Matematika pro učitele III, části Aplikace lineární algebry v diskrétní matematice a Toky v síti (studijní opora)

Martin Kuřil

Obsah

1 Úvod **1**

2 Aplikace lineární algebry v diskrétní matematice **3**
2.1 Řešení homogenních lineárních rekurencí s konstantními koeficienty 3
2.2 Bloková schémata 4
2.3 Fisherova nerovnost 5
2.4 Počet koster grafu 5

3 Toky v síti **11**
3.1 Síť 11
3.2 Velikost toku 13
3.3 Kapacita řezu 13
3.4 Zlepšující cesta 16
3.5 Fordův – Fulkersonův algoritmus pro maximální tok 20
3.6 Věta o maximálním toku a minimálním řezu 22
3.7 Aplikace toků v sítích 23

1 Úvod

Jednotlivé kapitoly (části) této studijní opory jsou zpracovány dvojím způsobem. V některé kapitole je probíraná látka v textu přímo vyložena a výklad je doplněn několika cvičeními. Jindy je čtenáři (studentovi) po krátkém úvodu do problematiky uloženo, kde a co přesně má nastudovat. Někdy následují další doporučení, například co dalšího by bylo dobré si přečíst. Ve třech případech je uloženo studium z knihy [6]:

Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Nakladatelství Karolinum, Praha 2002.

Jde o výbornou knihu, která již vyšla v několika vydáních (naposled, pokud vím, roku 2010). O kvalitě knihy svědčí také fakt, že byla přeložena do angličtiny a pod názvem Invitation to Discrete Mathematics také již vyšla nejméně ve dvou vydáních. Milovníci anglického jazyka (a matematické angličtiny) mohou tedy studovat z anglického překladu.

V jednom případě je čtenáři uloženo studium z knihy [3]:

Eduard Fuchs: *Diskrétní matematika pro učitele*. Masarykova univerzita, Brno 2011.

V knize jsou vyloženy úvodní partie kombinatoriky a teorie grafů v rozsahu, který by měli ovládat středoškolští učitelé matematiky.

Ve dvou případech je uloženo studium z knihy [2]:

Jiří Demel: *Grafy a jejich aplikace*. Vydání třetí, elektronické (vlastním nákladem druhé), 2019.
`https://kix.fsv.cvut.cz/~demel/grafy/gr.pdf`

Prosím čtenáře, aby vzal v úvahu, že toto je první verze studijní opory – v budoucnu bude ještě opravována, upravována, vylepšována.

Jednotlivé číselné obory budeme značit následovně:

- $\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel, $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- $\mathbb{R}$ – množina všech reálných čísel
- $\mathbb{C}$ – množina všech komplexních čísel, $\mathbb{C} = \{a + bi | \ a, b \in \mathbb{R}\}$

2 Aplikace lineární algebry v diskrétní matematice

Lineární algebru, i zcela elementární, lze využít k řešení řady problémů diskrétní matematiky. Několik pěkných použití lineární algebry v problémech diskrétní matematiky uvidíte v této části kursu. Použití metod lineární algebry je často neočekávané.

Jako základní literatura zde poslouží především kniha [6], v části první pak také učebnice [3].

Těm z vás, které zajímají (začnou zajímat) aplikace lineární algebry v matematice, velmi doporučuji anglicky psanou knihu [5], která je 53. svazkem studentské matematické knihovny AMS (Americká matematická společnost). Velkou výhodou je, že předběžná autorova verze knihy je s dovolením AMS volně dostupná na internetu. K četbě knihy je třeba znát základy lineární algebry, mít povědomí o polynomech a znát trochu terminologie teorie grafů a geometrie. Jednotlivé kapitoly knihy mají různou obtížnost a jsou seřazeny od přístupnějších k obtížnějším.

Náročnější pak je vynikající kniha [1]. Také tuto knihu najdete volně přístupnou na internetu (na stránkách prvního z autorů).

2.1 Řešení homogenních lineárních rekurencí s konstantními koeficienty

Známá Fibonacciho čísla F_n jsou definována následovně:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ pro } n = 0, 1, 2, \dots$$

Vypočtěme hodnoty F_n pro malá n a uložme je do tabulky.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Existuje nějaká jednoduchá formule, která vyjádří F_n jako funkci čísla n? V této kapitole zjistíte nejen, jak taková formule vypadá, ale také se naučíte obecnou metodu, pomocí které lze formuli pro n-té Fibonacciho číslo najít.

Nechť k je kladné celé číslo. *Homogenní lineární rekurence k-tého řádu s konstantními koeficienty* je rovnice

$$y_{n+k} = a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \cdots + a_k y_n$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_k$ jsou daná reálná (případně komplexní) čísla a $(y_0, y_1, y_2, \dots)$ je neznámá posloupnost reálných (případně komplexních) čísel.

V této části se právě naučíte řešit homogenní lineární rekurence. Například vyřešení rekurence $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$ vede k formuli pro n-té Fibonacciho číslo.

Úkol. Prostudujte kapitolu 1, část 8, Řešení rekurentních formulí v knize [3]. Navíc, budete-li chtít, se můžete podívat také do knihy [5] na miniaturu 2 nazvanou Fibonacci Numbers, the Formula.

Poznámka. Existuje užitečná početní technika – generující (vytvořující) funkce, pomocí níž lze řešit mnohé problémy, například také homogenní lineární rekurence s konstantními koeficienty. O generujících funkcích si můžete přečíst v kapitole 10 v knize [6]. V části 10.3 Fibonacciho čísla a zlatý řez je ukázáno, jak se najde formule pro n-té Fibonacciho číslo použitím generujících funkcí.

2.2 Bloková schémata

Bloková schémata představují příklady pravidelných konfigurací.

Uvažme množinu $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a systém jejích podmnožin

$$\mathcal{B} = \{\{0, 1, 2\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 3, 4\}, \{0, 4, 5\}, \{0, 1, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$$

Množina V má šest prvků. Každá množina systému $\mathcal{B}$ má tři prvky a každá dvouprvková podmnožina množiny V je obsažena právě ve dvou množinách systému $\mathcal{B}$ (zkontrolujte to!). Uvidíme za chvíli (po vyslovení definice), že dvojice $(V, \mathcal{B})$ je příkladem blokového schématu typu $2 - (6, 3, 2)$.

Uspořádanou dvojici $(V, \mathcal{B})$ nazveme *množinový systém*, pokud V je konečná neprázdná množina a $\mathcal{B}$ je systém podmnožin množiny V.

Nechť v, k, t, λ jsou celá čísla, $v > k > t \geq 1$, $\lambda \geq 1$. *Blokové schéma* typu $t - (v, k, \lambda)$ je množinový systém $(V, \mathcal{B})$ splňující následující podmínky:

1. množina V má v prvků

2. každá množina $B \in \mathcal{B}$ má k prvků (prvky systému $\mathcal{B}$ se nazývají *bloky*)

3. každá t-prvková podmnožina množiny V je obsažena právě v λ blocích systému $\mathcal{B}$

Bloková schémata typu $2 - (v, 3, 1)$ se nazývají *Steinerovy systémy trojic.*

Příklady.

1. Nechť v, k, t jsou celá čísla, $v > k > t \geq 1$. Nechť množina V má v prvků a $\mathcal{B}$ je systém všech k-prvkových podmnožin množiny V. Pak $(V, \mathcal{B})$ je blokové schéma typu $t - (v, k, \lambda)$, kde $\lambda = \binom{v-t}{k-t}$.

2. Nechť k, l jsou celá čísla, $k > 1$, $l > 1$. Nechť $B_1, \ldots, B_l$ jsou vzájemně disjunktní k-prvkové množiny. Položme $V = B_1 \cup \cdots \cup B_l$, $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_l\}$. Pak $(V, \mathcal{B})$ je blokové schéma typu $1 - (kl, k, 1)$.

Nechť v, k, t, λ jsou celá čísla, $v > k > t \geq 1$, $\lambda \geq 1$. Zpravidla není jednoduché sestrojit blokové schéma typu $t - (v, k, \lambda)$. Někdy takové schéma vůbec neexistuje. Například blokové schéma typu $1 - (v, k, 1)$ existuje právě tehdy, když v je celočíselným násobkem čísla k (promyslete!). Dospěli jsme k **základnímu problému**:

pro dané hodnoty v, k, t, λ rozhodněte, zda existuje blokové schéma typu $t - (v, k, \lambda)$

V této části se naučíte odvodit některé nutné podmínky existence, a to pomocí prostředků lineární algebry (teorie matic).

Úkol. Prostudujte kapitolu 11.1 Bloková schémata v knize [6].

2.3 Fisherova nerovnost

V této části využitím elementární lineární algebry dokážete **Fisherovu nerovnost**:

Nechť $(V, \mathcal{B})$ je blokové schéma typu $2-(v,k,\lambda)$. Potom

$$|\mathcal{B}| \geq |V|$$

Úkol. Prostudujte kapitolu 11.2 Fisherova nerovnost v knize [6].

2.4 Počet koster grafu

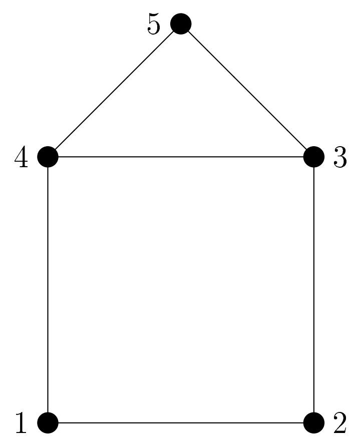
Nyní si uděláte výlet do teorie grafů. Pro jistotu si připomeneme základní pojmy.

Pod pojmem graf budeme rozumět obrázky takového typu, jako je obrázek číslo 1. Pojmenované kroužky budeme nazývat vrcholy (uzly) grafu a spojnice (na obrázku číslo 1 jsou to úsečky) budeme nazývat hrany grafu. Přitom ovšem nebude podstatné, kde jsou vrcholy umístěny ani jak hrany vypadají, ale pouze to, zda dané dva vrcholy hranou spojeny jsou či nejsou. Asi cítíte, že bude třeba pojem graf precizovat. To nyní uděláme.

Graf je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je konečná neprázdná množina a E je množina dvouprvkových podmnožin množiny V.

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Prvky množiny V se nazývají vrcholy (uzly) grafu G a prvky množiny E se nazývají hrany grafu G.

Obrázek 1



Jestliže G je graf, pak $V(G)$ značí množinu vrcholů grafu G a $E(G)$ značí množinu hran grafu G.

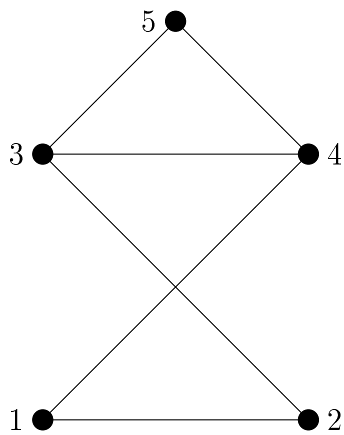
Jestliže graf na obrázku 1 označíme G, pak

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ E(G) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}\}$$

.

Uvědomme si, že graf G lze zakreslit i jinak, například tak, jako na obrázku číslo 2.

Obrázek 2



Nechť G je graf, $v \in V(G)$. Počet všech hran grafu G, které obsahují vrchol v, se nazývá stupeň vrcholu v v grafu G a značí se $deg_G(v)$, případně pouze $deg(v)$ pokud je z kontextu jasné, jaký graf máme na mysli. Používají se i jiná označení stupně vrcholu, například $st(v)$, $d(v)$.

Například v grafu na obrázku číslo 1 je $deg(1) = 2$, $deg(2) = 2$, $deg(3) = 3$, $deg(4) = 3$ a $deg(5) = 2$.

Teď budeme definovat několik základních pojmů teorie grafů, které vycházejí z představy putování grafem – putujeme mezi vrcholy, ovšem putovat smíme pouze po hranách.

Nechť $G = (V, E)$ je graf.

Nechť k je nezáporné celé číslo, $u, v \in V$. Posloupnost $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ se nazývá sled z vrcholu u do vrcholu v délky k v grafu G, pokud platí:

1. $x_0, x_1, \ldots, x_k \in V$
2. $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{k-1}, x_k\} \in E$
3. $u = x_0$, $v = x_k$

V případě $u = v$ se jedná o uzavřený sled, v případě $u \neq v$ se jedná o sled otevřený.

Sled, ve kterém se neopakují vrcholy, se nazývá cesta.

Uvažme graf na obrázku číslo 1. Posloupnost (3) je sled a také cesta z vrcholu 3 do vrcholu 3 délky 0. Posloupnost $(1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 4)$ je sled z vrcholu 1 do vrcholu 4 délky 8; tento sled však není cesta, protože se v něm opakují vrcholy. Posloupnost $(1, 2, 3, 4)$ je cesta z vrcholu 1 do vrcholu 4 délky 3.

Nechť k je celé číslo, $k \geq 3$. Posloupnost $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ se nazývá cyklus (kružnice) délky k v grafu G, pokud platí:

1. $x_0, x_1, \ldots, x_k \in V$
2. $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{k-1}, x_k\} \in E$
3. vrcholy $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ jsou vzájemně různé
4. $x_0 = x_k$

Cyklus délky k se také nazývá k-úhelník.

Uvažme opět graf na obrázku číslo 1. Posloupnost $(1, 2, 3, 5, 4, 1)$ je cyklus délky 5, posloupnost $(3, 5, 4, 3)$ je trojúhelník.

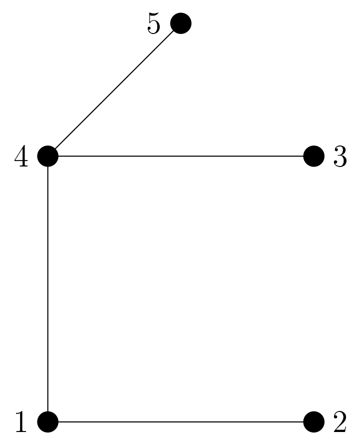
Graf, který neobsahuje žádný cyklus, se nazývá acyklický.

Představa cestování grafem vede k pojmu souvislosti. Graf je souvislý, pokud můžeme z každého vrcholu putovat do každého vrcholu. Nyní přesná definice:

Graf G se nazývá souvislý, pokud pro každé vrcholy $u, v \in V$ existuje v grafu G sled z vrcholu u do vrcholu v.

Strom je souvislý acyklický graf. Příklad stromu vidíte na obrázku číslo 3.

Obrázek 3

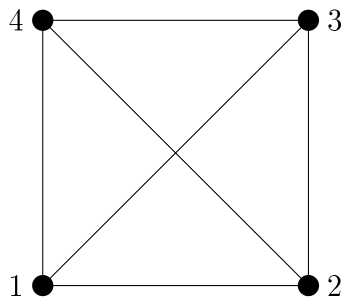


Kostra grafu $G = (V, E)$ je každý graf (V, F) takový, že $F \subseteq E$ a (V, F) je strom.

Počet koster grafu G označíme $\kappa(G)$.

Graf $G = (V, E)$ se nazývá *úplný*, pokud množina E obsahuje všechny dvouprvkové podmnožiny množiny V. Nechť n je kladné celé číslo. Úplný graf s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ značíme K_n. Na obrázku číslo 4 vidíte graf K_4.

Obrázek 4



Kolik koster má graf K_4? Zkuste je všechny nakreslit. Až to uděláte, tak se pro kontrolu podívejte na obrázek číslo 5 – na něm jsou právě všechny kostry grafu K_4.

Možná vás napadne otázka: Existuje nějaká formule udávající počet koster grafu K_n v závislosti na parametru n? No a odpověď zní: Ano, existuje. Dokonce je velmi pěkná. Je to **Cayleyho formule**:

$$\kappa(K_n) = n^{n-2}$$

Uvědomte si také, že počet koster grafu K_n je totéž, co počet všech stromů s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$.

V této části poznáte pěkný příklad kombinatorického významu determinantu matice. Odvodíte vztah pro počet koster libovolného grafu. Důsledkem pak bude Cayleyho formule (viz cvičení).

Nechť n je celé číslo, $n \geq 2$. Nechť G je graf, $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Definujme $n \times n$ matici Q (*Laplaceova matice* grafu G) následovně:

pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ máme

$$q_{ii} = deg(i)$$

a pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, máme

$$q_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{pokud } \{i, j\} \in E(G) \\ 0 & \text{pokud } \{i.j\} \notin E(G) \end{cases}$$

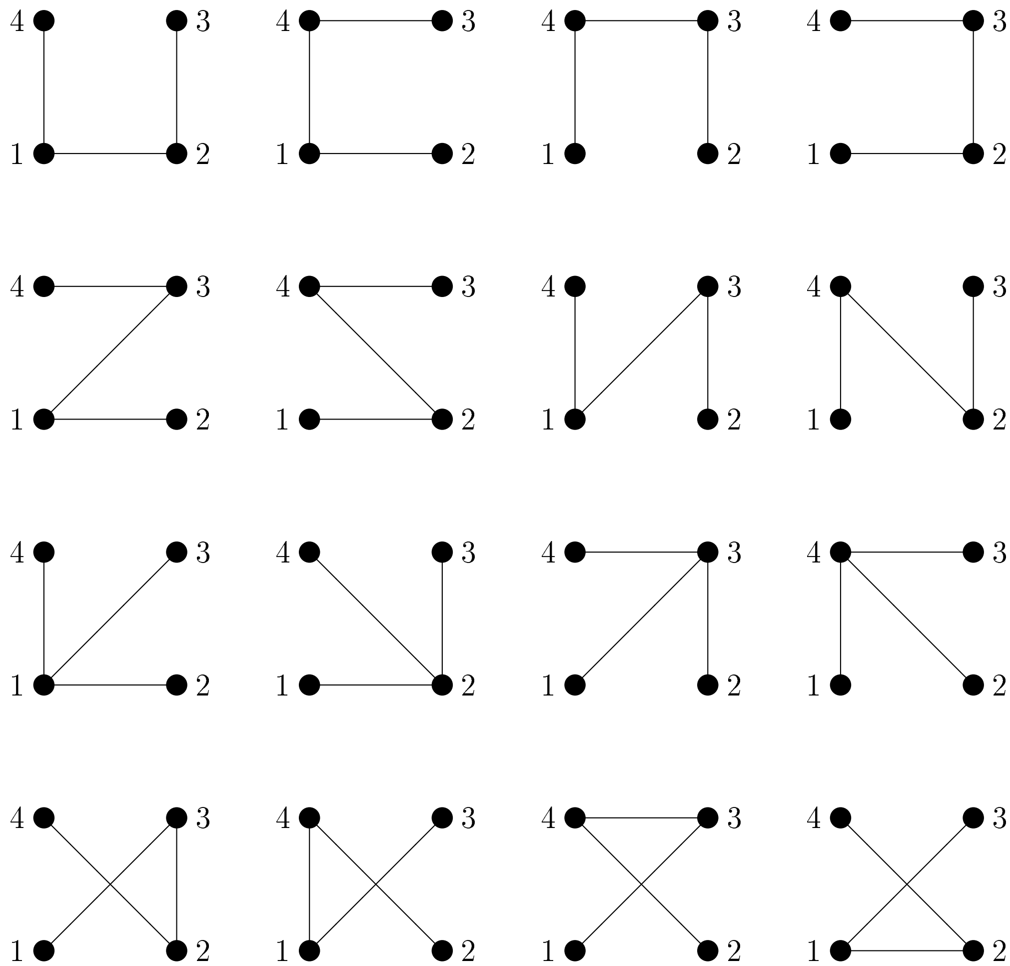
Pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme Q_{ij} matici, která vznikne z matice Q vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Platí pozoruhodný vztah:

$$\kappa(G) = |\det Q_{ij}|$$

a to pro libovolná $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Obrázek 5



Příklad. Pro graf G na obrázku 1 je

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pak

$$Q_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a

$$\kappa(G) = |\det Q_{11}| = 11$$

Takže graf na obrázku číslo 1 má 11 koster.

Cvičení.

1. Nakreslete všechny kostry grafu na obrázku číslo 1.

2. Odvoďte Cayleyho formuli pro počet koster úplného grafu K_n.

Úkol. Prostudujte kapitolu 7.5 Důkaz pracující s determinanty v knize [6]. Alternativně, jestliže máte rádi (matematickou) angličtinu, pak můžete prostudovat miniaturu 21 Counting Spanning Trees v knize [5].

Poznámka. Existuje celá řada důkazů Cayleyho formule pro počet koster úplného grafu K_n, jejichž základní myšlenky se od sebe podstatně odlišují. Pět z těchto důkazů najdete v knize [6] v kapitole 7 nazvané Počet koster (jeden z nich je "náš" důkaz pomocí determinantů).

3 Toky v síti

Toky v sítích patří k nejčastěji aplikovaným partiím teorie grafů. Pomocí toků lze modelovat řadu praktických situací, další aplikace jsou v jiných oblastech teorie grafů a kombinatoriky.

Jako základní literatura zde poslouží kniha [2].

3.1 Síť

Před vymezením pojmu síť (míním samozřejmě ty sítě, o kterých se zde budete učit) je třeba vymezit pojem orientovaný graf.

Orientovaný graf je trojice (V, E, ε), kde V je konečná neprázdná množina (její prvky se nazývají *vrcholy*), E je konečná množina (její prvky se nazývají *orientované hrany*, případně pouze *hrany*) a $\varepsilon : E \to V \times V$ (zobrazení ε se nazývá *vztah incidence*).

Nechť $G = (V, E, \varepsilon)$ je orientovaný graf. Pak $V(G)$ označuje množinu všech vrcholů orientovaného grafu G, tj. $V(G) = V$, a $E(G)$ označuje množinu všech hran orientovaného grafu G, tj. $E(G) = E$. Nechť $e \in E$, $\varepsilon(e) = (x, y)$. Vrchol x se nazývá *počáteční vrchol hrany* e a značí se $PV(e)$. Vrchol y se nazývá *koncový vrchol hrany* e a značí se $KV(e)$. Říkáme, že hrana e *vede z vrcholu* x *do vrcholu* y.

Nechť G je orientovaný graf, $x \in V(G)$, $A \subseteq V(G)$. Budeme používat následující označení:

$$\begin{aligned}
E^+_G(x) &= \{e \in E(G) |\ PV(e) = x\} \\
E^-_G(x) &= \{e \in E(G) |\ KV(e) = x\} \\
W^+_G(A) &= \{e \in E(G) |\ PV(e) \in A \wedge KV(e) \notin A\} \\
W^-_G(A) &= \{e \in E(G) |\ PV(e) \notin A \wedge KV(e) \in A\} \\
W_G(A) &= W^+_G(A) \cup W^-_G(A)
\end{aligned}$$

Množina $W_G(A)$ se nazývá *řez určený množinou vrcholů A*. Index G budeme vynechávat, pokud bude z kontextu zřejmé, jaký graf G máme na mysli, takže místo $E^+_G(x)$ napíšeme pouze $E^+(x)$, atd.

Nechť G je orientovaný graf, k je nezáporné celé číslo, $x, y \in V(G)$. *Neorientovaná cesta* délky k z vrcholu x do vrcholu y v grafu G je posloupnost $p = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ splňující

1. $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V(G)$, $v_i \neq v_j$ pro $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $i \neq j$; vrcholy $v_0, v_1, \ldots, v_k$ se nazývají *vrcholy cesty p*

2. $e_1, \ldots, e_k \in E(G)$; hrany $e_1, \ldots, e_k$ se nazývají *hrany cesty p*

3. $v_0 = x$, $v_k = y$; vrchol x se nazývá *počáteční vrchol* (*počátek*) cesty p, vrchol y se nazývá *koncový vrchol* (*konec*) cesty p

4. pro všechna celá čísla i, $1 \leq i \leq k$ platí:

   $PV(e_i) = v_{i-1}$ a $KV(e_i) = v_i$ (říkáme, že e_i je *hrana vpřed cesty p*)

   nebo

   $PV(e_i) = v_i$ a $KV(e_i) = v_{i-1}$ (říkáme, že e_i je *hrana vzad cesty p*)

Všimněme si, že hrany neorientované cesty jsou vzájemně různé – zopakování hrany by dalo zopakování vrcholu.

Přistoupíme teď k definici sítě.

Síť je pětice (G, z, s, l, c), kde G je orientovaný graf, $z \in V(G)$, $s \in V(G)$, $z \neq s$, $l : E(G) \to \mathbb{R}$, $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Vrchol z se nazývá *zdroj*, vrchol s se nazývá *spotřebič*. Jestliže $e \in E(G)$, pak číslo $c(e)$ je *kapacita hrany e* (případně *horní omezení toku v hraně e*), číslo $l(e)$ je *dolní omezení toku v hraně e*. Říkáme, že omezení toku jsou celočíselná, pokud pro všechna $e \in E(G)$ jsou čísla $l(e)$ a $c(e)$ celá.

Často se v definici sítě požaduje, aby $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$, a také, aby pro každou hranu e bylo $l(e) = 0$. Pokud je vyžadováno, aby funkce l byla nulová, pak samozřejmě je zbytečné ji explicitně vypisovat a síť bude pouze čtveřicí (G, z, s, c). Takovou síť nazýváme *transportní síť*.

3.2 Velikost toku

Nechť je dána síť $S = (G, z, s, l, c)$.

Tok v síti S (obšírněji: *tok od zdroje ke spotřebiči* v síti S) je zobrazení $f : E(G) \to \mathbb{R}$, které pro každý vrchol $v \in V(G)$, $v \neq z$, $v \neq s$, splňuje *Kirchhoffův zákon*

$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e)$$

Říkáme, že tok f je celočíselný, pokud pro všecna $e \in E(G)$ je číslo $f(e)$ celé.

Řekneme, že tok f v síti S je *přípustný*, pokud pro všechny hrany $e \in E(G)$ platí

$$l(e) \leq f(e) \leq c(e)$$

Nechť f je tok v síti S. *Velikost toku* f značíme $F(f)$ a definujeme ji takto:

$$F(f) = \sum_{e \in E^+(z)} f(e) - \sum_{e \in E^-(z)} f(e)$$

Jestliže tok f je celočíselný, pak $F(f)$ je celé číslo.

Upozorňuji na to, že velikost toku f se značívá i jinak, například $\|f\|$.

3.3 Kapacita řezu

Nechť $S = (G, z, s, l, c)$ je síť.

Nechť f je tok v síti S, $A \subseteq V(G)$. *Velikost toku přes řez* určený množinou vrcholů A značíme $F_A(f)$ a definujeme ji takto:

$$F_A(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e)$$

Jako cvičení dokažte, že $F(f) = F_{\{z\}}(f)$.

Říkáme, že řez $W(A)$ odděluje zdroj a spotřebič, pokud $z \in A$ a $s \notin A$-

3.3.1. Tvrzení. Nechť $S = (G, z, s, l, c)$ je síť a f je tok v síti S. Jestliže $A \subseteq V(G)$, $z \in A$, $s \notin A$, pak

$$F_A(f) = F(f)$$

Důkaz. Postupujme sporem. Předpokládejme, že existuje množina M splňující $M \subseteq V(G)$, $z \in M$, $s \notin M$, $F_M(f) \neq F(f)$. Ze všech takových množin M vezměme tu, která má nejméně prvků (taková množina existuje, protože množina $V(G)$ je konečná), a označme ji A. Je $A \subseteq V(G)$, $z \in A$, $s \notin A$, $F_A(f) \neq F(f)$. Jelikož $F_{\{z\}}(f) = F(f)$ (viz první cvičení), je $A \neq \{z\}$ a existuje tedy vrchol v takový, že $v \in A$, $v \neq z$. Položme $B = A - \{v\}$. Je $B \subseteq V(G)$, $z \in B$,

$s \notin B$. Množina B má méně prvků než množina A, takže $F_B(f) = F(f)$. Definujme množiny hran M_1, M_2, M_3, M_4 takto:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{e \in E(G) |\ PV(e) = v \wedge KV(e) \in B\} \\
M_2 &= \{e \in E(G) |\ PV(e) = v \wedge KV(e) \notin B \wedge KV(e) \neq v\} \\
M_3 &= \{e \in E(G) |\ PV(e) \in B \wedge KV(e) = v\} \\
M_4 &= \{e \in E(G) |\ PV(e) \notin B \wedge PV(e) \neq v \wedge KV(e) = v\} \\
M_5 &= \{e \in E(G) |\ PV(e) = v \wedge KV(e) = v\}
\end{aligned}$$

Povšimněte si, že pro všechna $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i \neq j$ je $M_i \cap M_j = \emptyset$. Dále $M_1 \cup M_2 \cup M_5 = E^+(v)$, $M_3 \cup M_4 \cup M_5 = E^-(v)$.

Platí:

$$W^+(A) = (W^+(B) - M_3) \cup M_2,\ M_3 \subseteq W^+(B),\ M_2 \cap W^+(B) = \emptyset$$

a

$$W^-(A) = (W^-(B) - M_1) \cup M_4,\ M_1 \subseteq W^-(B),\ M_4 \cap W^-(B) = \emptyset$$

Počítejme:

$$\begin{aligned}
F_A(f) &= \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) \\
&= \sum_{e \in W^+(B)} f(e) - \sum_{e \in M_3} f(e) + \sum_{e \in M_2} f(e) - \left(\sum_{e \in W^-(B)} f(e) - \sum_{e \in M_1} f(e) + \sum_{e \in M_4} f(e) \right) \\
&= \left(\sum_{e \in W^+(B)} f(e) - \sum_{e \in W^-(B)} f(e) \right) + \left(\sum_{e \in M_1} f(e) + \sum_{e \in M_2} f(e) + \sum_{e \in M_5} f(e) \right) \\
&\quad - \left(\sum_{e \in M_3} f(e) + \sum_{e \in M_4} f(e) + \sum_{e \in M_5} f(e) \right) \\
&= F_B(f) + \left(\sum_{e \in E^+(v)} f(e) - \sum_{e \in E^-(v)} f(e) \right)
\end{aligned}$$

Odvodili jsme, že

$$F_A(f) = F_B(f) + \left(\sum_{e \in E^+(v)} f(e) - \sum_{e \in E^-(v)} f(e) \right)$$

Je $v \neq z$ a také $v \neq s$ ($v = s$ by dalo $s \in A$, což není pravda), tudíž tok f splňuje Kirchhoffův zákon pro vrchol v:

$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) - \sum_{e \in E^-(v)} f(e) = 0$$

Dostáváme $F_A(f) = F_B(f)$, a proto $F_A(f) = F(f)$, spor. Tvrzení 3.3.1. je dokázáno.

Nechť $S = (G, z, s, l, c)$ je síť, $A \subseteq V(G)$. *Kapacitu řezu* $W(A)$ značíme $C(A)$ a definujeme ji takto:

$$C(A) = \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e)$$

Význam kapacity řezu je v tom, že žádný přípustný tok nemůže mít velikost větší, než je kapacita kteréhokoli řezu, který odděluje zdroj a spotřebič. Kapacita řezu tedy poskytuje dílčí informaci o velikosti přípustného toku.

3.3.2. Tvrzení. Nrchť $S = (G, z, s, l, c)$ je síť a f je přípustný tok v síti S. Jestliže $A \subseteq V(G)$, $z \in A$, $s \notin A$, pak

$$F(f) \leq C(A)$$

Důkaz. Buď $A \subseteq V(G)$, $z \in A$, $s \notin A$. Chceme: $F(f) \leq C(A)$. Dle Tvrzení 3.3.1. je $F(f) = F_A(f)$. Postačí tedy dokázat, že $F_A(f) \leq C(A)$. Chceme tedy, aby platilo

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) &\leq \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e) \\
\sum_{e \in W^+(A)} f(e) + \sum_{e \in W^-(A)} l(e) &\leq \sum_{e \in W^+(A)} c(e) + \sum_{e \in W^-(A)} f(e)
\end{aligned}$$

Tok f je přípustný, takže pro každou hranu $e \in E(G)$ je $f(e) \leq c(e)$ a také $l(e) \leq f(e)$; to dává

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in W^+(A)} f(e) &\leq \sum_{e \in W^+(A)} c(e) \\
\sum_{e \in W^-(A)} l(e) &\leq \sum_{e \in W^-(A)} f(e)
\end{aligned}$$

Sečtením obou nerovností dostaneme to, co chceme.

3.3.3. Tvrzení. Nechť $S = (G, z, s, l, c)$ je síť, f je přípustný tok v síti S, $A \subseteq V(G)$, $z \in A$, $s \notin A$. Jestliže $F(f) = C(A)$, pak f je maximální přípustný tok v síti S a $W(A)$ je minimální řez oddělující zdroj a spotřebič v síti S.

Důkaz. Předpokládejme, že $F(f) = C(A)$. Zvolme libovolný přípustný tok g v síti S a libovolný řez $W(B)$ oddělující zdroj a spotřebič v síti S (je $B \subseteq V(G)$, $z \in B$, $s \notin B$). Chceme: $F(g) \leq F(f)$ a $C(A) \leq C(B)$. Dle 3.3.2. je $F(g) \leq C(A)$ a tedy $F(g) \leq F(f)$, protože $C(A) = F(f)$. Dále, dle 3.3.2. je $F(f) \leq C(B)$ a tedy $C(A) \leq C(B)$, protože $F(f) = C(A)$.

Cvičení.

1. Nechť $S = (G, z, s, l, c)$ je síť a f je tok v síti S. Pak $F(f) = F_{\{z\}}(f)$. Dokažte.

3.4 Zlepšující cesta

Nechť $S = (G, z, s, l, c)$ je síť, f je přípustný tok v síti S.

Neorientovaná cesta p v grafu G se nazývá *nenasycená* vzhledem k toku f, pokud pro každou hranu e cesty p platí:

- jestliže e je hrana vpřed, pak $f(e) < c(e)$
- jestliže e je hrana vzad, pak $f(e) > l(e)$

Zlepšující cesta vzhledem k toku f je nenasycená neorientovaná cesta v grafu G, která vede z vrcholu z do vrcholu s.

Nechť p je zlepšující cesta vzhledem k toku f, e je hrana cesty p. Číslo $d(e)$ definujeme takto:

- jestliže e je hrana vpřed, pak $d(e) = c(e) - f(e)$
- jestliže e je hrana vzad, pak $d(e) = f(e) - l(e)$

Nakonec položíme

$$d = \min\{d(e) |\ e \text{ je hrana cesty } p\}$$

Číslo d se nazývá *kapacita zlepšující cesty* p.

3.4.1. Poznámka. Jestliže p je zlepšující cesta, pak pro každou hranu e cesty p je $d(e) > 0$ a tedy kapacita zlepšující cesty je kladné reálné číslo. Navíc, pokud tok f je celočíselný a omezení toku jsou také celočíselná, je $d(e)$ kladné celé číslo pro každou hranu e cesty p a tedy kapacita zlepšující cesty je také kladné celé číslo.

Nyní popíšeme změnu toku podél zlepšující cesty.

3.4.2. Tvrzení. (**změna toku podél zlepšující cesty**) Nechť $S = (G, z, s, l, c)$ je síť, f je přípustný tok v síti S, $p = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ je zlepšující cesta vzhledem k toku f. Nechť d je kapacita zlepšující cesty p. Definujme zobrazení $g : E(G) \to \mathbb{R}$ takto:

- $g(e) = f(e)$ pokud e není hrana cesty p

- $g(e) = f(e) + d$ pokud e je hrana vpřed cesty p
- $g(e) = f(e) - d$ pokud e je hrana vzad cesty p

Pak g je přípustný tok v síti S a $F(g) = F(f) + d$.
Jestliže síť S má celočíselná omezení toku a tok f je celočíselný, je také tok g celočíselný.

Důkaz. Ukážeme nejprve, že g je tok v síti S. Buď $v \in V(G)$, $v \neq z$, $v \neq s$. Je třeba ukázat, že g splňuje Kirchhoffův zákon pro vrchol v. Rozlišíme dva případy:

- v není vrchol cesty p: Buď $e \in E^+(v) \cup E^-(v)$. Pak e není hrana cesty p (kdyby e byla hrana cesty p, byly by vrcholy $PV(e)$ a $KV(e)$ vrcholy cesty p, takže vrchol v by byl vrchol cesty p, což by byl spor) a proto $g(e) = f(e)$. Pak

$$\sum_{e \in E^+(v)} g(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e \in E^-(v)} g(e)$$

- v je vrchol cesty p: Je $v = v_i$ pro nějaké celé číslo i, $1 \leq i < k$. Jsou 4 možnosti:

1. e_i je hrana vpřed cesty p, e_{i+1} je hrana vpřed cesty p: Je $e_i \in E^-(v)$, $e_{i+1} \in E^+(v)$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E^+(v)} g(e) &= g(e_{i+1}) + \sum_{e \in E^+(v) - \{e_{i+1}\}} g(e) \\
&= d + f(e_{i+1}) + \sum_{e \in E^+(v) - \{e_{i+1}\}} f(e) \\
&= d + \sum_{e \in E^+(v)} f(e) \\
&= d + \sum_{e \in E^-(v)} f(e) \\
&= d + f(e_i) + \sum_{e \in E^-(v) - \{e_i\}} f(e) \\
&= g(e_i) + \sum_{e \in E^-(v) - \{e_i\}} g(e) \\
&= \sum_{e \in E^-(v)} g(e)
\end{aligned}$$

2. e_i je hrana vpřed cesty p, e_{i+1} je hrana vzad cesty p: Je $e_i \in E^-(v)$, $e_{i+1} \in E^-(v)$.

Počítejme:

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E^+(v)} g(e) &= \sum_{e \in E^+(v)} f(e) \\
&= \sum_{e \in E^-(v)} f(e) \\
&= f(e_i) + f(e_{i+1}) + \sum_{e \in E^-(v) - \{e_i, e_{i+1}\}} f(e) \\
&= g(e_i) - d + g(e_{i+1}) + d + \sum_{e \in E^-(v) - \{e_i, e_{i+1}\}} g(e) \\
&= \sum_{e \in E^-(v)} g(e)
\end{aligned}$$

3. e_i je hrana vzad cesty p, e_{i+1} je hrana vpřed cesty p: Je $e_i \in E^+(v)$, $e_{i+1} \in E^+(v)$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E^+(v)} g(e) &= g(e_i) + g(e_{i+1}) + \sum_{e \in E^+(v) - \{e_i, e_{i+1}\}} g(e) \\
&= f(e_i) - d + f(e_{i+1}) + d + \sum_{e \in E^+(v) - \{e_i, e_{i+1}\}} f(e) \\
&= \sum_{e \in E^+(v)} f(e) \\
&= \sum_{e \in E^-(v)} f(e) \\
&= \sum_{e \in E^-(v)} g(e)
\end{aligned}$$

4. e_i je hrana vzad cesty p, e_{i+1} je hrana vzad cesty p: Je $e_i \in E^+(v)$, $e_{i+1} \in E^-(v)$.

Počítejme:

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in E^+(v)} g(e) &= g(e_i) + \sum_{e\in E^+(v)-\{e_i\}} g(e) \\
&= -d + f(e_i) + \sum_{e\in E^+(v)-\{e_i\}} f(e) \\
&= -d + \sum_{e\in E^+(v)} f(e) \\
&= -d + \sum_{e\in E^-(v)} f(e) \\
&= -d + f(e_{i+1}) + \sum_{e\in E^-(v)-\{e_{i+1}\}} f(e) \\
&= g(e_{i+1}) + \sum_{e\in E^-(v)-\{e_{i+1}\}} g(e) \\
&= \sum_{e\in E^-(v)} g(e)
\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že g je tok v síti S.

Ukážeme teď, že tok g je přípustný. Zvolme libovolně hranu $e \in E(G)$. Je $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$ (protože tok f je přípustný). Je třeba dokázat, že $l(e) \leq g(e) \leq c(e)$. Rozlišíme 3 případy:

1. e není hrana cesty p: Je $g(e) = f(e)$, takže zřejmě $l(e) \leq g(e) \leq c(e)$.
2. e je hrana vpřed cesty p: Je $g(e) = f(e) + d$. Protože $d > 0$, je $f(e) < g(e)$ a tedy $l(e) < g(e)$. Je $d \leq c(e) - f(e)$. Pak $f(e) + d \leq c(e)$, $g(e) \leq c(e)$.
3. e je hrana vzad cesty p: Je $g(e) = f(e) - d$. Protože $d > 0$, je $g(e) < f(e)$ a tedy $g(e) < c(e)$. Je $d \leq f(e) - l(e)$. Pak $-f(e) + l(e) \leq -d$, $l(e) \leq f(e) - d$, $l(e) \leq g(e)$.

Ukázali jsme, že tok g je přípustný.

Dokážeme nyní, že $F(g) = F(f) + d$. Jsou 2 možnosti:

- e_1 je hrana vpřed cesty p: Je $e_1 \in E^+(z)$. Počítejme:

$$\begin{aligned} F(g) &= \sum_{e \in E^+(z)} g(e) - \sum_{e \in E^-(z)} g(e) \\ &= g(e_1) + \sum_{e \in E^+(z) - \{e_1\}} g(e) - \sum_{e \in E^-(z)} g(e) \\ &= d + f(e_1) + \sum_{e \in E^+(z) - \{e_1\}} f(e) - \sum_{e \in E^-(z)} f(e) \\ &= d + \sum_{e \in E^+(z)} f(e) - \sum_{e \in E^-(z)} f(e) \\ &= d + F(f) \end{aligned}$$

- e_1 je hrana vzad cesty p: Je $e_1 \in E^-(z)$. Počítejme:

$$\begin{aligned} F(g) &= \sum_{e \in E^+(z)} g(e) - \sum_{e \in E^-(z)} g(e) \\ &= \sum_{e \in E^+(z)} g(e) - g(e_1) - \sum_{e \in E^-(z) - \{e_1\}} g(e) \\ &= \sum_{e \in E^+(z)} f(e) - f(e_1) + d - \sum_{e \in E^-(z) - \{e_1\}} f(e) \\ &= d + \sum_{e \in E^+(z)} f(e) - \sum_{e \in E^-(z)} f(e) \\ &= d + F(f) \end{aligned}$$

Předpokládejme, že síť S má celočíselná omezení toku a že tok f je celočíselný. Pak kapacita d zlepšující cesty p je celočíselná – viz poznámku 3.4.1. Potom pro každou hranu $e \in E(G)$ jsou $f(e)$, $f(e) + d$, $f(e) - d$ celá čísla a z toho již zřejmě plyne, že tok g je celočíselný.

3.5 Fordův – Fulkersonův algoritmus pro maximální tok

3.5.1. Algoritmus. (Fordův – Fulkersonův algoritmus pro maximální tok)
VSTUP: Síť S s celočíselnými omezeními toku, celočíselný přípustný tok f_0 v síti S.
VÝSTUP: Maximální přípustný tok $f_{\max}$ v síti S.
POMOCNÉ PROMĚNNÉ: Tok f v síti S, neorientovaná cesta p v síti S ze zdroje do spotřebiče.
VÝPOČET:

1. (*inicializace*) $f \leftarrow f_0$.

2. (*hledání zlepšující cesty*) Jestliže v síti S existuje zlepšující cesta vzhledem k toku f, pak jednu z nich ulož do p a pokračuj krokem 3. Jestliže v síti S neexistuje žádná zlepšující cesta vzhledem k toku f, pak pokračuj krokem 4.

3. (*změna toku*) Tok f změň podél zlepšující cesty p, tj. dle 3.4.2. vytvoř tok g, $f \leftarrow g$ a pokračuj krokem 2.

4. (*konec výpočtu*) $f_{\max} \leftarrow f$ a výpočet končí.

3.5.2. Věta. Výpočet Fordova – Fulkersonova algoritmu skončí po konečně mnoha krocích a po ukončení výpočtu bude $f_{\max}$ maximální tok v síti S.

Důkaz. Nechť $S = (G, z, s, l, c)$.

- Během výpočtu je f neustále přípustný celočíselný tok v síti S: Jistě to platí po inicializaci, jelikož po inicializaci je $f = f_0$. Platí to také po každé změně toku f v kroku 3 – viz Tvrzení 3.4.2.

- V kroku 3 máme $f \leftarrow g$. Dle 3.4.2. je $F(g) = F(f) + d$. Dle 3.4.1. je d (kapacita zlepšující cesty p) kladné celé číslo. Tudíž $F(g) \geq F(f) + 1$. Zvolme libovolně $A \subseteq V(G)$, $z \in A$, $s \notin A$ (to lze, protože $z \neq s$). Během výpočtu bude neustále $F(f) \leq C(A)$ (viz 3.3.2.). Z toho plyne, že změna toku f v kroku 3 může proběhnout pouze konečně mnohokrát. Po posledním provedení kroku 3 (případně již po inicializaci) nastane v kroku 2 situace, kdy v síti S neexistuje žádná zlepšující cesta vzhledem k toku f, ve výpočtu se bude pokračovat krokem 4, což bude znamenat konec výpočtu.

- $f_{\max}$ je maximální tok v síti S: Krokem 4 jsme pokračovali poté, co v kroku 2 již neexistovala žádná zlepšujíci cesta vzhledem k toku f, tedy vzhledem k toku $f_{\max}$ (v kroku 4 proběhlo $f_{\max} \leftarrow f$). Definujme množinu $A \subseteq V(G)$ takto: pro $v \in V(G)$ je

  $v \in A$ právě tehdy, když v S existuje nenasycená cesta vzhledem k toku $f_{\max}$ z vrcholu z do vrcholu v

  Je $z \in A$, neboť (z) je nenasycená cesta vzhledem k toku $f_{\max}$. Dále, $s \notin A$, protože v S neexistuje žádná zlepšující cesta vzhledem k toku $f_{\max}$, tj. žádná nenasycená cesta vzhledem k toku $f_{\max}$ z vrcholu z do vrcholu s. Ukážeme, že $F_A(f_{\max}) = C(A)$. Připomeňme, že

  $$F_A(f_{\max}) = \sum_{e \in W^+(A)} f_{\max}(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f_{\max}(e), \; C(A) = \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e)$$

  Postačí tedy ukázat, že pro každé $e \in W^+(A)$ je $f_{\max}(e) = c(e)$ a pro každé $e \in W^-(A)$ je $f_{\max}(e) = l(e)$.

Nechť $e \in W^+(A)$. Tok $f_{\max}$ je přípustný, protože během výpočtu je f neustále přípustný tok. Z toho plyne, že $f_{\max}(e) \leq c(e)$. Předpokládejme, že $f_{\max}(e) \neq c(e)$. Pak $f_{\max}(e) < c(e)$. Nechť $PV(e) = x$, $KV(e) = y$. Je $x \in A$, $y \notin A$. Protože $x \in A$, existuje v síti S nenasycená cesta $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ vzhledem k toku $f_{\max}$ z vrcholu z do vrcholu x. Pak $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, y)$ je nenasycená cesta vzhledem k toku $f_{\max}$ z vrcholu z do vrcholu y. Z toho plyne, že $y \in A$. To je spor. Nutně tedy $f_{\max}(e) = c(e)$.

Nechť $e \in W^-(A)$. Tok $f_{\max}$ je přípustný. Proto $l(e) \leq f_{\max}(e)$. Předpokládejme, že $f_{\max}(e) \neq l(e)$. Pak $l(e) < f_{\max}(e)$. Nechť $PV(e) = y$, $KV(e) = x$. Je $x \in A$, $y \notin A$. Protože $x \in A$, existuje v síti S nenasycená cesta $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ vzhledem k toku $f_{\max}$ z vrcholu z do vrcholu x. Pak $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, y)$ je nenasycená cesta vzhledem k toku $f_{\max}$ z vrcholu z do vrcholu y. Z toho plyne, že $y \in A$. To je spor. Nutně tedy $f_{\max}(e) = l(e)$.

Nyní víme, že $F_A(f_{\max}) = C(A)$. Dle 3.3.1. je $F_A(f_{\max}) = F(f_{\max})$. Tudíž $F(f_{\max}) = C(A)$. Dle 3.3.3. je $f_{\max}$ maximální přípustný tok v síti S.

3.5.3. Poznámka. Pro efektivní provádění kroku 2 ve Fordově – Fulkersonově algoritmu musíme mít k dispozici nějakou efektivní proceduru (algoritmus), která pro danou síť S a daný přípustný tok f najde zlepšující cestu vzhledem k toku f nebo oznámí, že v S neexistuje žádná zlepšující cesta vzhledem k toku f. Takových procedur je víc. Za chvíli dostanete za úkol seznámit se s jednou z nich.

Úkol. Seznamte se s odstavcem 8.3.5 Hledání zlepšující cesty – značkovací procedura v knize [2] (na straně 143); ve zmíněné knize si můžete přečíst také odstavec 8.3.13 na straně 146 – najdete tam další informace o hledání zlepšujících cest a také o rychlosti výpočtu.

3.6 Věta o maximálním toku a minimálním řezu

Nechť $S = (G, z, s, l, c)$ je síť. Protože $z \neq s$, existuje v síti S aspoň jeden řez oddělující zdroj a spotřebič. Takových řezů je však pouze konečně mnoho, protože množina $V(G)$ je konečná a existuje tedy pouze konečně mnoho řezů $W(A)$ splňujících $A \subseteq V(G)$, $z \in A$, $s \notin A$. V každé síti tedy existuje minimální řez oddělující zdroj a spotřebič.

3.6.1. Věta. (**věta o maximálním toku a minimálním řezu**) Nechť S je síť. Nechť f je maximální přípustný tok od zdroje ke spotřebiči v síti S a $W(A)$ je minimální řez oddělující zdroj a spotřebič v síti S. Pak

$$F(f) = C(A)$$

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že v S neexistuje žádná zlepšující cesta vzhledem k toku f – kdyby taková cesta existovala, nebyl by tok f maximální (viz 3.4.2.). Definujme množinu $B \subseteq V(G)$ takto: pro $v \in V(G)$ je

$v \in B$ právě tehdy, když v S existuje nenasycená cesta vzhledem k toku f z vrcholu z do vrcholu v

Je $z \in B$, neboť (z) je nenasycená cesta vzhledem k toku f. Dále, $s \notin B$, protože v S neexistuje žádná zlepšující cesta vzhledem k toku f, tj. žádná nenasycená cesta vzhledem k toku f z vrcholu z do vrcholu s. Lze dokázat, že $F_B(f) = C(B)$. Zkuste to dokázat jako cvičení – nápovědu (pokud ji budete potřebovat) najdete v důkazu věty 3.5.2. Dle 3.3.1. je $F_B(f) = F(f)$, takže $F(f) = C(B)$. Z tvrzení 3.3.3. plyne, že $W(B)$ je minimální řez oddělující zdroj a spotřebič v síti S. Pak $C(A) = C(B)$ a tudíž $C(A) = F(f)$.

Cvičení.

1. Nechť $S = (G, z, s, l, c)$ je síť. Nechť f je maximální přípustný tok v síti S. Uvědomte si, že v S neexistuje žádná zlepšující cesta vzhledem k toku f – kdyby taková cesta existovala, nebyl by tok f maximální (viz 3.4.2.). Definujme množinu $B \subseteq V(G)$ takto: pro $v \in V(G)$ je

   $v \in B$ právě tehdy, když v S existuje nenasycená cesta vzhledem k toku f z vrcholu z do vrcholu v

   Je $z \in B$, neboť (z) je nenasycená cesta vzhledem k toku f. Dále, $s \notin B$, protože v S neexistuje žádná zlepšující cesta vzhledem k toku f, tj. žádná nenasycená cesta vzhledem k toku f z vrcholu z do vrcholu s. Dokažte, že $F_B(f) = C(B)$. Nápovědu (pokud ji budete potřebovat) najdete v důkazu věty 3.5.2.

3.7 Aplikace toků v sítích

Jak jsme již zmínili, mají toky v sítích řadu aplikací. V této části se s některými aplikacemi seznámíte.

Úkol. Prostudujte v knize [2] kapitolu 8.2 Aplikace toků v sítích. Přečtěte si také v [4] část 7.4 Další aplikace algoritmu pro hledání největšího toku. Upozorňuji, že v [4] je někdy použito jiné značení, než jaké používáme my (tj. jiné, než v [2]) – například velikost toku f se tam označuje $\|f\|$.

Reference

[1] Babai, L., Frankl, P.: *Linear Algebra Methods in Combinatorics.* Version 2.1*, March 2020. `http://people.cs.uchicago.edu/~laci/CLASS/HANDOUTS-COMB/BaFrNew.pdf`

[2] Demel, J.: *Grafy a jejich aplikace.* Vydání třetí, elektronické (vlastním nákladem druhé), 2019. `https://kix.fsv.cvut.cz/~demel/grafy/gr.pdf`

[3] Fuchs, E.: *Diskrétní matematika pro učitele*. Masarykova univerzita, Brno, 2011.

[4] Kovář, P.: *Úvod do Teorie grafů*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2016.
http://homel.vsb.cz/~kov16/files/uvod_do_teorie_grafu.pdf

[5] Matoušek, J.: *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*. American Mathematical Society, 2012. Autorova předběžná verze knihy je s dovolením AMS k dispozici na
https://kam.mff.cuni.cz/~matousek/stml-53-matousek-1.pdf

[6] Matoušek, J., Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Nakladatelství Karolinum, Praha, 2002.