# Seminář řešení matematických více méně středoškolských úloh

***Zadání úloh***

## 6. 5. 2026

**Zadání:** Nechť $*$ je asociativní operace na množině $M$. Nechť prvek $e \in M$ splňuje

- $e * a = a$ pro všechna $a \in M$
- pro všechna $a \in M$ existuje prvek $b \in M$ takový, že $b * a = e$.

Dokažte, že

- $a * e = a$ pro všechna $a \in M$
- pro všechna $a \in M$ existuje prvek $b \in M$ takový, že $b * a = e = a * b$.

**Zadání:** Nechť $n$ je kladné celé číslo. Uvažme 3-rozměrný prostor $\mathbb{R}^3$. Pro body $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $X = [x_1, x_2, x_3]$, $Y = [y_1, y_2, y_3]$, je jejich vzdálenost $d(X, Y)$ definována takto:

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Nechť $M$ je množina bodů prostoru $\mathbb{R}^3$. Řekneme, že $M$ je *množina dvou vzdáleností*, pokud $M$ má následující vlastnost: Existují dvě reálná čísla $a, b$ taková, že pro každé dva body $X, Y$ z množiny $M$ je $d(X, Y) = a$ nebo $d(X, Y) = b$.

Dokažte, že každá množina dvou vzdáleností v $\mathbb{R}^3$ má nejvýše 14 prvků.

**Zadání:** Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 133 \\ y^2 - x &= 133. \end{aligned}$$

**Zadání:** Najděte všechny dvojice kladných celých čísel $a, b$ takové, že pokud napíšeme zápis čísla $a + b$ v desítkové soustavě v opačném pořadí číslic, dostaneme zápis čísla $a \cdot b$ v desítkové soustavě (například, pokud $a + b = 2026$, musí být $ab = 6202$).