(y)$

7. Rozložte následující výrokovou formuli do jednotlivých komponent, napište, jaké všechny možné formule obsahuje.

   (a) $(\forall x) x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq x$

   Řešení: Obsahuje následující formule: $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq x$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq x$, $(\forall x) x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq x$.

   (b) $(\forall x) x \in \mathbb{R} \Rightarrow x > 3$

   (c) $(\forall x) x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ je liché

   (d) $(\forall n) n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 0$

   (e) $(\forall n) n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < 8$

8. Rozhodněte, co je výrok a co je výroková formule.

   (a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   Řešení: Jedná se o výrok, říkáme, že platí pro všechna přirozená n.

   (b) $\varphi(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   Řešení: Jedná se o výrokovou formuli pro proměnnou n.

   (c) $(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \varphi(n)$

   (d) $\varphi(1) : 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$

   (e) $\varphi(2) : 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$

   (f) a

   (g) 1

   (h) 2