Soubor řešených úloh

Vyšetřování průběhu funkce

Pavlína Matysová

5. listopadu 2018

Soubor řešených úloh

Tento text obsahuje 7 úloh na téma vyšetřování průběhu funkce. Každé úloha je řešena dvěma způsoby a všechny úlohy jsou plně rozřešeny.

Soubor obsahuje dva přístupy. První způsob je tzv. vybírací, kdy má student za úkol vybrat výsledný graf funkce z nabídky grafů funkcí, která je uvedena v zadání. Úkolem studenta je po každém výpočtu tyto grafy projít, a kdyby nějaký z nich s danou informací nesouhlasil, tak ho vyřadit. Tímto způsobem se studenti seznámí s grafem funkce z opačné strany, nebudou ho vytvářet, ale naučí se v něm číst a pochopí souvislosti mezi výpočtem a jeho grafickým znázorněním. Druhý způsob je tvořivý. Jde o způsob vytváření grafu postupně ze získaných informací, každá informace, která lze, se vyznačí do grafu.

Oba dva přístupy budu v tomto souboru ilustrovat na sedmi úlohách, které jsou převzaty z následujících zdrojů: (Demidovič, 2003), (Kaňka a Henzler, 1995), (Zemánek a Hasil, 2012).

Pro lepší pochopení textu, je zde uveden i seznam použitých vět a definic, a také kroky pro řešení průběhu funkce.

Poznámka: Vyjadřování a obraty nejsou vždy korektní a matematicky přesné, protože jsem chtěla text přizpůsobit jazyku studentů.

Definice a věty

Náísledující definice a věty byly převzaty z těchto zdrojů: (Hrubý a Kubát, 2008), (Moc et al., 2013), (Burda, 2008), (Pyrih, 1999).

1. Omezenost

   Definice 1 (Funkce omezená). Říkáme, že funkce f je omezená (nebo shora omezená nebo zdola omezená), jestliže existuje číslo k tak, že $|f(x)| \leq k$ (nebo $f(x) \leq k$ nebo $f(x) \geq k$) pro všechna $x \in D_f$.

2. Sudost, lichost

   Definice 2 (Funkce sudá). Říkáme, že funkce f je sudá právě když platí: Pro všechna x z definičního oboru leží v definičním oboru i $-x$ a zároveň $f(-x) = f(x)$.

   Definice 3 (Funkce lichá). Říkáme, že funkce f je lichá právě když platí: Pro všechna x z definičního oboru leží v definičním oboru i $-x$ a zároveň $f(-x) = -f(x)$.

3. Monotonie a konvexnost/konkávnost

   Definice 4 (Funkce klesající). Řekneme, že funkce f je klesající na intervalu I, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí, že je-li $x_1 < x_2$, potom je $f(x_1) > f(x_2)$.

   Definice 5 (Funkce rostoucí). Řekneme, že funkce f je rostoucí na intervalu I, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí, že je-li $x_1 < x_2$, potom je $f(x_1) < f(x_2)$.

   Definice 6 (Funkce konvexní). Řekneme, že funkce $f(x)$ je konvexní na intervalu I, jestliže pro všechny body $x_1, x_2, x_3 \in I$, které vyhovují nerovnostem $x_1 < x_2 < x_3$, jsou splněny nerovnosti

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

   Pokud v tomto vzorci zaměníme neostré nerovnosti za ostré, dostaneme definici ryze konvexní funkce.

   Definice 7 (Funkce konkávní). Řekneme, že funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu I, jestliže pro všechny body $x_1, x_2, x_3 \in I$, které vyhovují nerovnostem $x_1 < x_2 < x_3$, jsou splněny nerovnosti

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

   Pokud v tomto vzorci zaměníme neostré nerovnosti za ostré, dostaneme definici ryze konkávní funkce.

   Definice 8 (Derivace funkce). Mějme dánu funkci $f(x)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

   potom její hodnotu nazýváme derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 a značíme ji symbolem $f'(x_0)$. Podobně existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, resp. \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

   potom její hodnotu nazýváme derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 zprava, resp. zleva a značíme je symboly $f'_-(x)$, resp. $f'_+(x)$.

Věta 9 (Pravidla pro počítání s derivacemi). *Jestliže funkce f, g mají v bodě x_0 derivaci a $c \in \mathbb{R}$, má v bodě x_0 derivaci i součet, rozdíl, součin a pro $g(x) \neq 0$ i podíl funkcí f, g a platí:*

$$
\begin{aligned}
(f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0), \\
(fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \\
(cf(x_0))' &= cf'(x_0).
\end{aligned}
$$

Věta 10 (Derivace složené funkce). *Jestliže funkce $f = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a jestliže funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má složená funkce $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ derivaci v bodě x_0 a platí:*

$$(f(g(x)))'(x) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Věta 11 (Monotonie). *Nechť má funkce f na intervalu I derivaci.*

(a) Funkce f je na I rostoucí, je-li $f' > 0$.
(b) Funkce f je na I klesající, je-li $f' < 0$.

Věta 12 (Konvexita, konkávita). *Nechť má funkce f na intervalu I druhou derivaci.*

(a) Funkce f je na intervalu I ryze konvexní/resp. konvexní právě když, je $f'' > 0$/ resp. $f'' \geq 0$.
(b) Funkce f je na intervalu I ryze konkávní/resp. konkávní, právě když je $f'' < 0$/ resp. $f'' \leq 0$.

4. Extrémy

Definice 13 (Lokální minimum). Řekneme, že funkce f má lokální minimum v bodě x_0, jestliže existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je splněna nerovnost

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Nahradíme-li v nerovnosti neostrou nerovnost za ostrou, dostaneme definici ostrého lokálního minima.

Definice 14 (Lokální maximum). Řekneme, že funkce f má lokální maximum v bodě x_0, jestliže existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je splněna nerovnost

$$f(x_0) \geq f(x).$$

Nahradíme-li v nerovnosti neostrou nerovnost za ostrou, dostaneme definici ostrého lokálního maxima.

Věta 15 (Stacionární bod). *Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak platí: $f'(x_0) = 0$. Bod x_0 budeme nazývat stacionární bod.*

Věta 16 (Postačující podmínka). *Nechť funkce f má ve vnitřním bodě x_0 svého definičního oboru druhou derivaci $f''(x_0)$.*

(a) Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

(b) Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

5. Inflexní body

Definice 17 (Inflexní bod). Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 inflexní bod, jestliže se v tomto bodě mění funkce z konvexní na konkávní (nebo z konkávní na konvexní).

Věta 18 (Inflexní bod). *Předpokládejme, že je $f''(x_0) = 0$ a současně $f'''(x_0) \neq 0$. Potom má funkce $f(x)$ v bodě x_0 inflexní bod.*

6. Asymptoty

Definice 19 (Asymptota). Přímka $y = ax+b$ se nazývá asymptotou funkce f v nevlastním bodě c, jestliže

$$\lim_{x\to c} (f(x) - (ax+b)) = 0.$$

Věta 20 (Asymptota). *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f v nevlastním bodě c právě když platí:*

$$a = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to c} (f(x) - ax)$$

Je-li $a = 0$, mluvíme o tzv. vodorovné asymptotě funkce f.

7. L'Hospitalovo pravidlo

Věta 21 (L'Hospitalovo pravidlo). *Nechť je*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, resp. \lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty.$$

Nechť dále existuje limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom existuje i limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Znění věty zůstává v platnosti i pro limity v nevlastních bodech a také pro jednostranné limity.

Poznámka: Ve výpočtech se použití L'Hospitalova pravidla bude označovat symbolem l'H.

Kroky pro řešení průběhu funkce

1. Určete definiční obor funkce $f(x)$.
2. Spočítejte průsečíky se souřadnicovými osami x a y.
3. Určete, jestli je funkce $f(x)$ sudá nebo lichá.

   Pokud funkce bude sudá, tak její graf bude souměrný podle osy y. Když bude lichá, graf funkce bude souměrný podle počátku soustavy souřadné.
4. Spočítejte limity v krajních bodech definičního oboru.
5. Spočítejte první derivaci funkce $f(x)$.

   Výpočtem rovnice $f'(x) = 0$ získáme stacionární body.

   Pomocí nulových bodů první derivace určíme intervaly monotonie (v jakých intervalech je funkce $f(x)$ klesající či rostoucí).
6. Spočítejte druhou a třetí derivaci funkce $f(x)$.

   Pomocí nulových bodů druhé derivace určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti. V bodě, kde se bude funkce $f(x)$ měnit z konkávní na konvexní (či opačně) bude inflexní bod.

   Pomocí druhé derivace zjistíme, jestli je ve stacionárním bodě lokální minimum či maximum.
7. Určete asymptoty funkce $f(x)$.

   Asymptotou je rovnice $y = ax + b$, jejíž koeficienty lze určit následovně:

   $$\begin{aligned} a &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax). \end{aligned}$$
8. Zakreslete graf funkce $f(x)$ do soustavy souřadné.

Poznámka: Ve většině případů stačí při řešení průběhu funkce $f(x)$ méně kroků pro určení grafu funkce $f(x)$ a jeho zakreslení do soustavy souřadné.

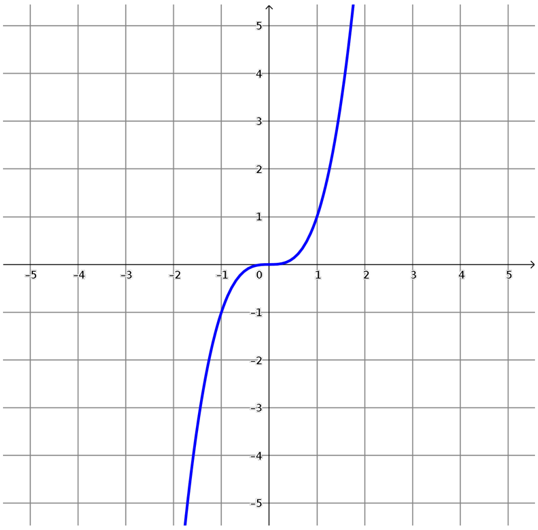
1 Úloha 1

1.1 Přístup vybírací

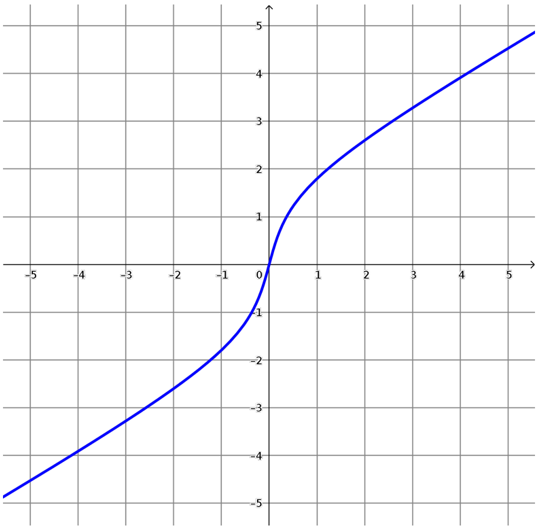
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^3 + 3x.$$

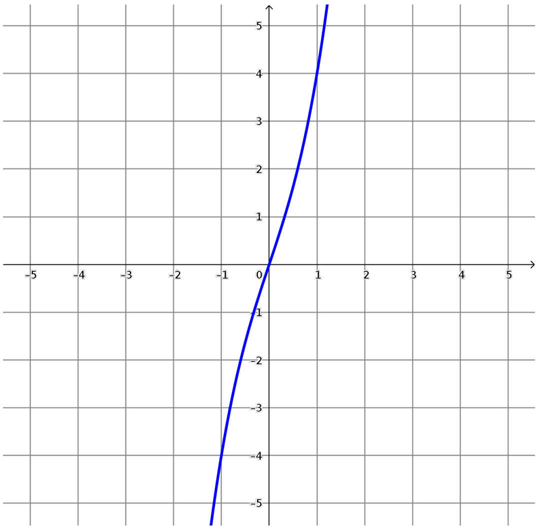
Na obrázcích jsou grafy 1–6, které jsou kandidáty na graf vyšetřované funkce. Postupnými výpočty zjistíme, že dané grafy nemusí odpovídat zjištěným vlastnostem, a proto je vyřadíme. Takto budeme pokračovat dokud nám nezbude graf výsledný.



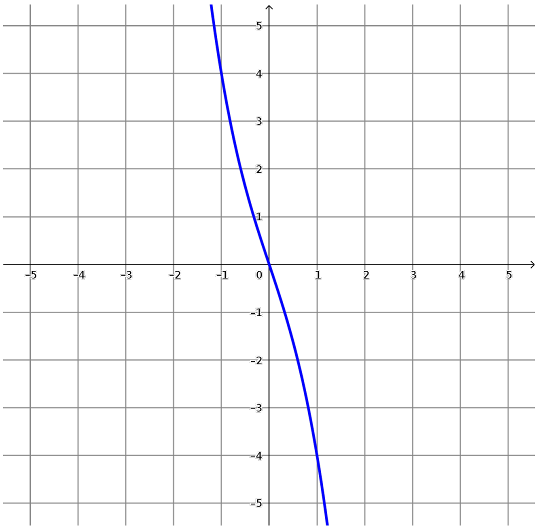
Obrázek 1: Funkce 1



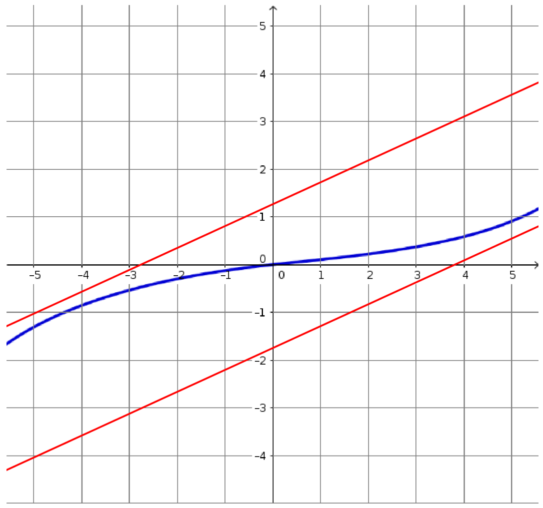
Obrázek 2: Funkce 2



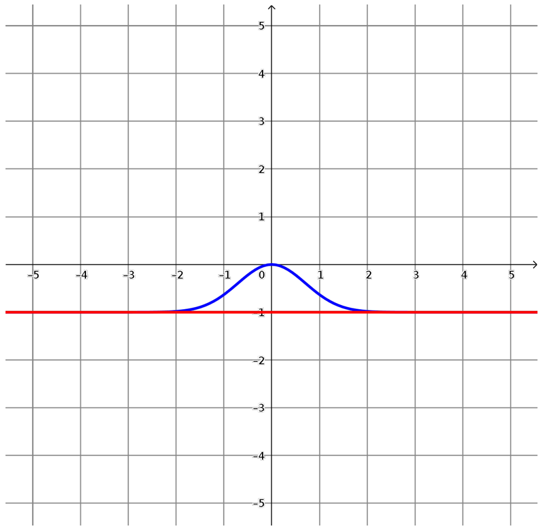
Obrázek 3: Funkce 3



Obrázek 4: Funkce 4



Obrázek 5: Funkce 5



Obrázek 6: Funkce 6

1. Definiční obor:

   $$D_f = \mathbb{R}$$

2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

   - Průsečík s osou y:

     $$y = 0^3 + 3 \cdot 0$$
     $$y = 0$$

     Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, 0]$.

   - Průsečík s osou x:

     $$0 = x^3 + 3x$$
     $$0 = x(x^2 + 3)$$
     $$x = 0 \quad \text{nebo} \quad x^2 + 3 = 0$$

     Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou x jsou $[0, 0]$. Rovnice $x^2 + 3 = 0$ nemá řešení.

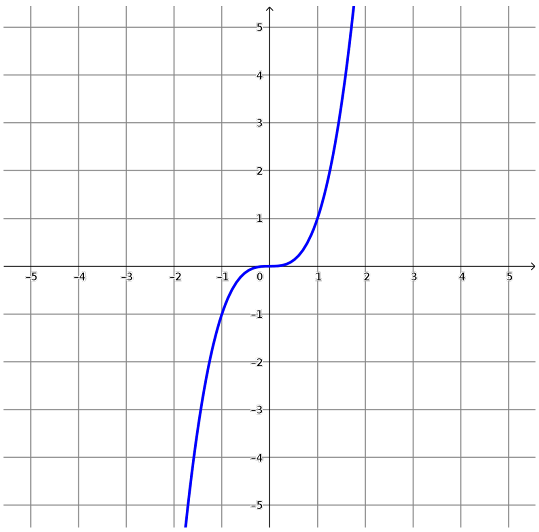
3. Lichost a sudost

   $$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -(x^3 + 3x) = -f(x)$$

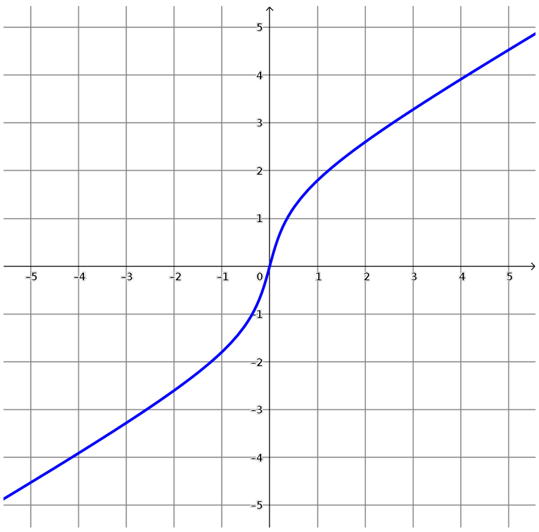
   Funkce $f(x)$ je lichá, tedy její graf je souměrný dle počátku soustavy souřadné.

   (viz definice 3).

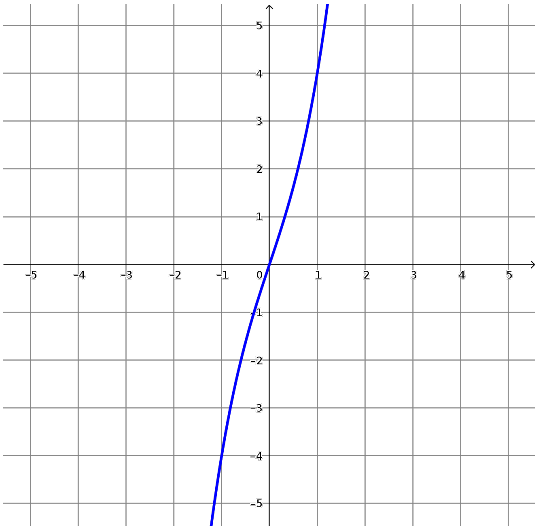
   Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ je lichá, tak vidíme, že Funkce 6 této vlastnosti neodpovídá, protože je sudá (graf funkce souměrný dle osy y). Proto ji z navrhovaných funkcí vyřadíme.



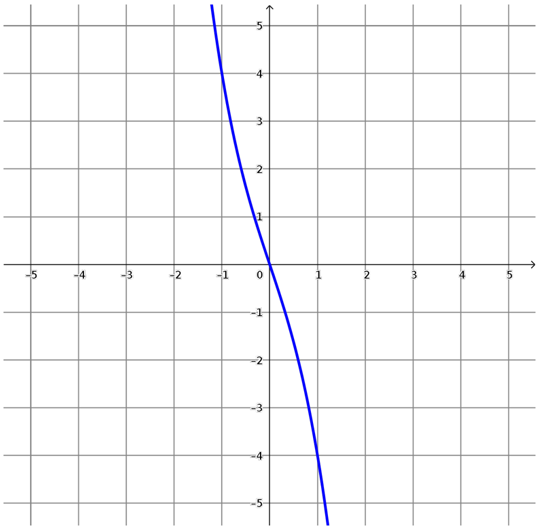
Obrázek 7: Funkce 1



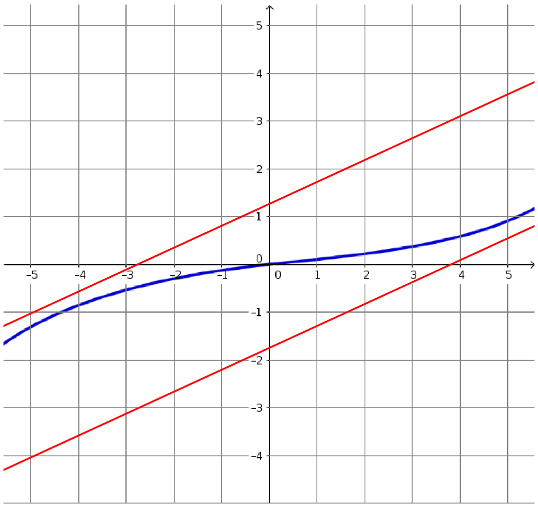
Obrázek 8: Funkce 2



Obrázek 9: Funkce 3



Obrázek 10: Funkce 4



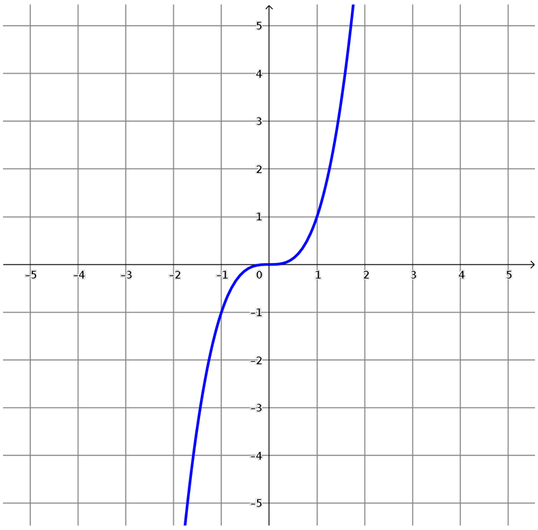
Obrázek 11: Funkce 5

4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

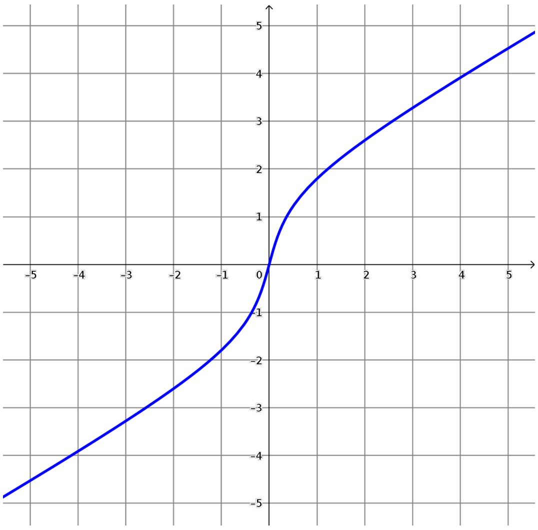
$$\lim_{x\to\infty}(x^3+3x)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+3x)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=-\infty$$

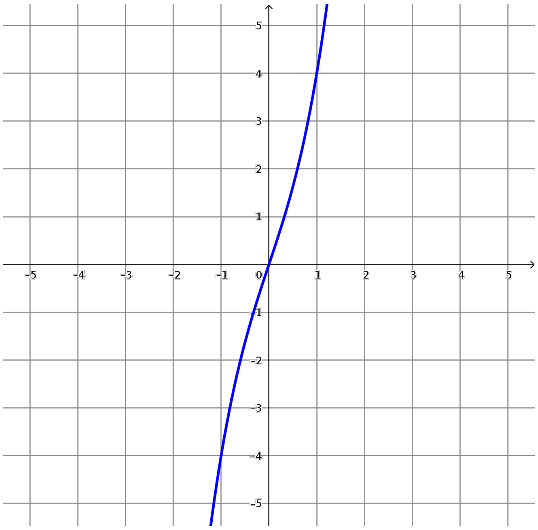
Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má limitu pro $x \to \infty$ rovnu nekonečnu a pro $x \to -\infty$ rovnu mínus nekonečnu, tak vidíme, že Funkce 4 těmto vlastnostem neodpovídá, protože má limitu pro $x \to \infty$ rovnu mínus nekonečnu a pro $x \to -\infty$ rovnu nekonečnu. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



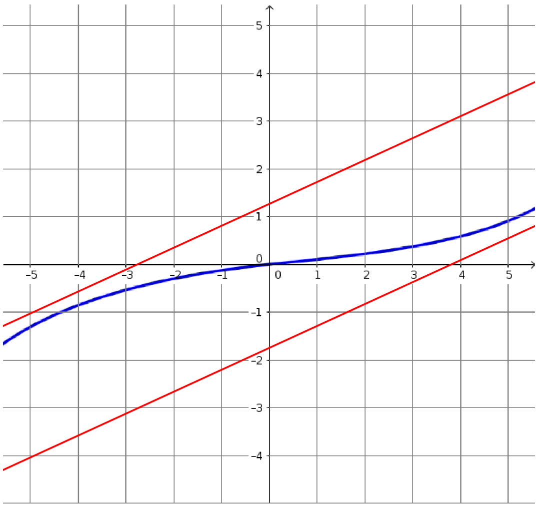
Obrázek 12: Funkce 1



Obrázek 13: Funkce 2



Obrázek 14: Funkce 3



Obrázek 15: Funkce 5

5. **První derivace:**

   - Stacionární body

     $$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 3 \\ D_{f'} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

     $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 0$$

     Tato rovnice nemá řešení, tudíž funkce $f(x)$ nemá stacionární body, a protože zároveň existuje na celém definičním oboru, tak funkce $f(x)$ nemá extrémy (viz věta 15).

   - Intervaly monotonie
     V tomto případě platí, pokud pro libovolné x je $f'(x) > 0$, funkce je rostoucí na celém definičním oboru (viz věta 11).

6. **Druhá a třetí derivace:**

   - Inflexní body

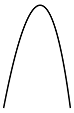
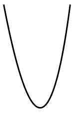
     $$\begin{aligned} f''(x) &= 6x \\ D_{f''} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

     $$\begin{aligned} f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

     $$\begin{aligned} &f'''(x) = 6 \\ &f'''(x) \neq 0 \end{aligned}$$

     Protože je druhá derivace rovna 0 pro $x = 0$ a třetí derivace je v tomto bodě nenulová, tak je v bodě 0 inflexní bod (viz věta 18). Jeho souřadnice jsou $[0, 0]$.

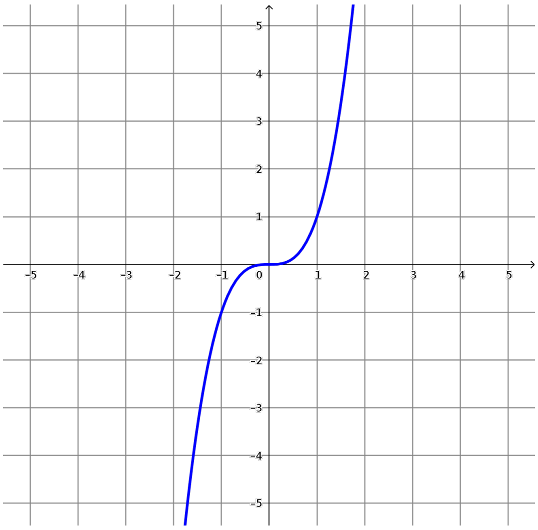
- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$6x$	$-$	$+$
	konkávní 	konvexní 

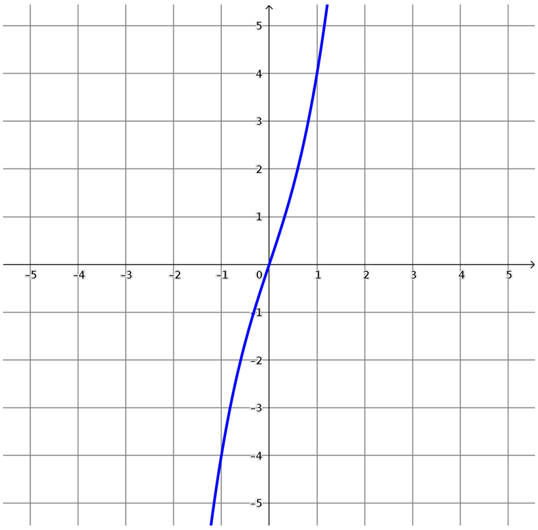
Tabulka viz věta 12.

V bodě 0 se funkce $f(x)$ mění z konkávní na konvexní, tudíž v bodě 0 je inflexní bod (viz definice 17).

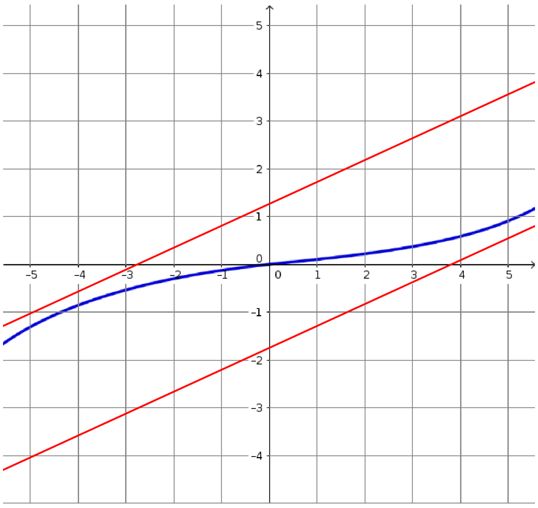
Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, 0)$ konkávní a na intervalu $(0, \infty)$ konvexní, vidíme, že Funkce 2 těmto vlastnostem neodpovídá, protože je na intervalu $(-\infty, 0)$ konvexní a na intervalu $(0, \infty)$ konkávní. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 16: Funkce 1



Obrázek 17: Funkce 3



Obrázek 18: Funkce 5

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum
  Nemá ji smysl řešit, protože funkce nemá stacionární bod (viz věta 16).

7. Asymptoty

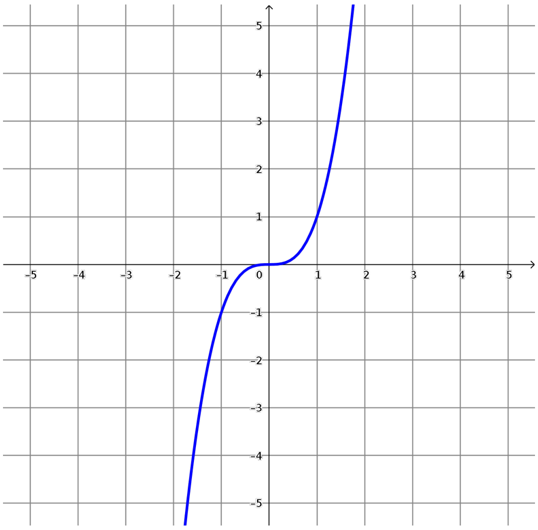
   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + 3x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = \infty$$

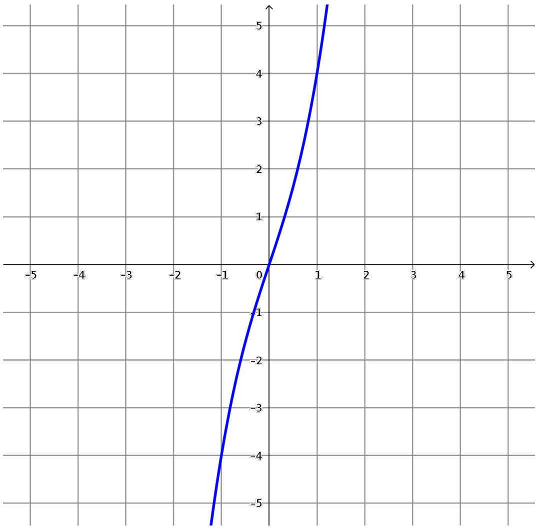
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$$

   Funkce $f(x)$ nemá asymptoty (viz definice 19 a věta 20).

   Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ nemá asymptoty, tak z navrhovaných funkcí vyřadíme Funkci 5, protože má dvě šikmé asymptoty.



Obrázek 19: Funkce 1



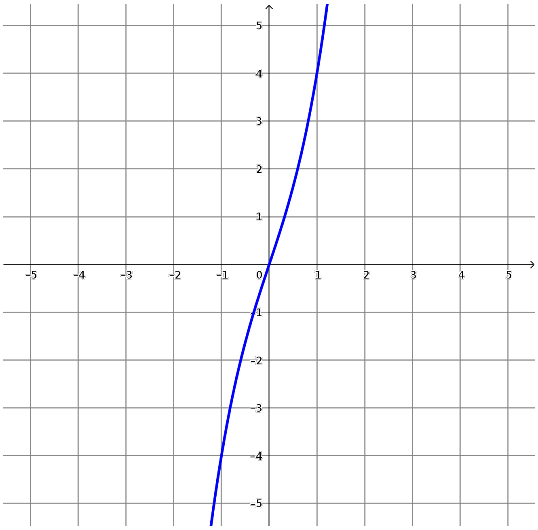
Obrázek 20: Funkce 3

8. Graf funkce $f(x)$:

   Pro určení správného grafu funkce $f(x)$ si musíme uvědomit, že první derivace funkce v bodě určuje směrnici tečny v tomto bodě. Vzhledem k tomu, že derivace funkce $f(x)$ v bodě 0 se rovná třem, tedy

   $$f'(0) = 3,$$

   tak z navrhovaných funkcí vyřadíme Funkci 1, protože první derivace v bodě 0 je u této funkce rovna nule, a proto její graf přiléhá k ose x.



Obrázek 21: Funkce 3 - výsledný graf funkce $f(x)$

1.2 Přístup tvořivý

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^3 + 3x.$$

1. Definiční obor:

   $$D_f = \mathbb{R}$$

2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

   - Průsečík s osou y

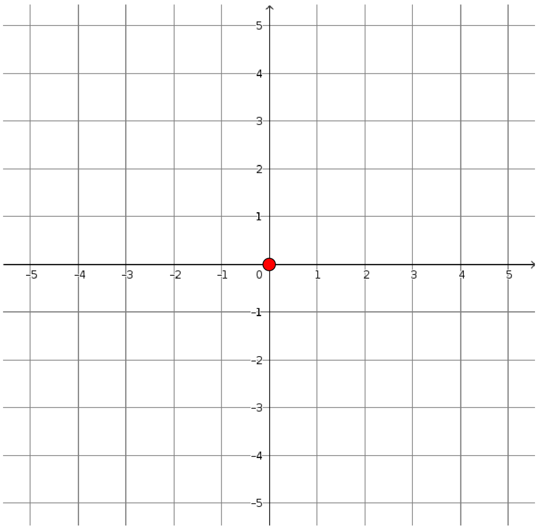
     $$y = 0^3 + 3 \cdot 0$$
     $$y = 0$$

     Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, 0]$.

   - Průsečík s osou x

     $$0 = x^3 + 3x$$
     $$0 = x(x^2 + 3)$$
     $$x = 0 \quad \text{nebo} \quad x^2 + 3 = 0$$

     Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou x jsou $[0, 0]$. Rovnice $x^2 + 3 = 0$ nemá řešení.



Obrázek 22: Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami

3. Lichost a sudost:

   $$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = -f(x)$$

   Funkce $f(x)$ je lichá, tedy její graf je souměrný dle počátku soustavy souřadné, protože $f(-x) = -f(x)$ (viz definice 3).

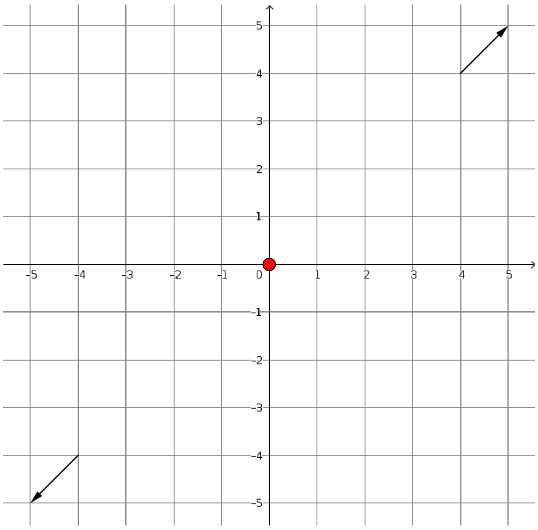
4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+3x)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+3x)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=-\infty$$

Co nám říkají:

- Pokud hodnota x roste do *nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce roste také do *nekonečna*.
- Pokud hodnota x jde do *mínus nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce jde také do *mínus nekonečna*.



Obrázek 23: Chování funkce v krajních bodech definičního oboru

5. První derivace:

- Stacionární body

Použité vzorce pro derivování
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Tabulka viz věta 9.

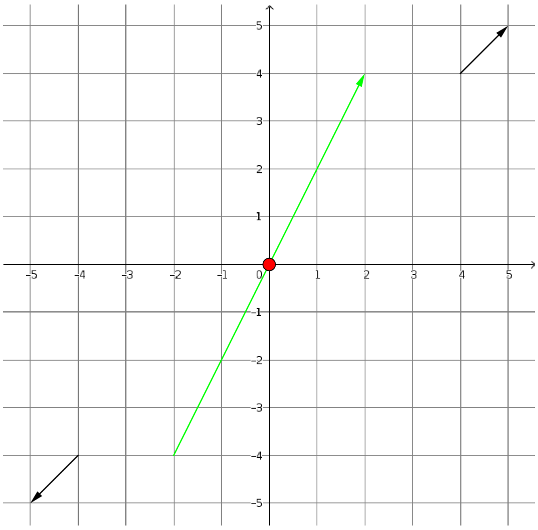
$$f'(x)=(x^3+3x)'=3x^2+3$$
$$D_{f'}=\mathbb{R}$$

Platí $f'(x)=0$ právě tehdy, když $3x^2+3=0$.

Tato rovnice nemá řešení, tudíž funkce $f(x)$ nemá stacionární body, a protože zároveň existuje na celém definičním oboru, tak funkce $f(x)$ nemá extrémy (viz věta 15).

- Intervaly monotonie

  V tomto případě platí, pokud pro libovolné x je $f'(x) > 0$, funkce je rostoucí na celém definičním oboru (viz věta 11).



Obrázek 24: Monotonie funkce $f(x)$

6. Druhá a třetí derivace:

- Inflexní body

Použité vzorce pro derivování
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Tabulka viz věta 9.

$$f''(x) = (3x^2 + 3)' = 6x$$
$$D_{f''} = \mathbb{R}$$

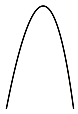
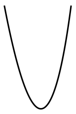
Platí $f''(x) = 0$ právě tehdy, když $6x = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

$$6x = 0$$
$$x = 0$$

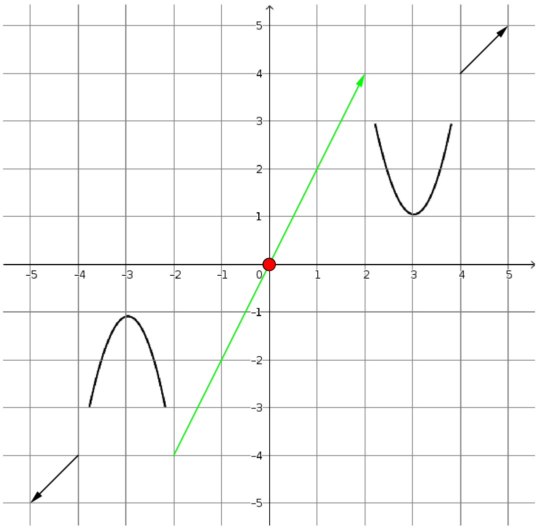
$$f'''(x) = (6x)' = 6$$
$$f'''(x) \neq 0$$

Protože je druhá derivace rovna 0 pro $x = 0$ a třetí derivace je nenulová, tak je v bodě 0 inflexní bod (viz věta 18). Dosazením do předpisu funkce $f(x)$ dostaneme y-ovou souřadnici, která je v bodě 0 rovna 0.

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$6x$	$-$	$+$
	konkávní 	konvexní 

  Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, 0)$ konkávní a na intervalu $(0, \infty)$ konvexní (viz věta 12).
  V bodě 0 se funkce $f(x)$ mění z konkávní na konvexní, a proto je v bodě 0 inflexní bod (viz definice 17).



Obrázek 25: Konvexnost a konkávnost funkce $f(x)$

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum
  Nemá ji smysl řešit, protože funkce nemá stacionární bod (viz věta 16).

7. Asymptoty:

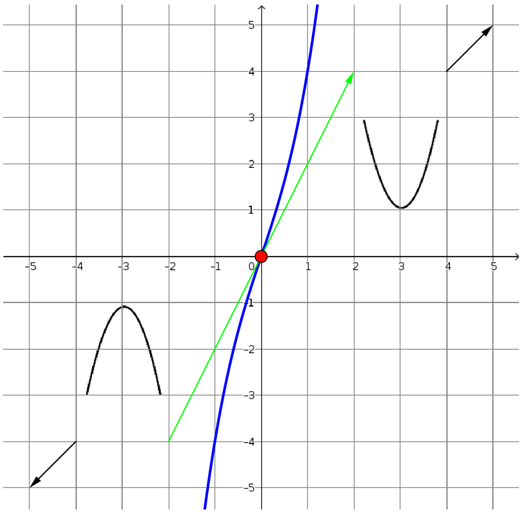
   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 3x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = \infty$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

   Funkce $f(x)$ nemá asymptoty, protože $a = \infty$ (viz definice 19 a věta 20).

8. Graf funkce $f(x)$:



Obrázek 26: Výsledný graf funkce $f(x)$

Když budeme kreslit graf funkce $f(x)$ musíme si uvědomit, že první derivace funkce v bodě určuje směrnici tečny v tomto bodě. Vzhledem k tomu, že platí

$$f'(0) = 3,$$

tak funkce $f(x)$ nepřiléhá k ose x.

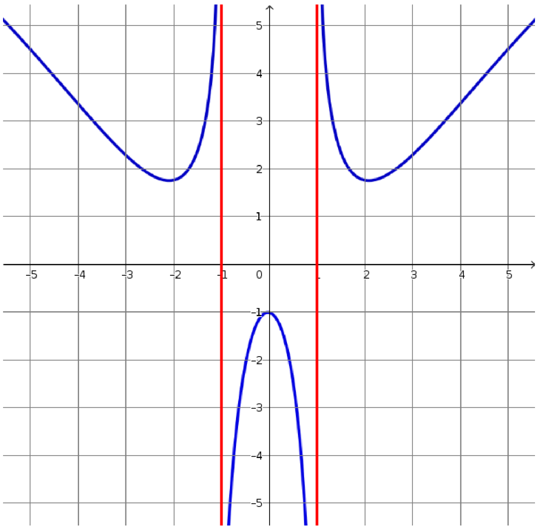
2 Úloha 2

2.1 Přístup vybírací

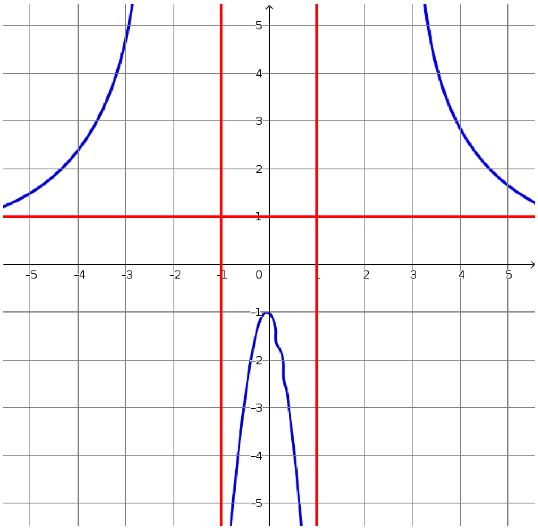
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

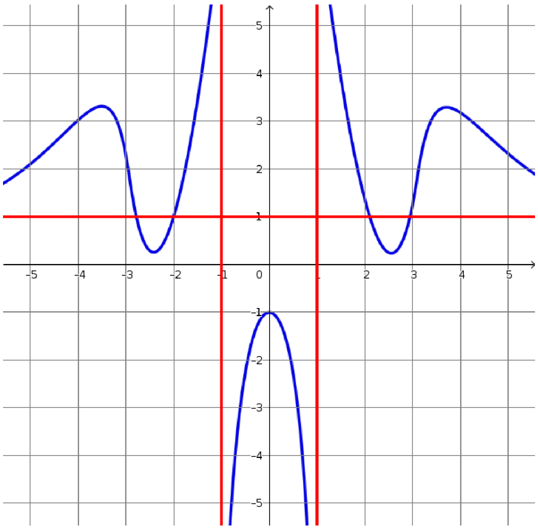
Na obrázcích jsou grafy 1–5, které jsou kandidáty na graf vyšetřované funkce. Postupnými výpočty zjistíme, že dané grafy nemusí odpovídat zjištěným vlastnostem, a proto je vyřadíme. Takto budeme pokračovat dokud nám nezbude graf výsledný.



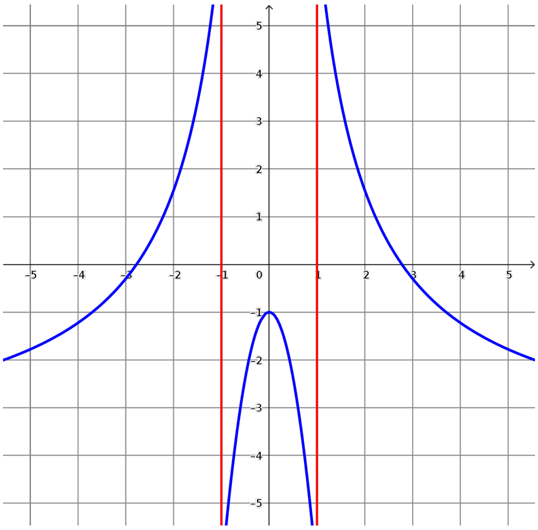
Obrázek 27: Funkce 1



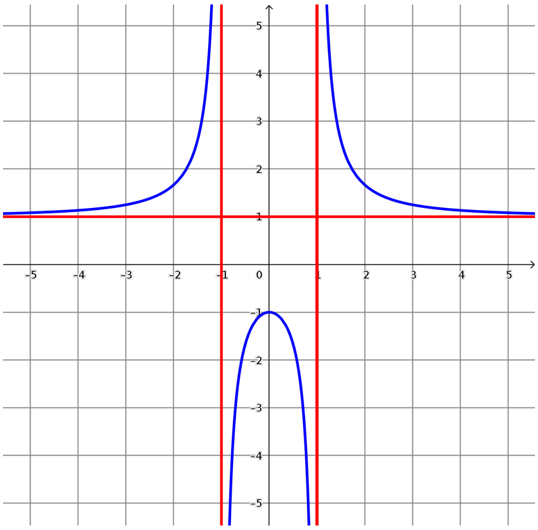
Obrázek 28: Funkce 2



Obrázek 29: Funkce 3



Obrázek 30: Funkce 4



Obrázek 31: Funkce 5

1. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

   - Průsečík s osou y

$$y = \frac{0^2 + 1}{0^2 - 1}$$
$$y = -1$$

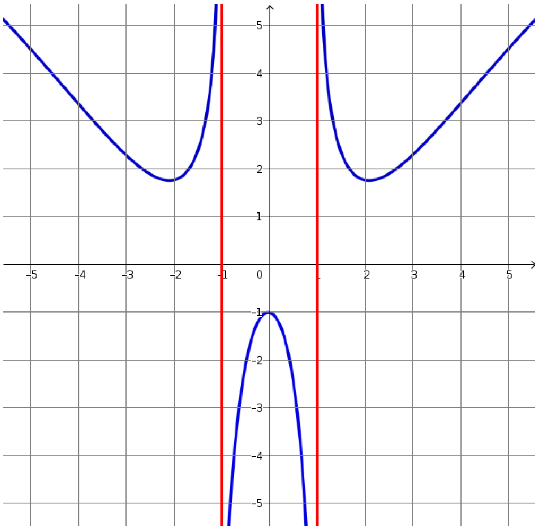
   Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, -1]$.

   - Průsečík s osou x

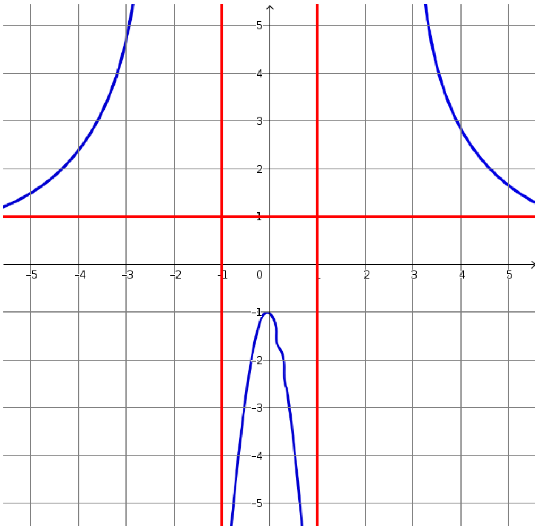
$$0 = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$$

   Tato rovnice nemá řešení, funkce $f(x)$ tedy nemá průsečík s osou x.

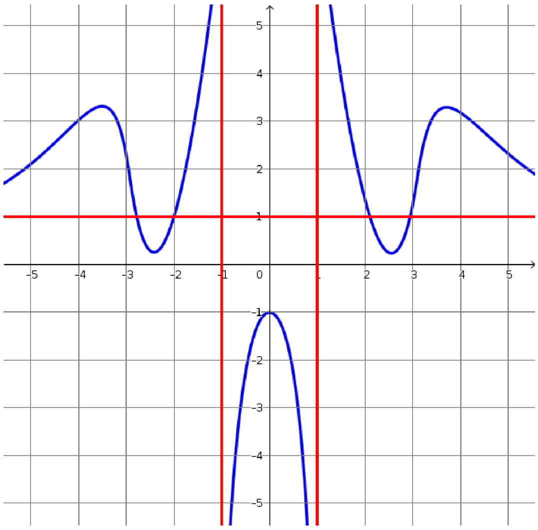
Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má jeden průsečík se souřadnými osami, tak vidíme, že Funkce 4 této vlastnosti neodpovídá, protože jich má více. Proto ji z navrhovaných funkcí vyřadíme.



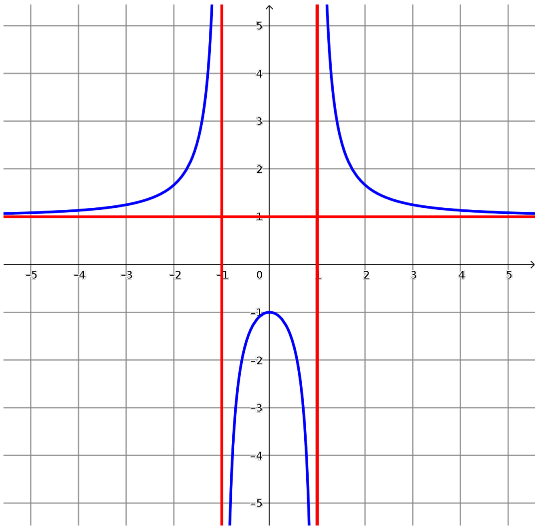
Obrázek 32: Funkce 1



Obrázek 33: Funkce 2



Obrázek 34: Funkce 3



Obrázek 35: Funkce 5

3. Lichost a sudost:

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$$

Funkce $f(x)$ je sudá, tedy její graf je souměrný dle osy y (viz definice 2).

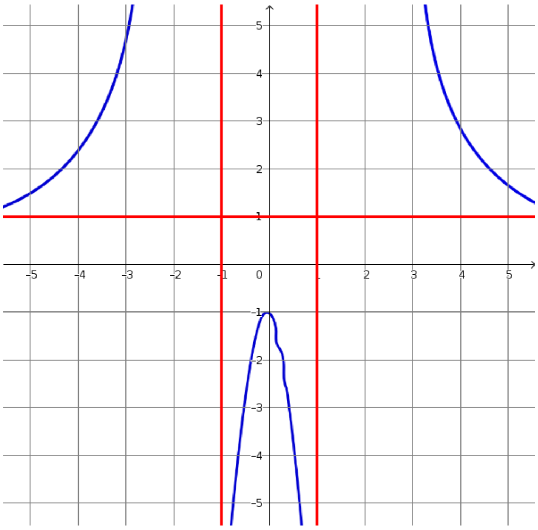
4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

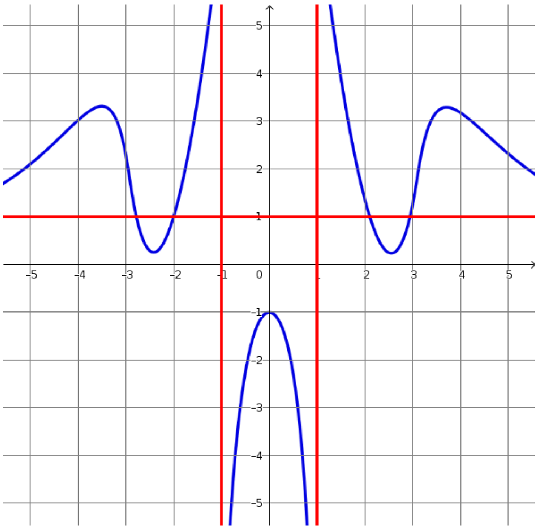
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty$$

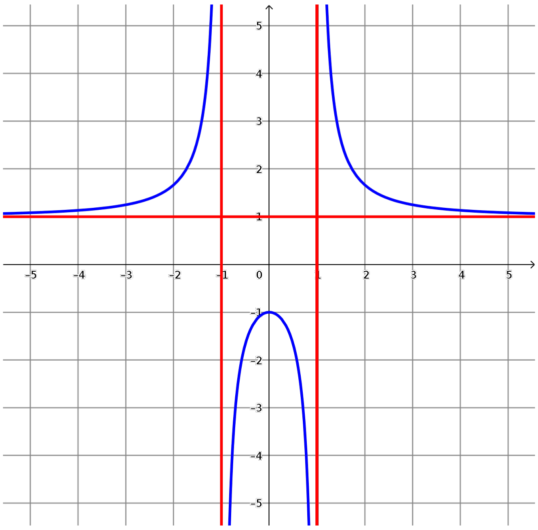
Vzhledem k tomu, že limita pro $x \to \pm\infty$ je rovna jedné, tak vidíme, že Funkce 1 těmto vlastnostem nevyhovuje, protože její limita pro $x \to \infty$ je rovná nekonečnu a limita pro $x \to -\infty$ je rovna mínus nekonečnu. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 36: Funkce 2



Obrázek 37: Funkce 3



Obrázek 38: Funkce 5

5. První derivace:

- Stacionární body

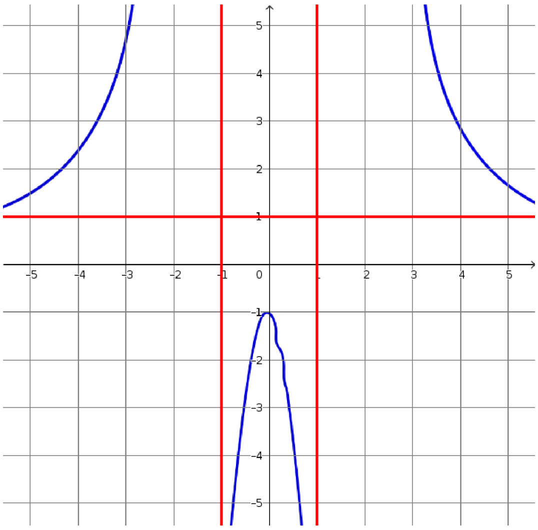
$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

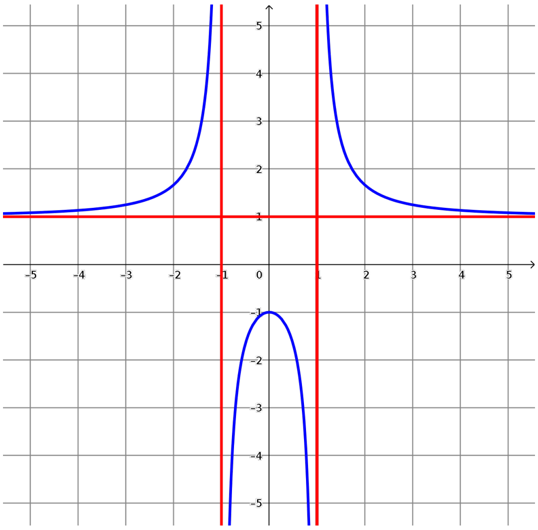
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x = 0$$
$$x = 0$$

V bodě 0 je stacionární bod (viz věta 15). Jeho souřadnice jsou $[0, -1]$.

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má jeden stacionární bod, tak vidíme, že Funkce 3 těmto vlastnostem neodpovídá, protože má více stacionárních bodů. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 39: Funkce 2



Obrázek 40: Funkce 5

- Intervaly monotonie

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$	$+$	$+$	$-$	$-$
	rostoucí	rostoucí	klesající	klesající

Tabulka viz věta 11.

6. Druhá a třetí derivace:

- Inflexní body

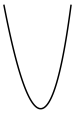
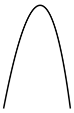
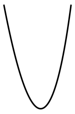
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4(x^2-1)^2-(-4x)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-4x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \\ D_{f''} &= \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \end{aligned}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4(3x^2+1)=0$$

Tato rovnice nemá řešení.

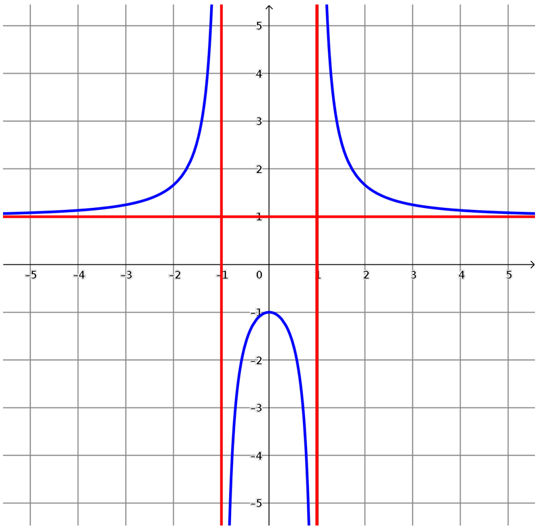
Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné x_0, pro které platí $f''(x_0)=0$, tak nemá smysl řešit třetí derivaci (viz věta 18).

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$\frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$	$+$	$-$	$+$
	konvexní 	konkávní 	konvexní 

Tabulka viz věta 12.

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ nemá inflexní bod (viz definice 17) ,protože v bodech -1 a 1 funkce $f(x)$ není definována, tak vidíme, že Funkce 2 této vlastnosti neodpovídá, protože má inflexní bod. Proto jí z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 41: Funkce 5

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum
  Protože je $f''(0) = -4 < 0$, tak je v bodě 0 ostré lokální maximum.

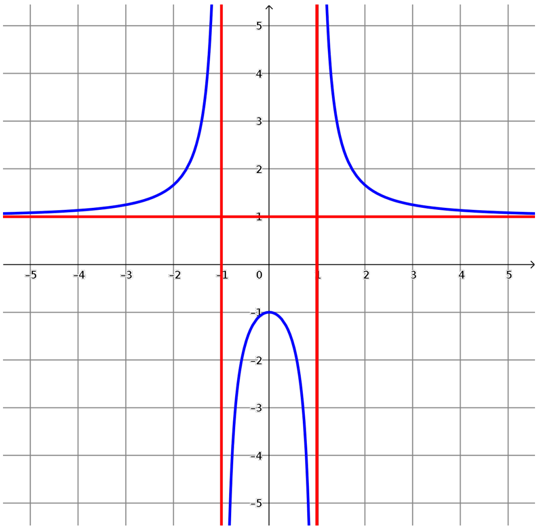
7. Asymptoty:

   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

   Funkce $f(x)$ má vodorovnou asymptotu $y = 1$ (viz Definice 19 a Věta 20).



Obrázek 42: Funkce 5 - výsledný graf funkce $f(x)$

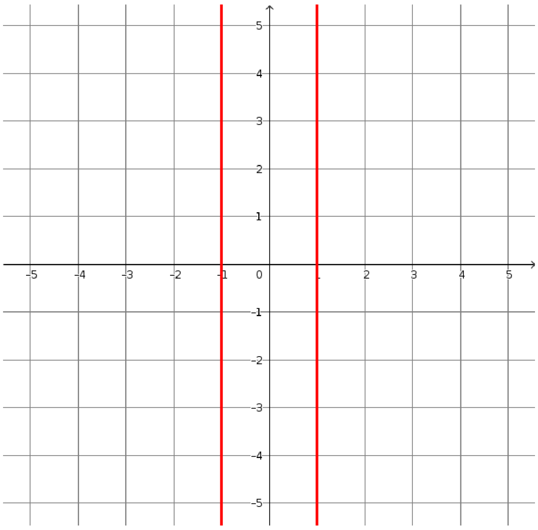
2.2 Přístup tvořivý

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

1. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$



Obrázek 43: Svislé asymptoty

2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

- Průsečík s osou y

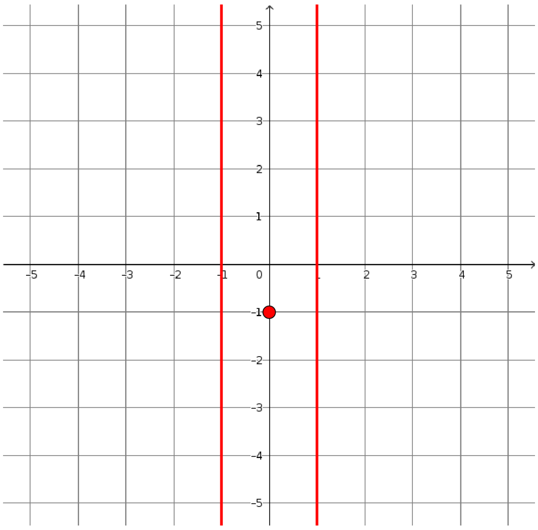
$$y = \frac{0^2+1}{0^2-1}$$
$$y = -1$$

Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, -1]$.

- Průsečík s osou x

$$0 = \frac{x^2+1}{x^2-1} \Leftrightarrow x^2+1=0$$

Tato rovnice nemá řešení, funkce $f(x)$ tedy nemá průsečík s osou x.



Obrázek 44: Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami

3. Lichost a sudost:

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$$

Funkce $f(x)$ je sudá, tedy její graf je souměrný dle osy y, protože $f(-x) = f(x)$ (viz definice 2).

4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

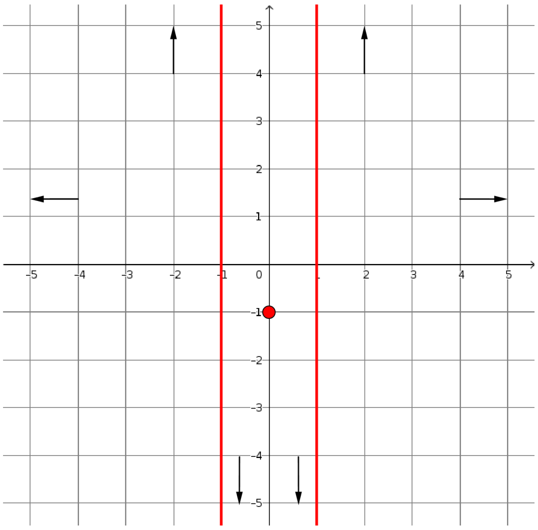
$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty$$

Co nám říkají:

- Pokud hodnota x roste do *nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce jde k 1.
- Pokud hodnota x jde do *mínus nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce jde k 1.
- Pokud hodnota x jde k 1 *zprava*, tak **funkční hodnota** této funkce roste do *nekonečna*.
- Pokud hodnota x jde k 1 *zleva*, tak **funkční hodnota** této funkce jde do *mínus nekonečna*.

- Pokud hodnota x jde k -1 *zprava*, tak **funkční hodnota** této funkce jde do *mínus nekonečna*.
- Pokud hodnota x jde k -1 *zleva*, tak **funkční hodnota** této funkce roste do *nekonečna*.



Obrázek 45: Chování funkce v krajních bodech definičního oboru

5. First derivative heading:

5. První derivace:

- Stacionární body

Použité vzorce pro derivování
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Tabulka viz věta 9.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x^2-1) - (x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \\
&= \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - (2x^3+2x)}{(x^2-1)^2} = \\
&= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Platí $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $-4x = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

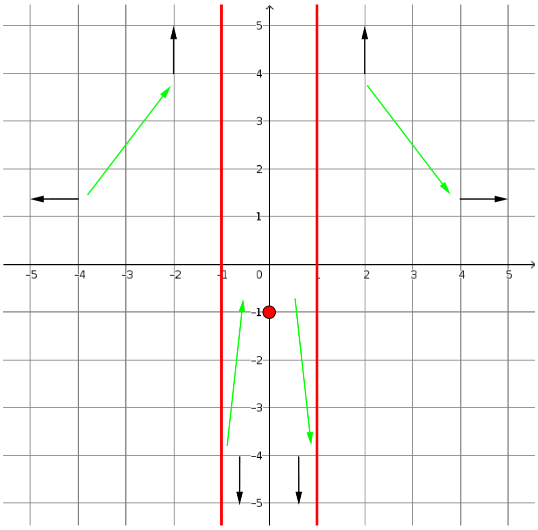
$$\begin{aligned}
-4x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Stacionárním bodem je 0. Dosazením do předpisu funkce $f(x)$ dostaneme y-ovou souřadnici, která je pro bod 0 rovna -1 (viz věta 15).

- Intervaly monotonie

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$-4x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(x^2-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$	$+$	$+$	$-$	$-$
	rostoucí	rostoucí	klesající	klesající
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ rostoucí a na intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ klesající (viz věta 11).



Obrázek 46: Monotonie funkce $f(x)$

6. Druhá a třetí derivace:

- Inflexní body

Použité vzorce pro derivování
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

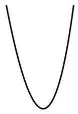
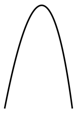
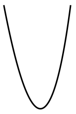
Tabulka viz věta 9 a 10.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(-4x)'(x^2-1)^2-(-4x)((x^2-1)^2)'}{(x^2-1)^4} = \\
&= \frac{-4(x^2-1)^2-(-4x)\cdot 2(x^2-1)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^4} = \\
&= \frac{-4(x^2-1)^2-(-4x)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-4(x^2-1)^2+16x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \\
&= \frac{(x^2-1)(-4(x^2-1)+16x^2)}{(x^2-1)^4} = \frac{-4x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3} = \\
&= \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \\
D_{f''} &= \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}
\end{aligned}
$$

Platí $f''(x)=0$ právě tehdy, když $4(3x^2+1)=0$. Tato rovnice nemá řešení.

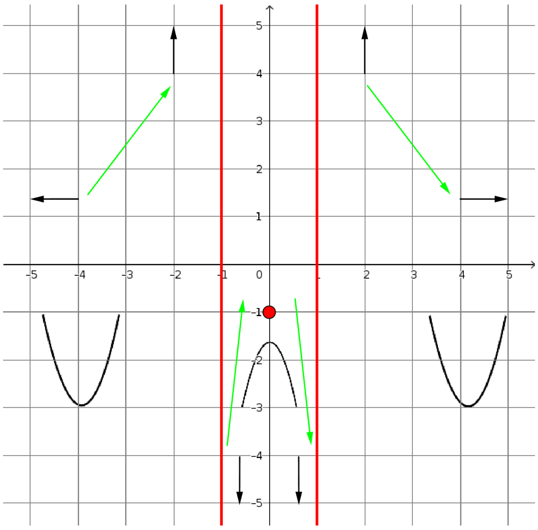
Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné x_0, pro které platí $f''(x_0)=0$, tak nemá smysl řešit třetí derivaci (viz věta 18).

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$4(3x^2+1)$	$+$	$+$	$+$
$(x^2-1)^3$	$+$	$-$	$+$
$\frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$	$+$	$-$	$+$
	konvexní 	konkávní 	konvexní 

Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty,-1)$ konvexní, na intervalu $(-1,1)$ konkávní a na intervalu $(1,\infty)$ konvexní (viz věta 12).

Funkce $f(x)$ se v bodě -1 mění z konvexní na konkávní a v bodě 1 s konkávní na konvexní, v těchto bodech ale inflexní body nejsou, protože v nich funkce $f(x)$ není definována.



Obrázek 47: Konvexnost a konkávnost funkce $f(x)$

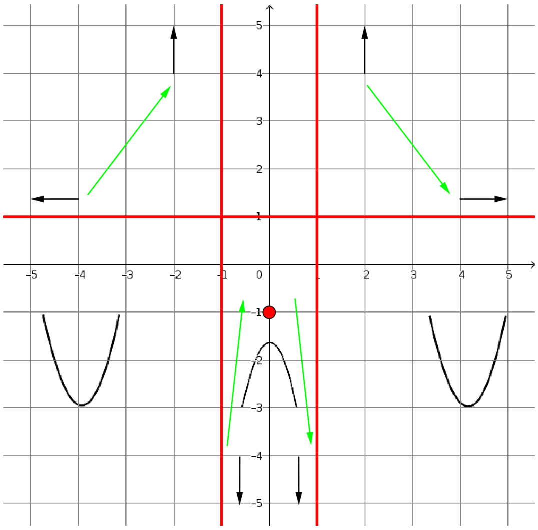
- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum
  Protože je $f''(0) = -4 < 0$, tak je v bodě 0 ostré lokální maximum (viz věta 16).

7. Asymptoty:

   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

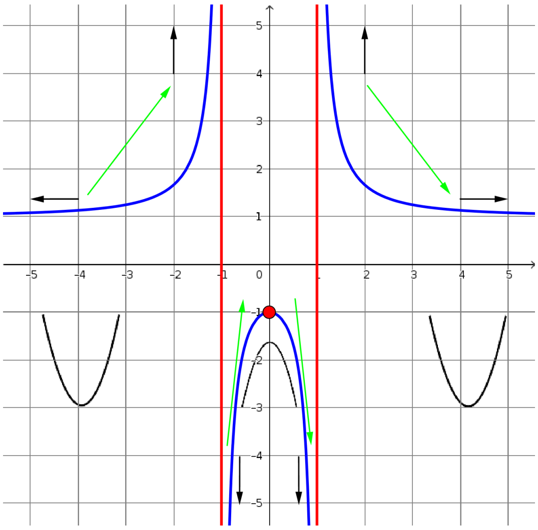
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^3-x} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 0$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

Vzhledem k tomu, že $a = 0$ a $b = 1$, funkce $f(x)$ má vodorovnou asymptotu $y = 1$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 48: Vodorovná asymptota $y = 1$

8. Graf funkce $f(x)$:



Obrázek 49: Výsledný graf funkce $f(x)$

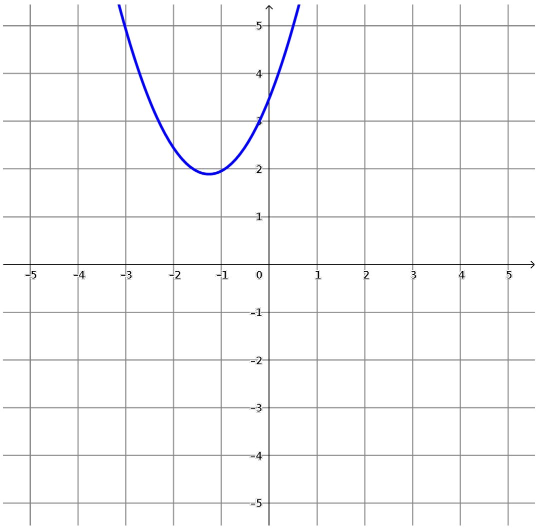
3 Úloha 3

3.1 Přístup vybírací

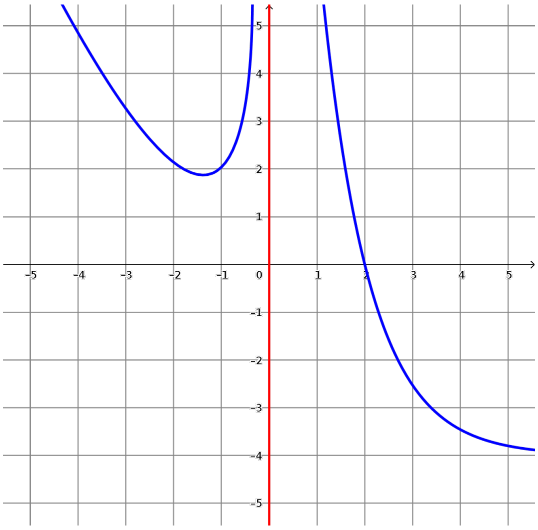
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1 - x^3}{x^2}.$$

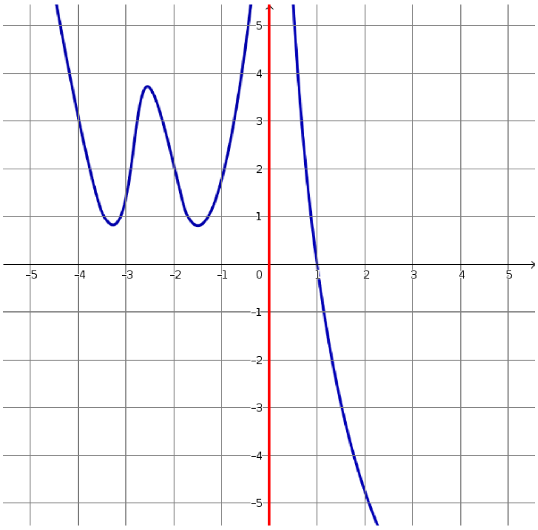
Na obrázcích jsou grafy 1–6, které jsou kandidáty na graf vyšetřované funkce. Postupnými výpočty zjistíme, že dané grafy nemusí odpovídat zjištěným vlastnostem, a proto je vyřadíme. Takto budeme pokračovat dokud nám nezbude graf výsledný.



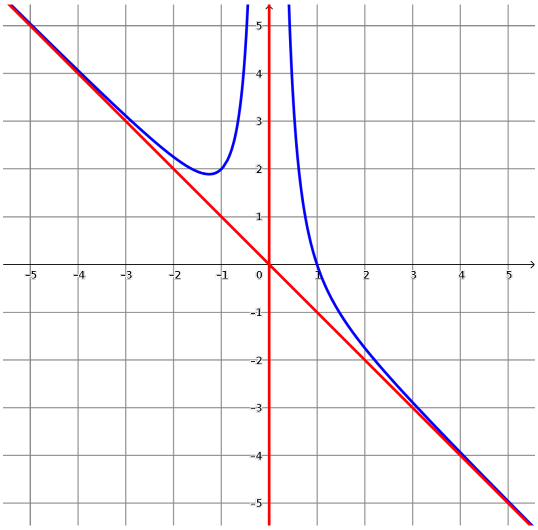
Obrázek 50: Funkce 1



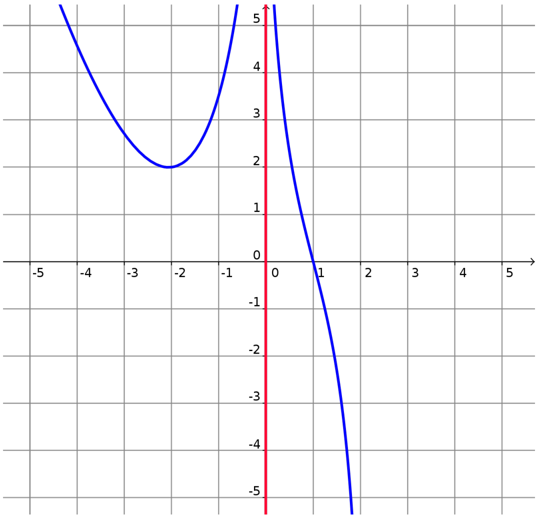
Obrázek 51: Funkce 2



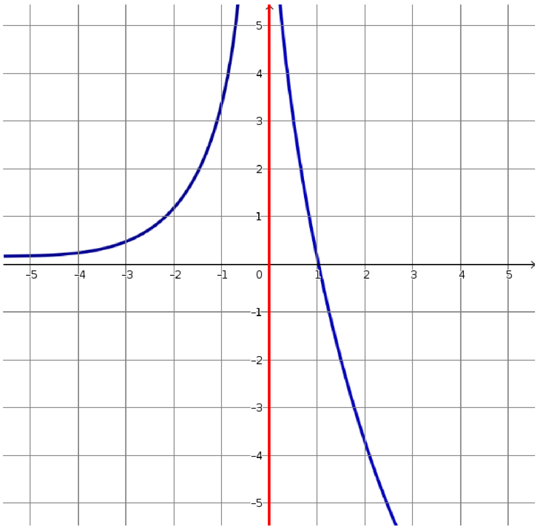
Obrázek 52: Funkce 3



Obrázek 53: Funkce 4



Obrázek 54: Funkce 5

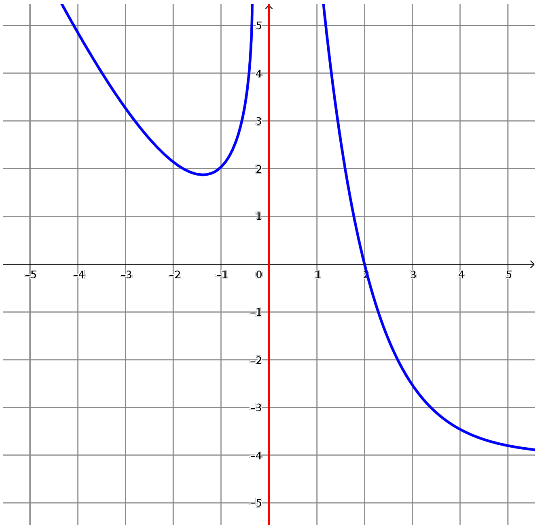


Obrázek 55: Funkce 6

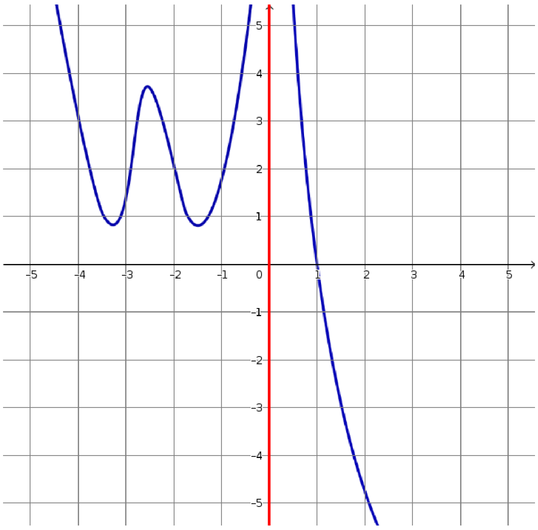
1. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

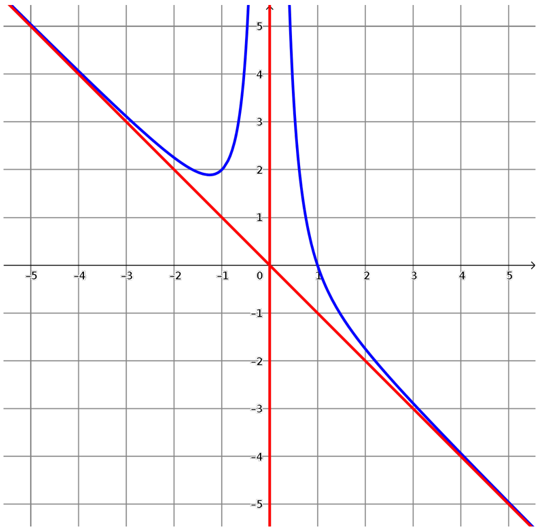
Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ není definována v bodě 0, tak vidíme, že Funkce 1 této vlastnosti neodpovídá, protože její definiční obor jsou všechna reálná čísla. Proto ji z navrhovaných funkcí vyřadíme.



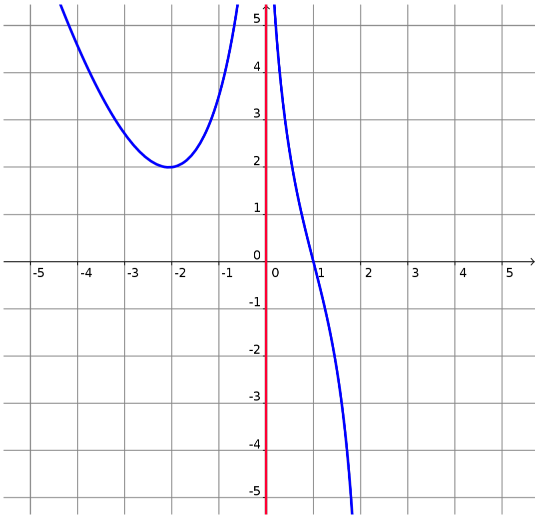
Obrázek 56: Funkce 2



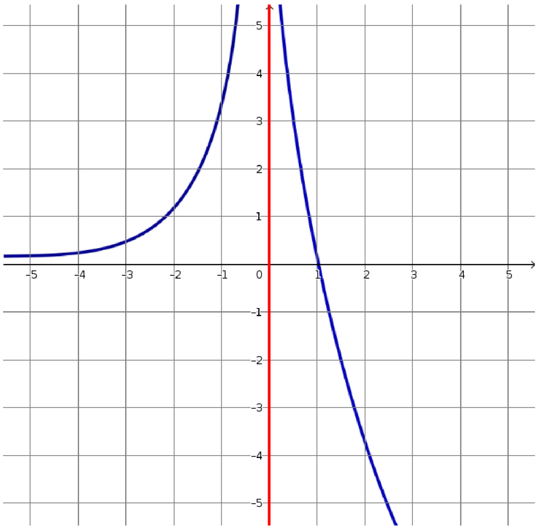
Obrázek 57: Funkce 3



Obrázek 58: Funkce 4



Obrázek 59: Funkce 5



Obrázek 60: Funkce 6

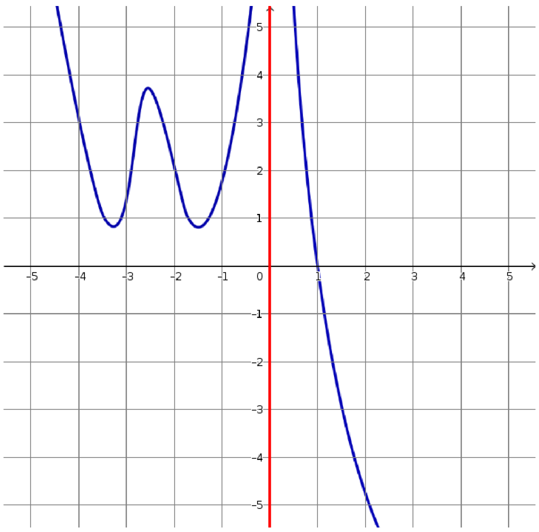
2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

- Průsečík s osou y:
  Funkce $f(x)$ průsečík s osou y nemá, protože $x \neq 0$.
- Průsečík s osou x:

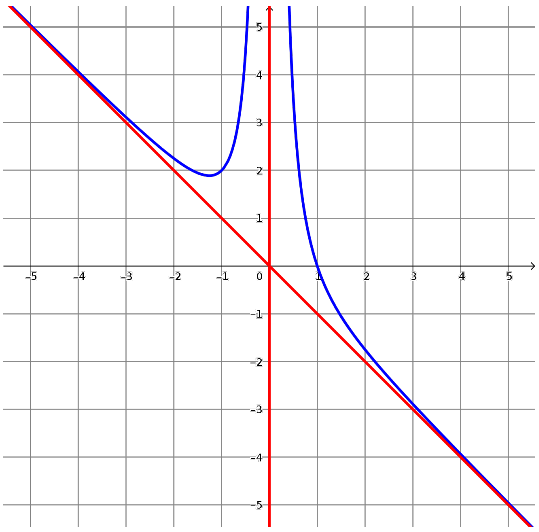
$$\begin{aligned} 0 = \frac{1-x^3}{x^2} \Leftrightarrow 1 - x^3 &= 0 \\ x^3 &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou x jsou $[1, 0]$.

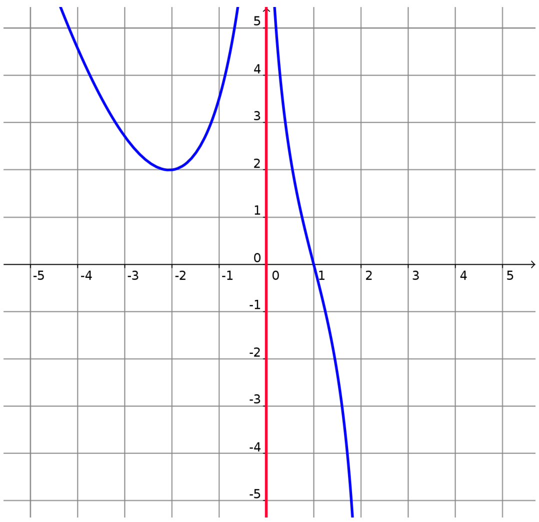
Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má průsečík o souřadnicích $[1, 0]$, tak vidíme, že Funkce 2 této vlastnosti neodpovídá, protože její průsečík má souřadnice $[2, 0]$. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



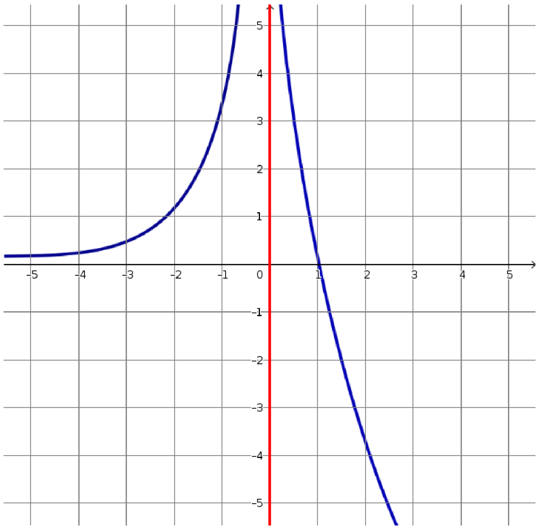
Obrázek 61: Funkce 3



Obrázek 62: Funkce 4



Obrázek 63: Funkce 5



Obrázek 64: Funkce 6

3. Lichost a sudost:

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = \frac{1-(-x)^3}{(-x)^2} = \frac{1+x^3}{x^2}$$

Funkce $f(x)$ není sudá ani lichá (viz definice 2 a 3).

4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

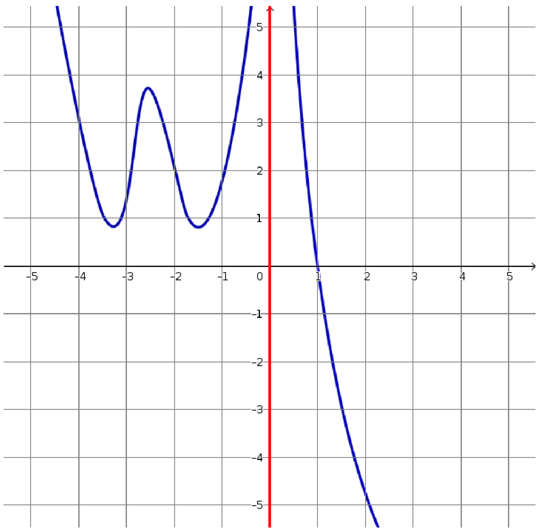
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{x^3}-1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{x^3}-1\right) = \infty$$

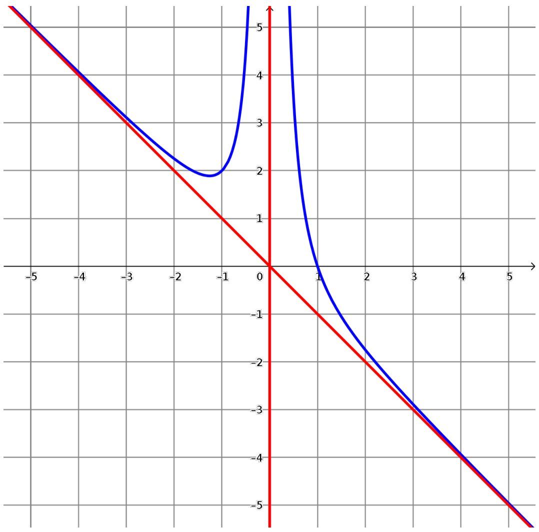
$$\lim_{x\to0^+} \frac{1-x^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1-x^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$$

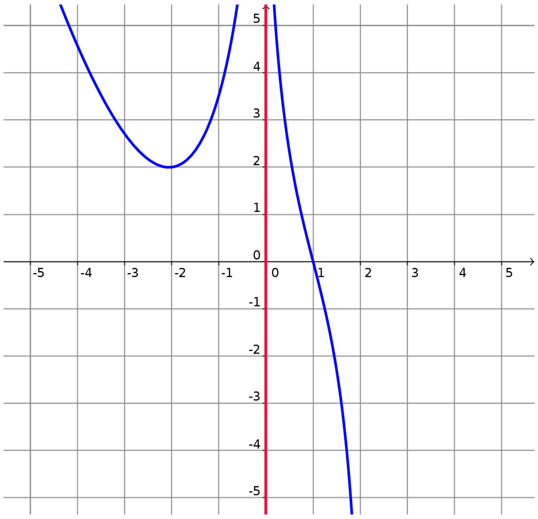
Vzhledem k tomu, že limita funkce $f(x)$ pro $x \to -\infty$ je nekonečno, tak vidíme, že Funkce 6 této vlastnosti neodpovídá, protože její limita pro $x \to -\infty$ je 0. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 65: Funkce 3



Obrázek 66: Funkce 4



Obrázek 67: Funkce 5

5. První derivace:

   - Stacionární body

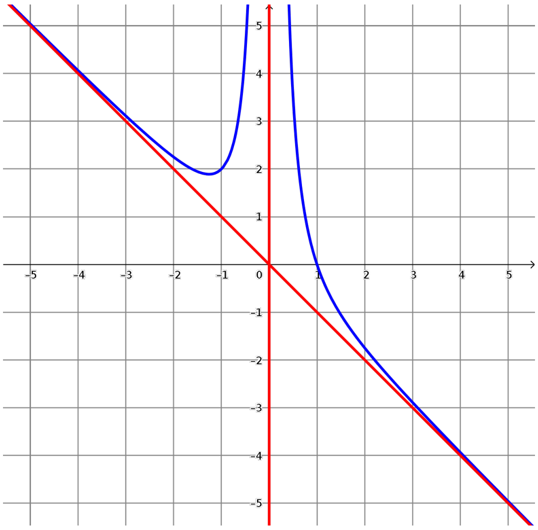
$$f'(x) = \frac{-3x^2 \cdot x^2 - (1-x^3)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-3x^4 - 2x + 2x^4}{x^4} = \frac{-x^4 - 2x}{x^4} = \\ = \frac{-x^3-2}{x^3}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

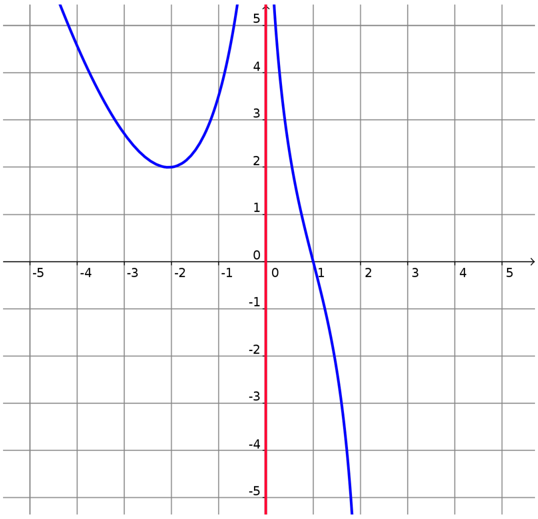
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 - 2 &= 0 \\ x^3 &= -2 \\ x &= \sqrt[3]{-2} \\ x &= -\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

V bodě $-\sqrt[3]{2}$ je stacionární bod (viz věta 15). Jeho souřadnice jsou $[-\sqrt[3]{2}; 1{,}89]$ (y-ová souřadnice je zaokrouhlená).

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má jeden stacionární bod, tak vidíme, že Funkce 3 této vlastnosti neodpovídá, protože má více stacionárních bodů. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 68: Funkce 4



Obrázek 69: Funkce 5

- Intervaly monotonie

	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	$(0, \infty)$
$\frac{-x^3-2}{x^3}$	$-$	$+$	$-$
	klesající	rostoucí	klesající

Tabulka viz věta 11.

6. Druhá a třetí derivace:

- Inflexní body

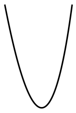
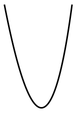
$$f''(x) = \frac{-3x^2 \cdot x^3 - (-x^3 - 2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-3x^5 + 3x^5 + 6x^2}{x^6} = \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}$$
$$D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 = 0$$

Tato rovnice nemá řešení.

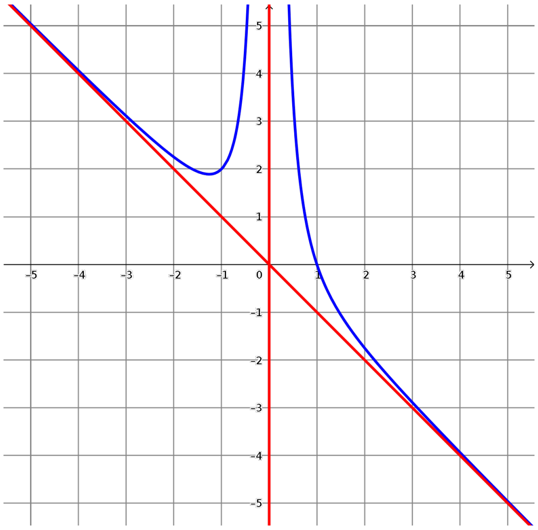
Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné x_0, pro které platí $f''(x_0) = 0$, tak nemá smysl řešit třetí derivaci (viz věta 18).

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\frac{6}{x^4}$	$+$	$+$
	konvexní 	konvexní 

Tabulka viz věta 12.

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ nemá inflexní bod (viz definice 17), tak vidíme, že Funkce 5 neodpovídá této vlastnosti, protože má inflexní bod o souřadnicích $[1, 0]$. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 70: Funkce 4

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum
  Protože $f''(-\sqrt[3]{2}) \doteq 2{,}38 > 0$, tak má funkce $f(x)$ v bodě $-\sqrt[3]{2}$ ostré lokální minimum (viz věta 16).

7. Asymptoty:

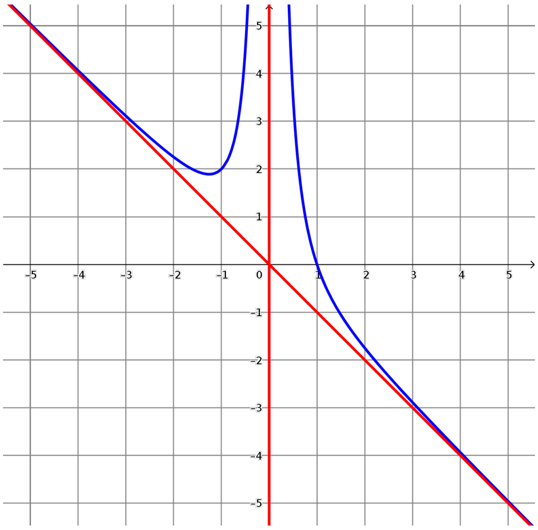
   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - x^3}{x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x^3} - 1\right) = -1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1 - x^3}{x^2} + x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - x^3 + x^3}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Funkce $f(x)$ má šikmou asymptotu $y = -x$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 71: Funkce 4 - výsledná funkce $f(x)$

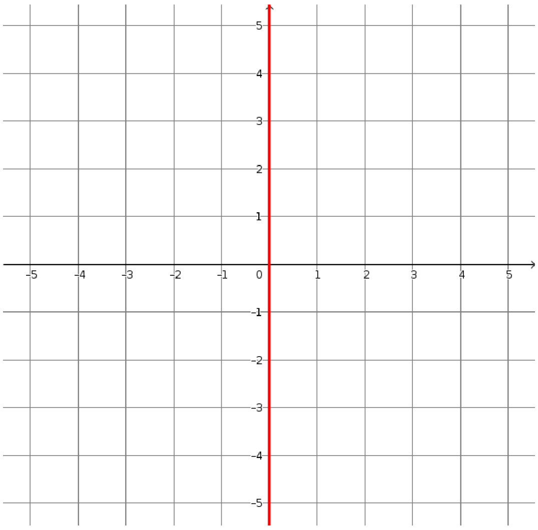
3.2 Přístup tvořivý

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1 - x^3}{x^2}.$$

1. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



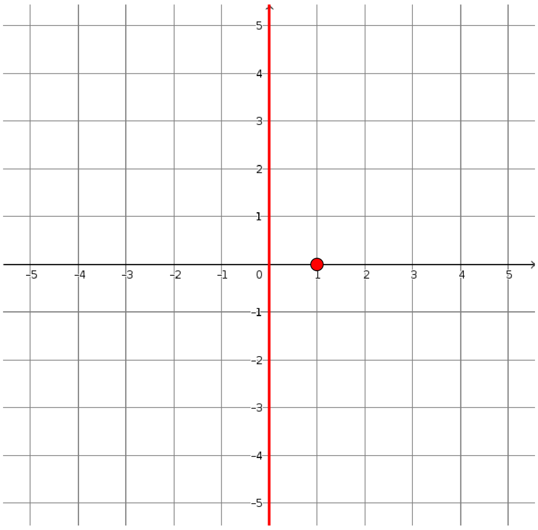
Obrázek 72: Svislá asymptota

2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

   - Průsečík s osou y
     Funkce $f(x)$ průsečík s osou y nemá, protože $x \neq 0$.
   - Průsečík s osou x

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1 - x^3}{x^2} \Leftrightarrow 1 - x^3 &= 0 \\ x^3 &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou x jsou $[1, 0]$.



Obrázek 73: Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami

3. Lichost a sudost:

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = \frac{1-(-x)^3}{(-x)^2} = \frac{1-(-x^3)}{x^2} = \frac{1+x^3}{x^2}$$

Funkce $f(x)$ není sudá ani lichá, protože $f(-x) \neq f(x)$ ani $f(-x) \neq -f(x)$ (viz definice 2 a 3).

4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{x^3}-1\right) = -\infty$$

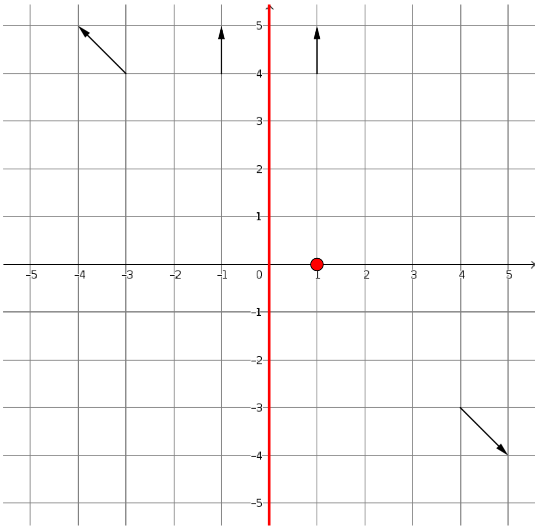
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{x^3}-1\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-x^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$$

Co nám říkají:

- Pokud hodnota x roste do *nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce jde do *mínus nekonečna*.
- Pokud hodnota x jde do *mínus nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce roste do *nekonečna*.
- Pokud se hodnota x blíží k 0 *zprava*, tak **funkční hodnota** této funkce roste do *nekonečna*.
- Pokud se hodnota x blíží k 0 *zleva*, tak **funkční hodnota** této funkce roste do *nekonečna*.



Obrázek 74: Chování funkce v krajních bodech definičního oboru

5. První derivace:

   - Stacionární body

Použité vzorce pro derivování
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

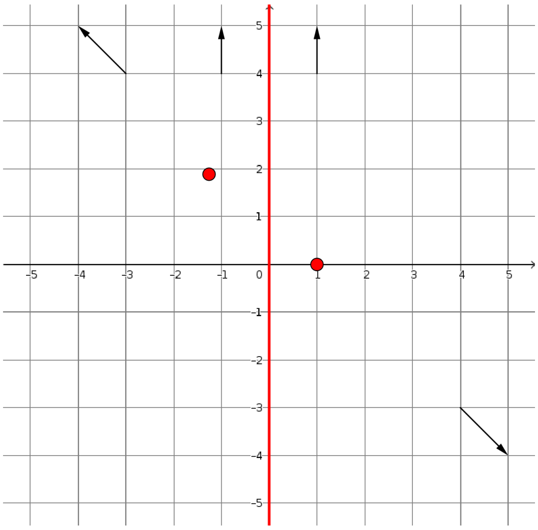
Tabulka viz věta 9.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)' = \frac{(1-x^3)'x^2 - (1-x^3)(x^2)'}{x^4} = \frac{-3x^2 \cdot x^2 - (1-x^3) \cdot 2x}{x^4} = \\
&= \frac{-3x^4 - (2x - 2x^4)}{x^4} = \frac{-3x^4 - 2x + 2x^4}{x^4} = \frac{-x^4 - 2x}{x^4} = \frac{x(-x^3-2)}{x^4} = \\
&= \frac{-x^3-2}{x^3} \\
D_{f'} &= \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}
$$

Platí $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $-x^3 - 2 = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

$$
\begin{aligned}
-x^3 - 2 &= 0 \\
x^3 &= -2 \\
x &= \sqrt[3]{-2} \\
x &= -\sqrt[3]{2}
\end{aligned}
$$

Stacionárním bodem je $-\sqrt[3]{2}$ (viz věta 15). Dosazením do předpisu funkce $f(x)$ dostaneme y-ovou souřadnici, která je v bodě $-\sqrt[3]{2}$ rovna přibližně 1,89.

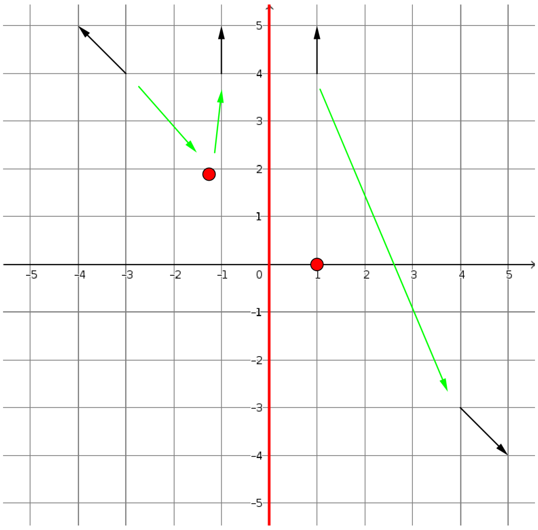


Obrázek 75: Stacionární bod

- Intervaly monotonie

	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	$(0, \infty)$
$-x^3 - 2$	$+$	$-$	$-$
x^3	$-$	$-$	$+$
$\frac{-x^3-2}{x^3}$	$-$	$+$	$-$
	klesající	rostoucí	klesající
	↘	↗	↘

Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ klesající, na intervalu $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ rostoucí a na intervalu $(0, \infty)$ klesající (viz věta 11).



Obrázek 76: Monotonie funkce $f(x)$

6. Druhá a třetí derivace:

- Inflexní body

Použité vzorce pro derivování
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

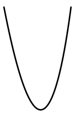
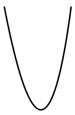
Tabulka viz věta 9.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-x^3-2}{x^3}\right)' = \frac{(-x^3-2)'x^3 - (-x^3-2)(x^3)'}{x^6} = \\ &= \frac{-3x^2 \cdot x^3 - (-x^3-2)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-3x^5 - (-3x^5 - 6x^2)}{x^6} = \\ &= \frac{-3x^5 + 3x^5 + 6x^2}{x^6} = \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4} \\ D_{f''} &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Platí $f''(x) = 0$ právě tehdy, když $6 = 0$. Tato rovnice nemá řešení.

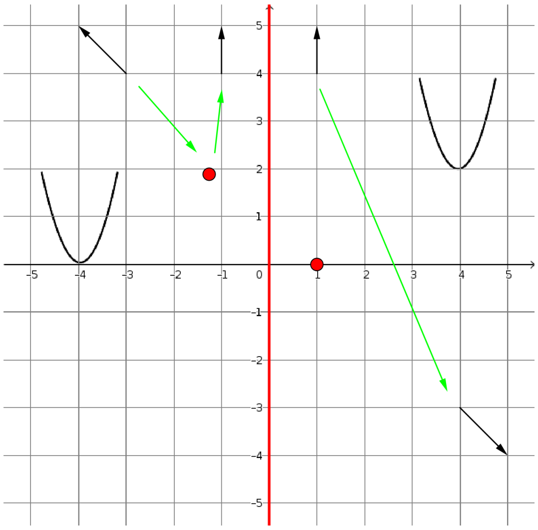
Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné x_0, pro které platí $f''(x_0) = 0$, tak nemá smysl řešit třetí derivaci (viz věta 18).

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
6	$+$	$+$
x^4	$+$	$+$
$\frac{6}{x^4}$	$+$	$+$
	konvexní 	konvexní 

Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ konvexní (viz věta 12).

Funkce $f(x)$ nemá inflexní bod, protože nemá bod, ve kterém se mění z funkce konkávní na konvexní (nebo naopak)(viz definice 17).



Obrázek 77: Konvexnost a konkávnost funkce $f(x)$

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum

  Protože $f''(-\sqrt[3]{2}) \doteq 2,38 > 0$, tak má funkce $f(x)$ v bodě $-\sqrt[3]{2}$ ostré lokální minimum (viz věta 16).

7. Asymptoty:

   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

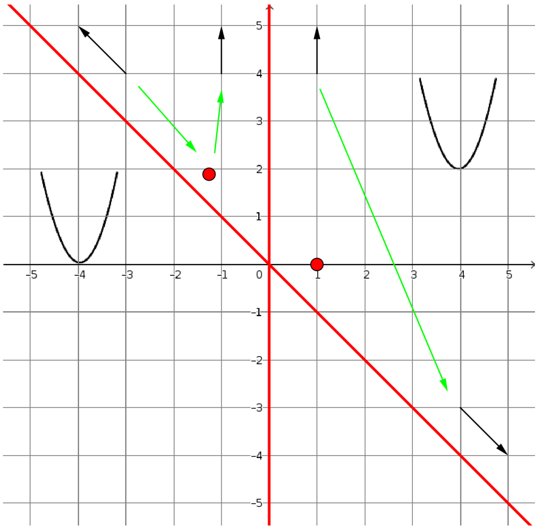
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1-x^3}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x^3}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x^3} - 1\right) = -1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1-x^3}{x^2} - (-x)\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1-x^3}{x^2} + x\right) =$$

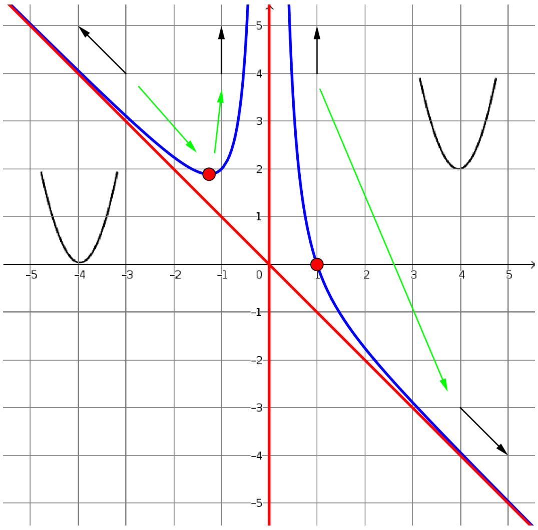
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x^3+x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

   Po dosazení do předpisu $y = ax + b$ získáme šikmou asymptotu $y = -x$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 78: Šikmá asymptota

8. Graf funkce $f(x)$:



Obrázek 79: Výsledná funkce $f(x)$

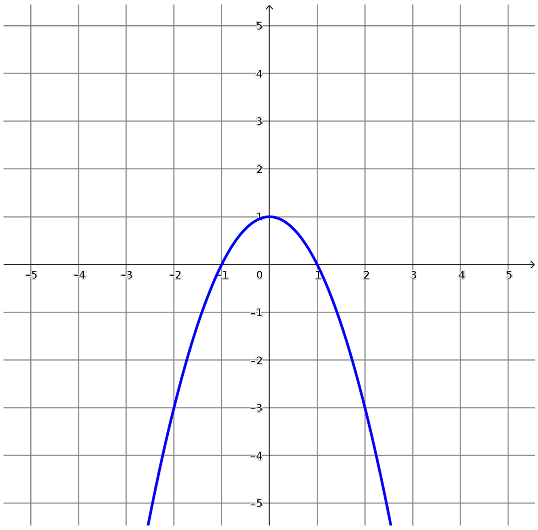
4 Úloha 4

4.1 Přístup vybírací

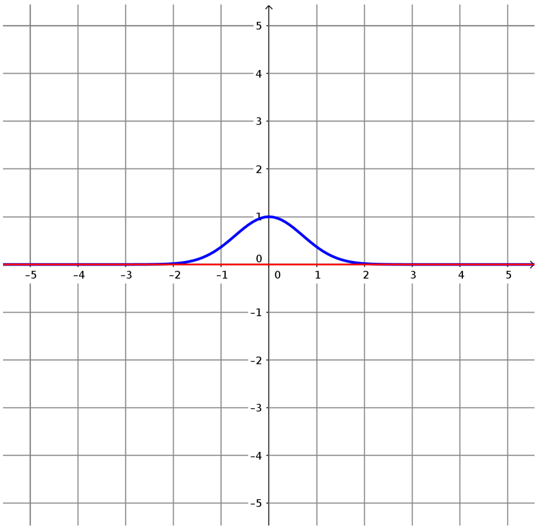
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

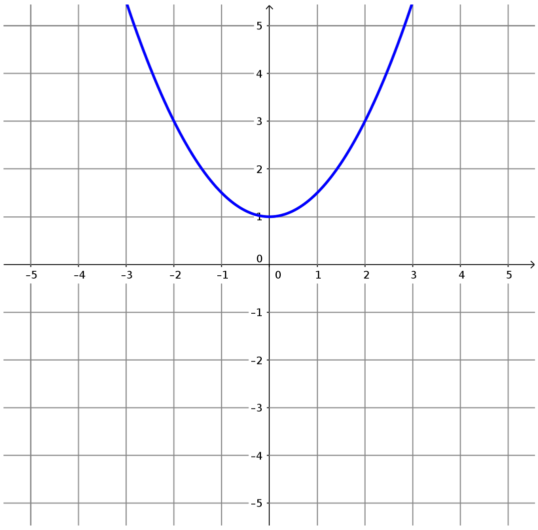
Na obrázcích jsou grafy 1–5, které jsou kandidáty na graf vyšetřované funkce. Postupnými výpočty zjistíme, že dané grafy nemusí odpovídat zjištěným vlastnostem, a proto je vyřadíme. Takto budeme pokračovat dokud nám nezbude graf výsledný.



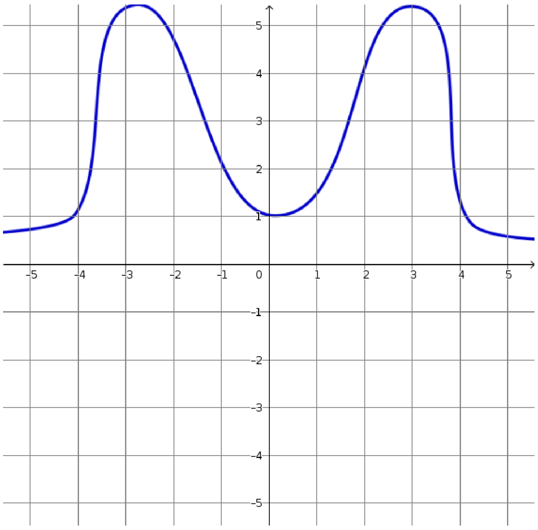
Obrázek 80: Funkce 1



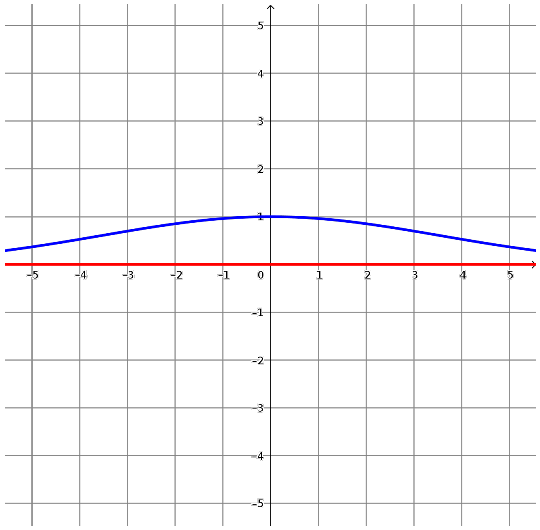
Obrázek 81: Funkce 2



Obrázek 82: Funkce 3



Obrázek 83: Funkce 4



Obrázek 84: Funkce 5

1. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}$$

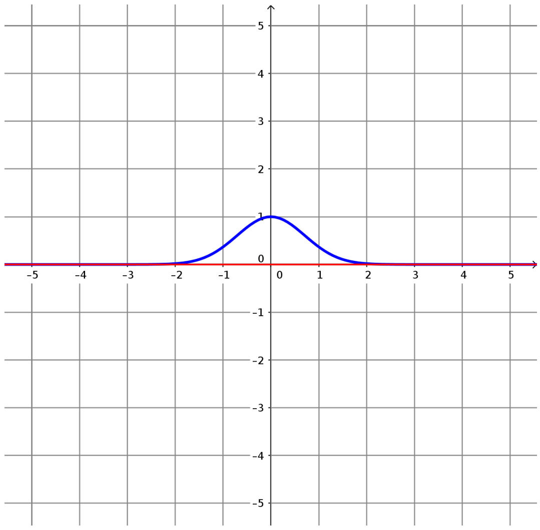
2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

   - Průsečík s osou y

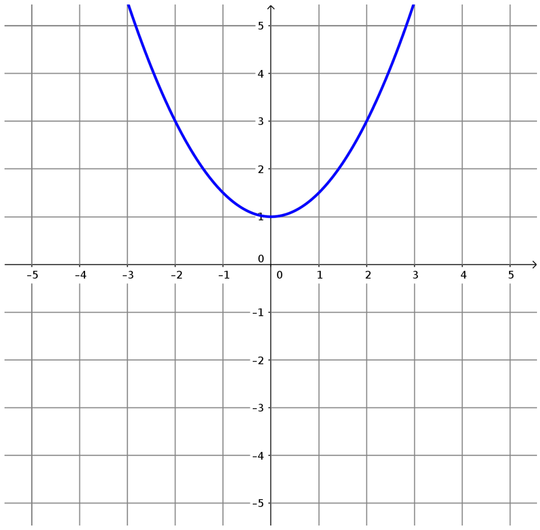
     $$y = e^0 = 1$$

     Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, 1]$.
   - Průsečík s osou x
     Funkce $f(x)$ nemá průsečík s osou x, protože rovnice $0 = e^{-x^2}$ nemá řešení.

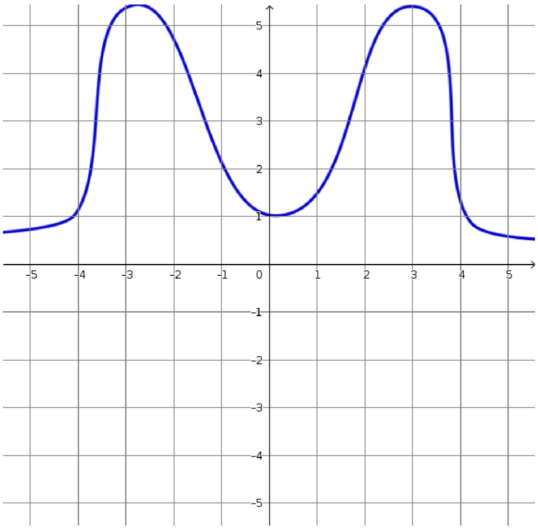
Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ nemá průsečík s osou x, tak vidíme, že Funkce 1 této vlastnosti neodpovídá, protože průsečíky s osou x má. Proto ji z navrhovaných funkcí vyřadíme.



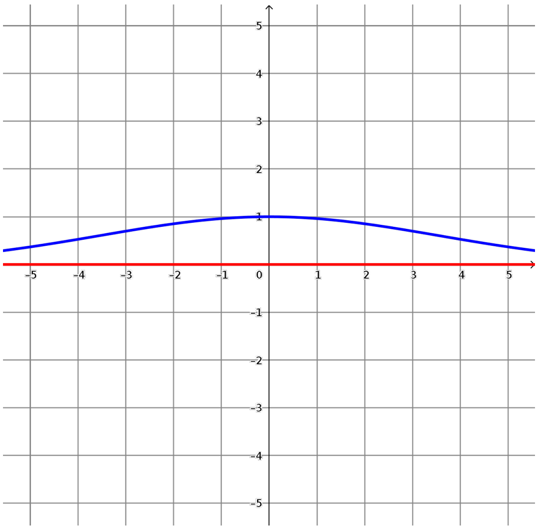
Obrázek 85: Funkce 2



Obrázek 86: Funkce 3



Obrázek 87: Funkce 4



Obrázek 88: Funkce 5

3. Lichost a sudost:

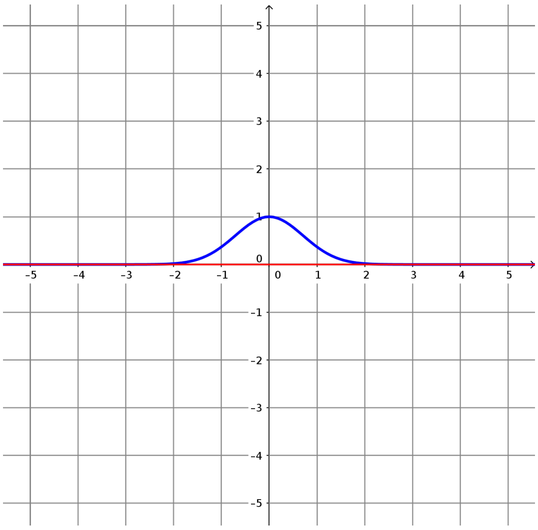
$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

Funkce $f(x)$ je sudá, tedy její graf je souměrný dle osy y (viz definice 2).

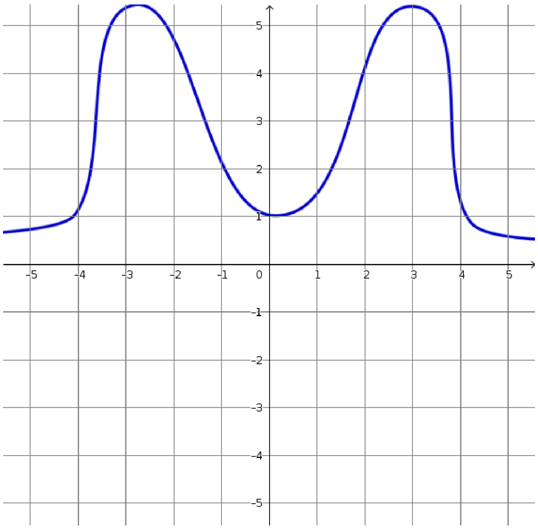
4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

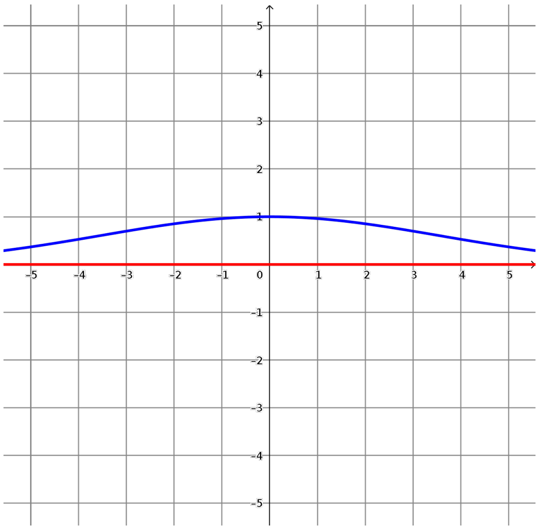
Vzhledem k tomu, že limita funkce $f(x)$ pro $x \to \pm\infty$ je rovna nule, tak vidíme, že Funkce 3 těmto vlastnostem neodpovídá, protože její limita pro $x \to \pm\infty$ je rovna nekonečnu. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 89: Funkce 2



Obrázek 90: Funkce 4



Obrázek 91: Funkce 5

5. První derivace:

   - Stacionární body

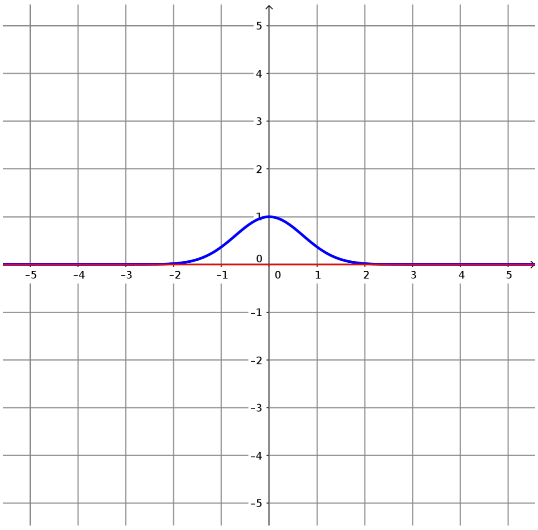
$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} \\ D_{f'} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2xe^{-x^2} = 0$$

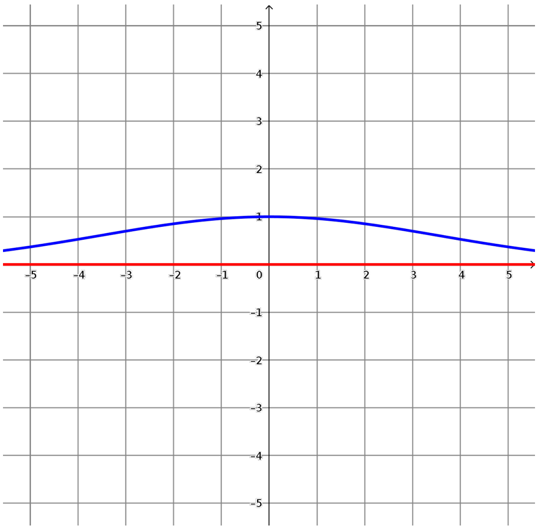
$$x = 0 \quad \text{nebo} \quad -2e^{-x^2} = 0$$

Funkce $f(x)$ má v bodě 0 stacionární bod (viz věta 15). Jeho souřadnice jsou $[0, 1]$. Rovnice $-2e^{-x^2} = 0$ nemá řešení.

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má jeden stacionární bod, tak vidíme, že Funkce 4, této vlastnosti neodpovídá, protože má více stacionárních bodů. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 92: Funkce 2



Obrázek 93: Funkce 5

- Intervaly monotonie

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$-2xe^{-x^2}$	$+$	$-$
	rostoucí	klesající

Tabulka viz věta 11.

6. Druhá a třetí derivace:

- Inflexní body

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x) \cdot (-2xe^{-x^2}) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$
$$D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$$
$$2x^2 - 1 = 0 \quad \text{nebo} \quad 2e^{-x^2} = 0$$
$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

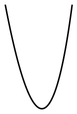
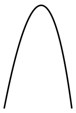
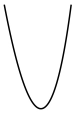
Rovnice $2e^{-x^2} = 0$ nemá řešení.

$$f'''(x) = 2 \cdot (-2xe^{-x^2})(2x^2 - 1) + 2e^{-x^2} \cdot 4x = -4xe^{-x^2}(2x^2 - 1) + 8xe^{-x^2} =$$
$$= -8x^3e^{-x^2} + 4xe^{-x^2} + 8xe^{-x^2} = -8x^3e^{-x^2} + 12xe^{-x^2} = 4xe^{-x^2}(3 - 2x^2)$$

$$f'''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \doteq 3,43 \quad \text{a} \quad f'''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \doteq -3,43$$

Protože je druhá derivace rovna 0 pro $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ a třetí derivace je v těchto bodech nenulová, tak v bodech $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ jsou inflexní body (viz věta 18). Jejich souřadnice jsou $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 0{,}61\right]$ a $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0{,}61\right]$ (y-ové souřadnice jsou zaokrouhlené).

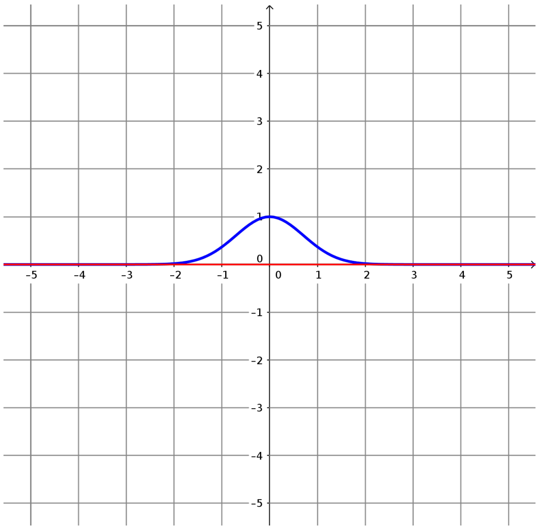
- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$
$2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$	$+$	$-$	$+$
	konvexní 	konkávní 	konvexní 

Tabulka viz věta 12.

Protože se v bodě $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ mění funkce $f(x)$ z konvexní na konkávní a v bodě $\frac{1}{\sqrt{2}}$ z konkávní na konvexní, tak jsou tyto body inflexní (viz definice 17).

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má inflexní body v bodech $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, tak vidíme, že Funkce 5 těmto vlastnostem neodpovídá, protože má inflexní body přibližně v bodech $\pm 3{,}5$. Proto ji z navrhovaných funkcí vyřadíme.



Obrázek 94: Funkce 2

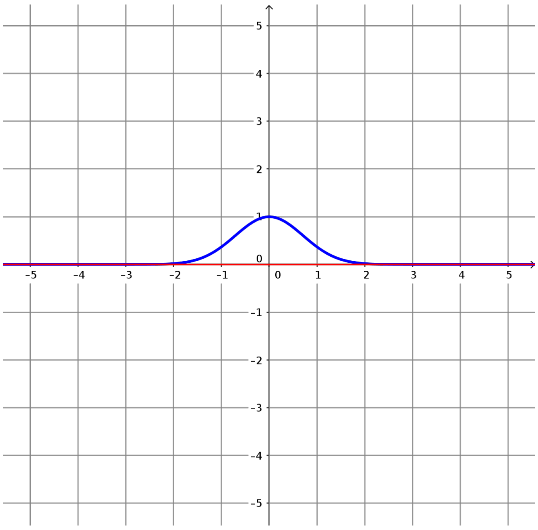
- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum
  Protože je $f''(0) = -2 < 0$, tak je v bodě 0 ostré lokální maximum (viz věta 16).

7. Asymptoty:

   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0 \\ b &= \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0 \end{aligned}$$

   Funkce $f(x)$ má vodorovnou asymptotu $y = 0$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 95: Funkce 2 - výsledný graf funkce $f(x)$

4.2 Přístup tvořivý

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

1. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}$$

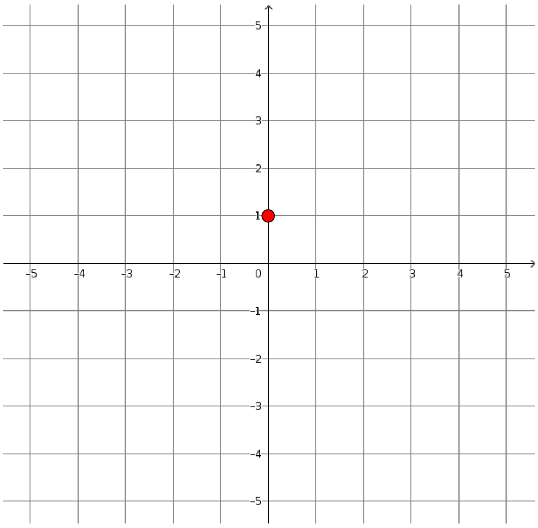
2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

   - Průsečík s osou y

   $$y = e^0 = 1$$

   Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, 1]$.

   - Průsečík s osou x
   Funkce $f(x)$ nemá průsečík s osou x, protože řešení rovnice $0 = e^{-x^2}$ neexistuje.



Obrázek 96: Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami

3. Lichost a sudost:

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

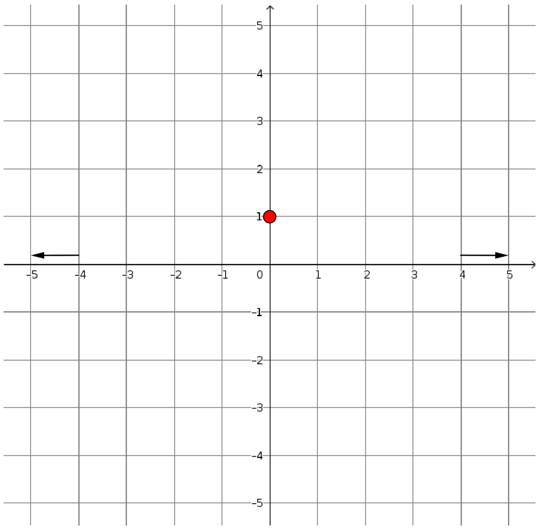
Funkce $f(x)$ je sudá, tedy její graf je souměrný dle osy y, protože $f(-x) = f(x)$ (viz definice 2).

4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

Co nám říkají:

- Pokud hodnota x roste do *nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce jde k 0.
- Pokud hodnota x jde do *mínus nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce jde k 0.



Obrázek 97: Chování funkce v krajních bodech definičního oboru

5. První derivace:

- Stacionární body

Použité vzorce pro derivování
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Tabulka viz věta 10.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-x^2})' = e^{-x^2}(-x^2)' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2} \\ D_{f'} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Platí $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $-2xe^{-x^2} = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

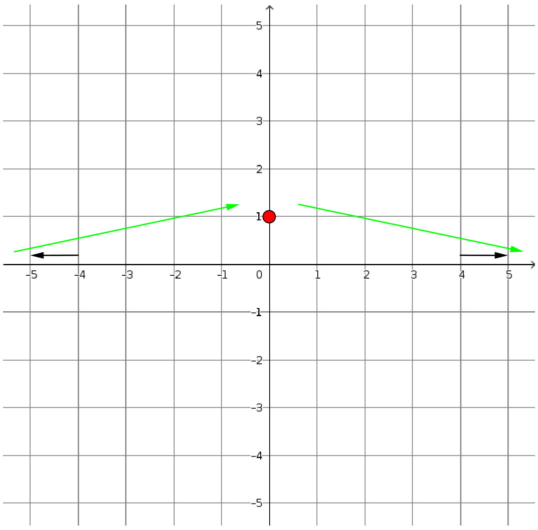
$$\begin{aligned} -2xe^{-x^2} &= 0 \\ -2x &= 0 \quad \text{nebo} \quad e^{-x^2} = 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Protože rovnice $e^{-x^2} = 0$ nemá řešení, je stacionárním bodem 0. Dosazením do předpisu funkce $f(x)$ dostaneme y-ovou souřadnici, která je v bodě 0 rovna 1 (viz věta 15).

- Intervaly monotonie

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$-2x$	$+$	$-$
e^{x^2}	$+$	$+$
$-2xe^{-x^2}$	$+$	$-$
	rostoucí	klesající
	↗	↘

Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, 0)$ rostoucí a na intervalu $(0, \infty)$ klesající (viz věta 11).



Obrázek 98: Monotonie funkce $f(x)$

6. Druhá a třetí derivace:

   - Inflexní body

Použité vzorce pro derivování
$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Tabulka viz věta 9 a 10.

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2xe^{-x^2})' = (-2x)'e^{-x^2} + (-2x)(e^{-x^2})' = -2e^{-x^2} - 2x(e^{-x^2}(-x^2)') = \\ &= -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \\ D_{f''} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Platí $f''(x) = 0$ právě tehdy, když $2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) &= 0 \\ 2x^2 - 1 &= 0 \quad \text{nebo} \quad 2e^{-x^2} = 0 \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Rovnice $2e^{-x^2} = 0$ nemá řešení.

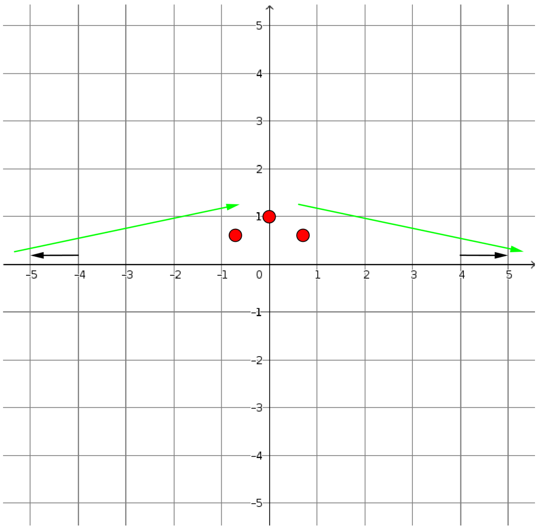
Použité vzorce pro derivování
$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Tabulka viz věta 9 a 10.

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (2e^{-x^2}(2x^2-1))' = (2e^{-x^2})'(2x^2-1) + 2e^{-x^2}(2x^2-1)' = \\ &= 2(e^{-x^2}(-x^2)')(2x^2-1) + 2e^{-x^2} \cdot 4x = 2e^{-x^2}(-2x)(2x^2-1) + 8xe^{-x^2} = \\ &= -4xe^{-x^2}(2x^2-1) + 8xe^{-x^2} = 4xe^{-x^2}(-(2x^2-1)+2) = \\ &= 4xe^{-x^2}(-2x^2+1+2) = 4xe^{-x^2}(3-2x^2) \end{aligned}$$

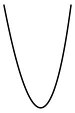
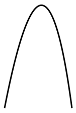
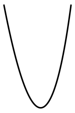
$$f'''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \doteq 3,43 \quad \text{a} \quad f'''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \doteq -3,43$$

Protože je druhá derivace rovna 0 pro $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ a třetí derivace je nenulová, tak v bodech $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ jsou inflexní body. Dosazením do předpisu funkce dostáváme y-ové souřadnice. Pro oba body $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ je to přibližně 0,61 (viz věta 118).

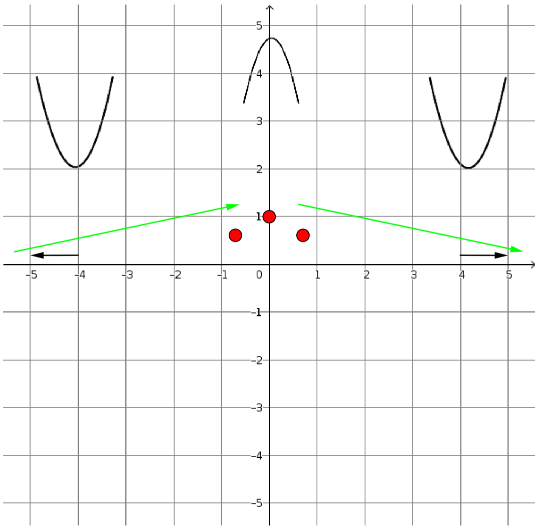


Obrázek 99: Inflexní body

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$
$2e^{-x^2}$	$+$	$+$	$+$
$2x^2-1$	$+$	$-$	$+$
$2e^{-x^2}(2x^2-1)$	$+$	$-$	$+$
	konvexní 	konkávní 	konvexní 

Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ konvexní, na intervalu $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ konkávní a na intervalu $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$ konvexní (viz věta 12).
Protože se v bodě $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ mění funkce $f(x)$ z konvexní na konkávní a v bodě $\frac{1}{\sqrt{2}}$ z konkávní na konvexní, jsou v bodech $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ inflexní body (viz definice 18).



Obrázek 100: Konvexnost a konkávnost funkce $f(x)$

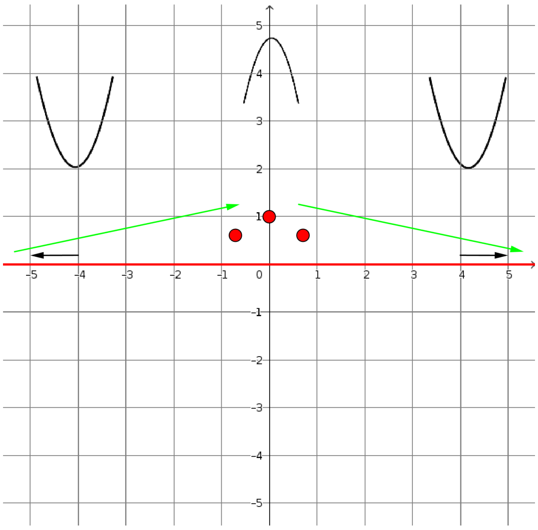
- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum
  Protože je $f''(0) = -2 < 0$, tak je v bodě 0 ostré lokální maximum (viz věta 16).

7. Asymptoty

   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

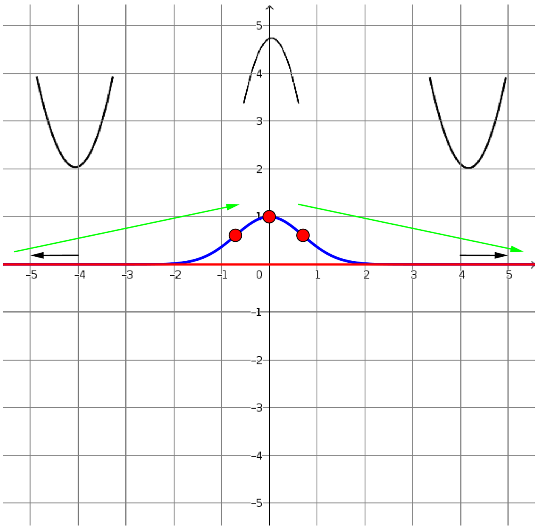
$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0$$
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \pm\infty} (e^{-x^2} - 0 \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$$

   Vzhledem k tomu, že $a = 0$ a $b = 0$, funkce $f(x)$ má vodorovnou asymptotu $y = 0$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 101: Vodorovná asymptota $y = 0$

8. Graf funkce $f(x)$:



Obrázek 102: Výsledná funkce $f(x)$

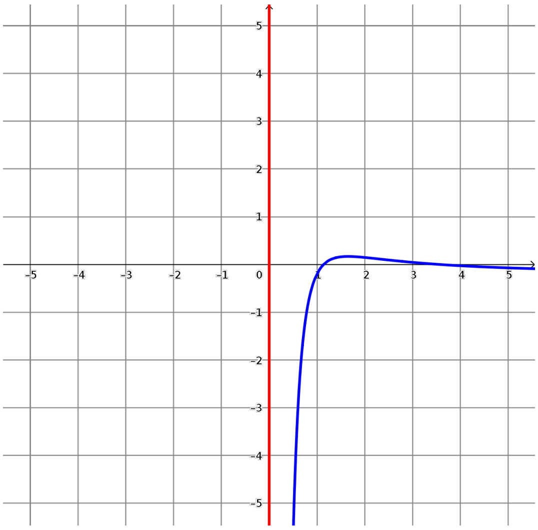
5 Úloha 5

5.1 Přístup vybírací

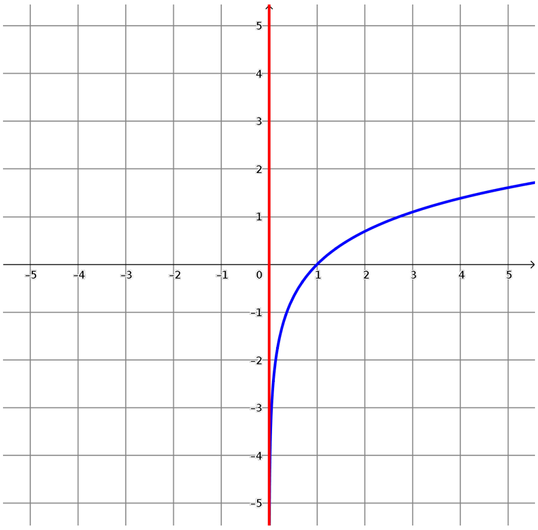
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}\cdot$$

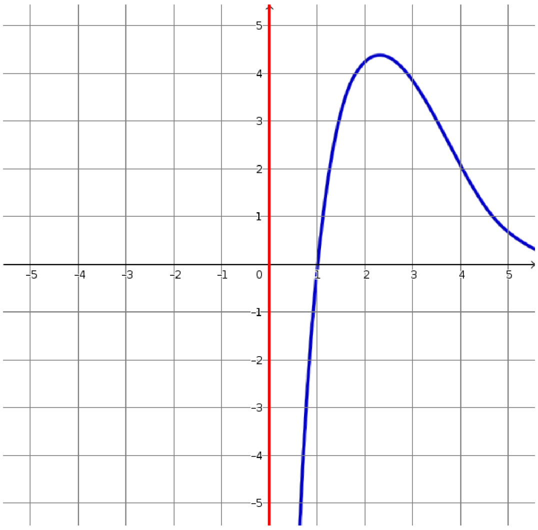
Na obrázcích jsou grafy funkcí 1–6, které jsou kandidáty na graf vyšetřované funkce. Postupnými výpočty zjistíme, že dané grafy nemusí odpovídat zjištěným vlastnostem, a proto je vyřadíme. Takto budeme pokračovat dokud nám nezbude graf výsledný.



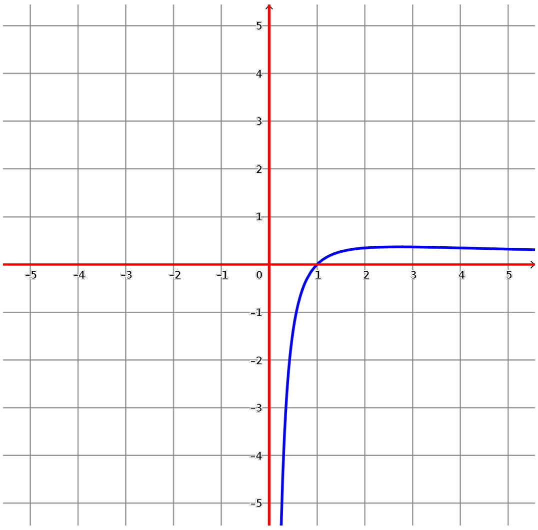
Obrázek 103: Funkce 1



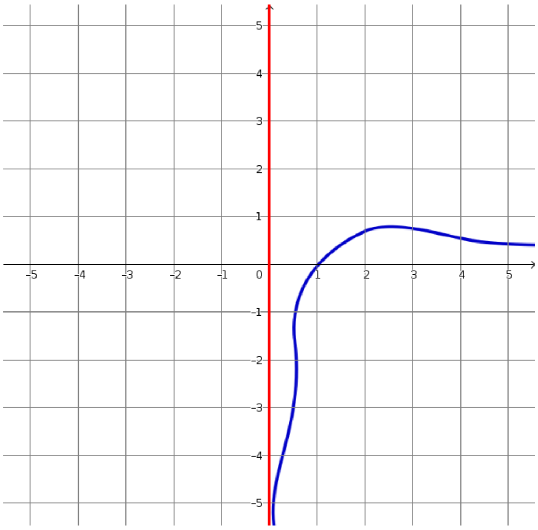
Obrázek 104: Funkce 2



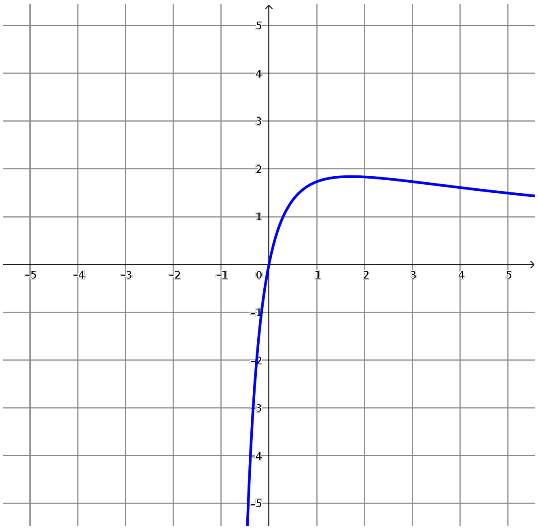
Obrázek 105: Funkce 3



Obrázek 106: Funkce 4



Obrázek 107: Funkce 5

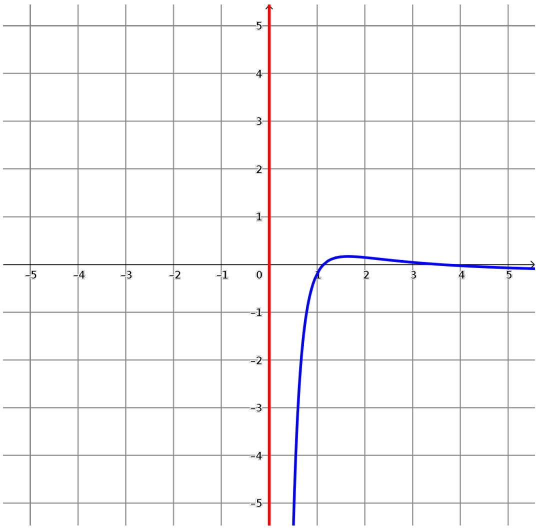


Obrázek 108: Funkce 6

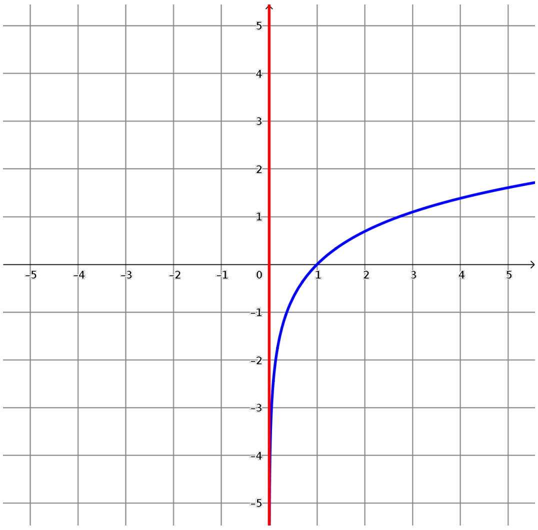
1. Definiční obor:

$$D_f = (0, \infty)$$

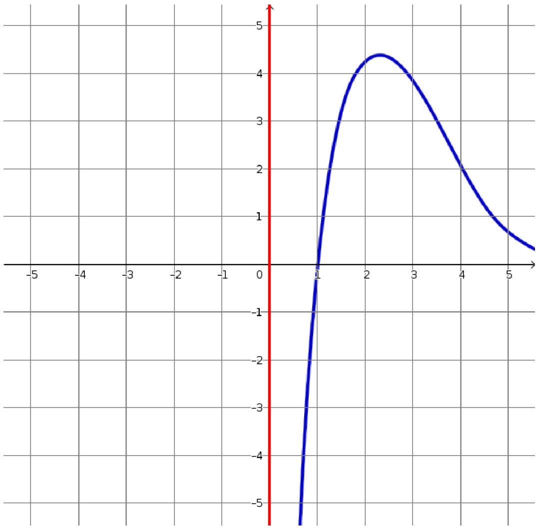
Vzhledem k tomu, že definiční obor funkce $f(x)$ je $(0, \infty)$ tak vidíme, že Funkce 6 této vlastnosti neodpovídá, protože její definiční obor jsou všechna reálná čísla, proto ji z navrhovaných funkcí vyřadíme.



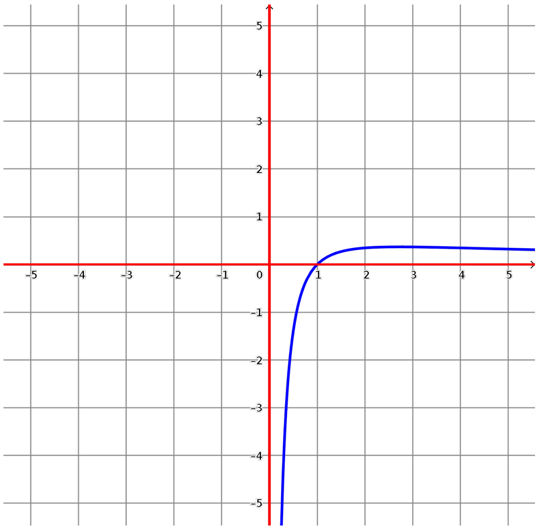
Obrázek 109: Funkce 1



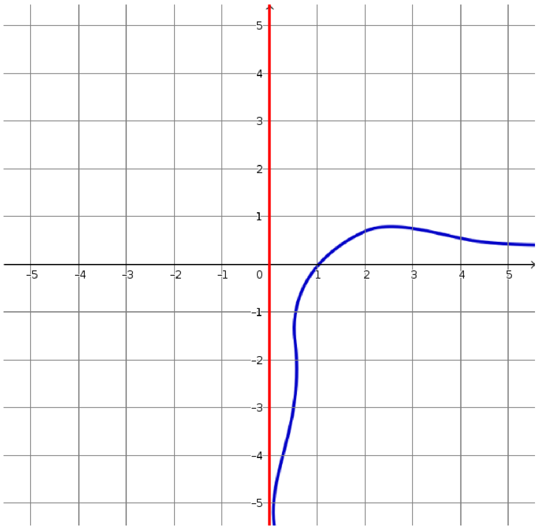
Obrázek 110: Funkce 2



Obrázek 111: Funkce 3



Obrázek 112: Funkce 4



Obrázek 113: Funkce 5

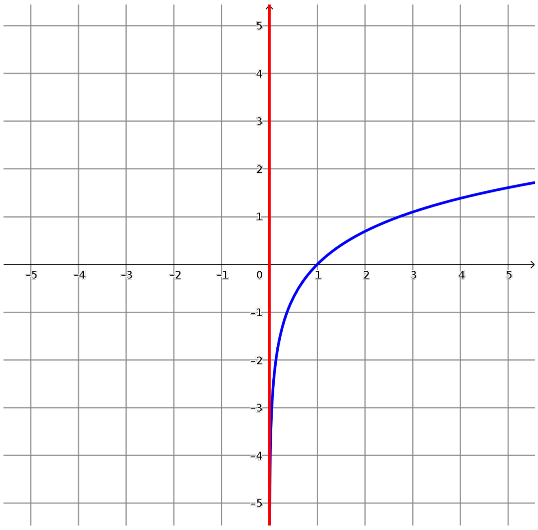
2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

- Průsečík s osou y
  Funkce $f(x)$ nemá průsečík s osou y, protože $x \neq 0$.
- Průsečík s osou x

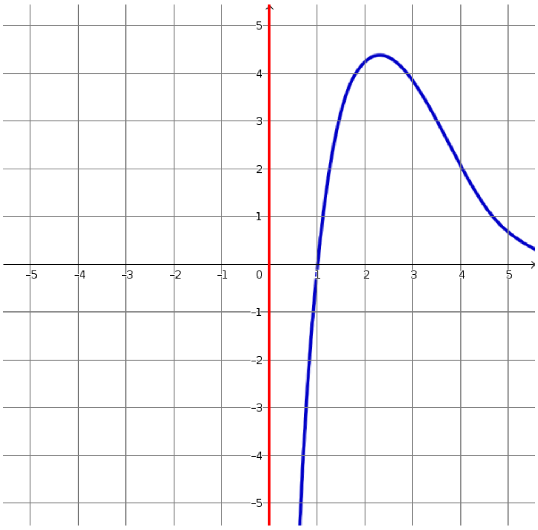
$$\begin{aligned} 0 = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \ln x &= 0 \\ e^{\ln x} &= e^0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou x jsou $[1, 0]$.

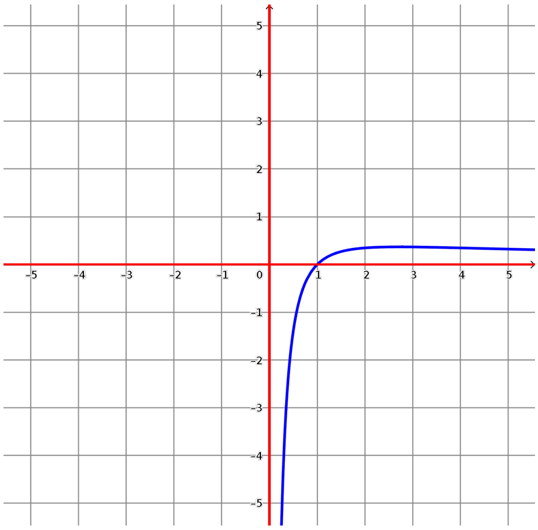
Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má jeden průsečík s osou x, tak vidíme, že Funkce 1 této vlastnosti neodpovídá, protože má s osou x průsečíků více. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



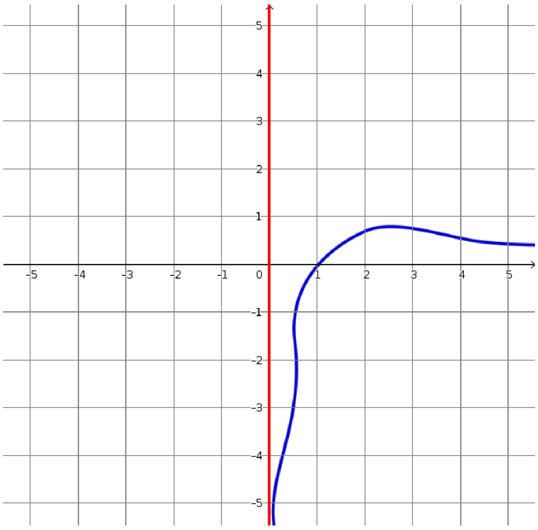
Obrázek 114: Funkce 2



Obrázek 115: Funkce 3



Obrázek 116: Funkce 4



Obrázek 117: Funkce 5

3. Lichost a sudost:

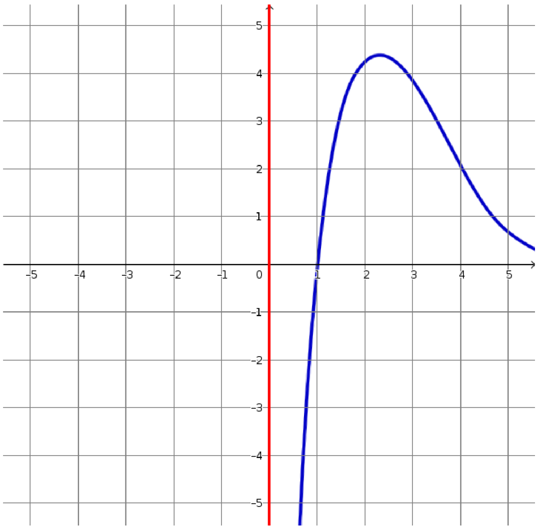
   U funkce $f(x) = \ln x$ nemá smysl tuto vlastnost řešit, protože definice mimo jiné vyžaduje, aby pro všechna x z definičního oboru funkce leželo v definičním oboru i $-x$, což u této funkce neplatí (viz definice 3 a 2).

4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

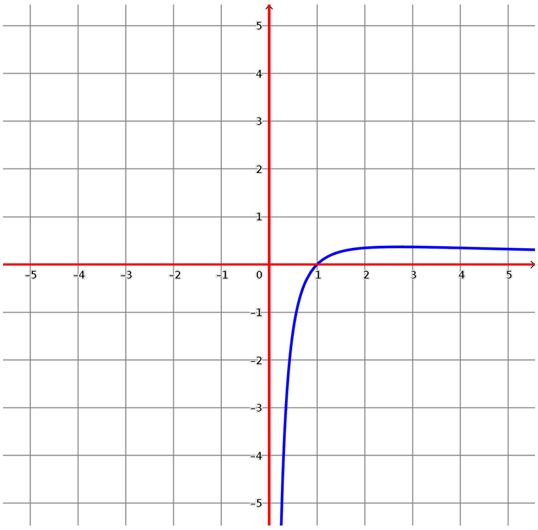
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+} \ln x \cdot \frac{1}{x} = [-\infty \cdot \infty] = -\infty$$

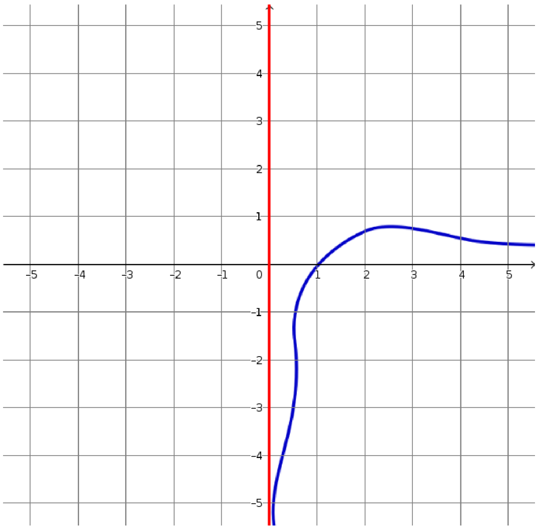
   Vzhledem k tomu, že limita funkce $f(x)$ pro $x \to \infty$ je rovna 0, tak vidíme, že Funkce 2 této vlastnosti neodpovídá, protože její limita pro $x \to \infty$ je rovna nekonečnu, proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 118: Funkce 3



Obrázek 119: Funkce 4



Obrázek 120: Funkce 5

5. První derivace:

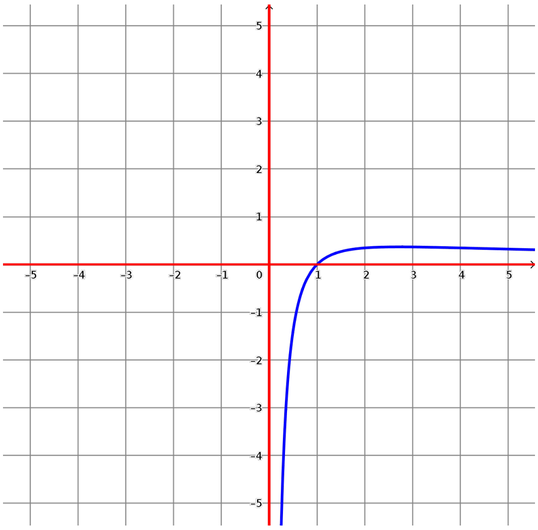
- Stacionární body

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$
$$D_{f'} = (0, \infty)$$

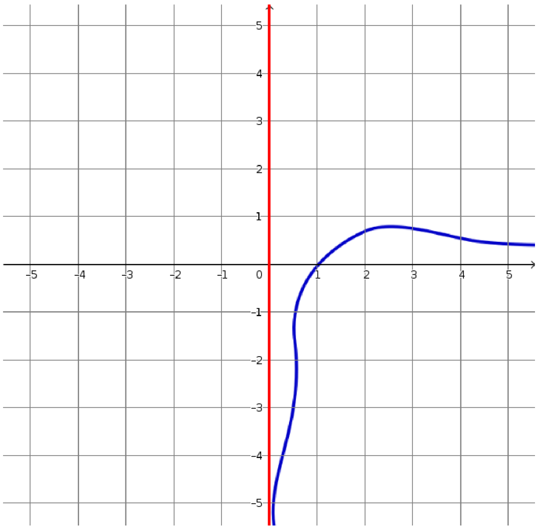
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x &= 0 \\ \ln x &= 1 \\ e^{\ln x} &= e^1 \\ x &= e \end{aligned}$$

V bodě e je stacionární bod (viz věta 15). Jeho souřadnice jsou $\left[e, \frac{1}{e}\right]$.

Vzhledem k tomu, že y-ová souřadnice bodu e je $\frac{1}{e}$, tak vidíme, že Funkce 3 této vlastnosti neodpovídá. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 121: Funkce 4



Obrázek 122: Funkce 5

- Intervaly monotonie

	$(0,e)$	(e,∞)
$\frac{1-\ln x}{x^2}$	$+$	$-$
	rostoucí	klesající

Tabulka viz věta 11.

6. Druhá, třetí derivace:

- Inflexní body

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4} = \frac{-3x+2x\ln x}{x^4} =$$

$$= \frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$$D_{f''} = (0,\infty)$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3+2\ln x &= 0 \\ 2\ln x &= 3 \\ \ln x &= \frac{3}{2} \\ e^{\ln x} &= e^{3/2} \\ x &= e^{3/2} \end{aligned}$$

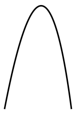
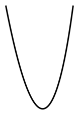
$$f'''(x) = \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3 - (-3+2\ln x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^2+9x^2-6x^2\ln x}{x^6} =$$

$$= \frac{11x^2-6x^2\ln x}{x^6} = \frac{11-6\ln x}{x^4}$$

$$f'''(e^{3/2}) \doteq 0,005$$

Protože je druhá derivace rovna 0 pro $x = e^{3/2}$ a třetí derivace v tomto bodě je nenulová, tak je v bodě $e^{3/2}$ inflexní bod. Jeho souřadnice jsou $[e^{3/2}; 0{,}33]$ (y-ová souřadnice je zaokrouhlená).

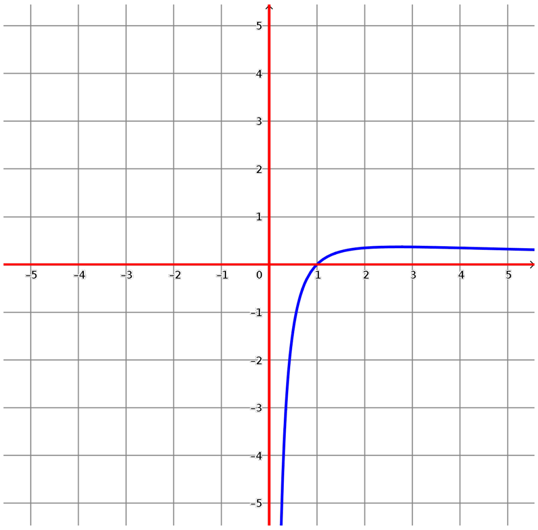
- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(0, e^{3/2})$	$(e^{3/2}, \infty)$
$\frac{-3+2\ln x}{x^3}$	$-$	$+$
	konkávní 	konvexní 

Tabulka viz věta 12.

Protože se v bodě $e^{3/2}$ mění funkce z konkávní na konvexní, tak je tento bod inflexní (viz definice 17).

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má jeden inflexní bod, tak vidíme, že Funkce 5 této vlastnosti neodpovídá, protože jich má více, proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 123: Funkce 4

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum

  Protože je $f''(e) = -0{,}05 < 0$, tak je v bodě e ostré lokální maximum (viz věta 16).

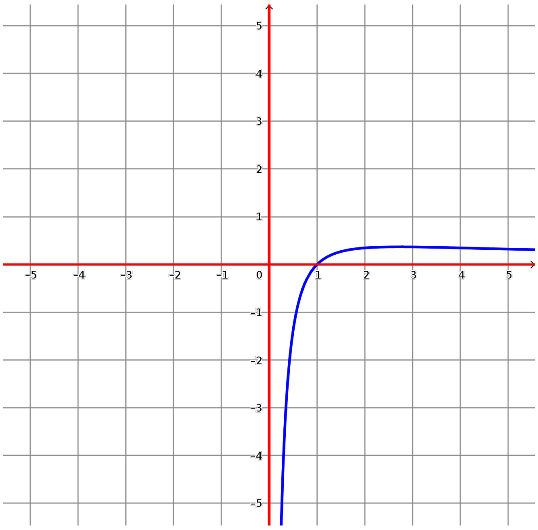
7. Asymptoty:

   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

   Funkce $f(x)$ má vodorovnou asymptotu $y = 0$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 124: Funkce 4 - výsledná funkce $f(x)$

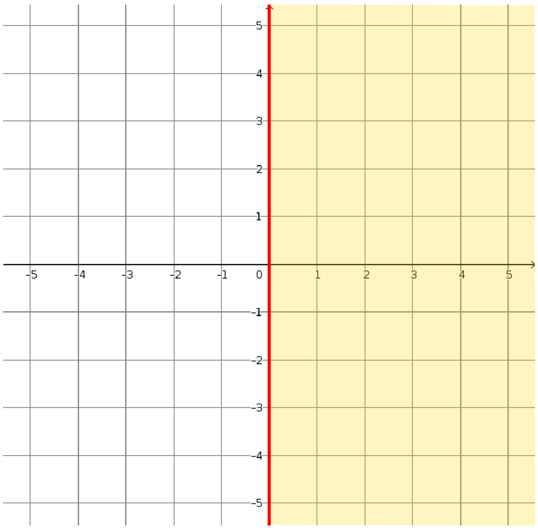
5.2 Přístup tvořivý

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

1. Definiční obor funkce $f(x)$:

   $D_f = (0, \infty)$



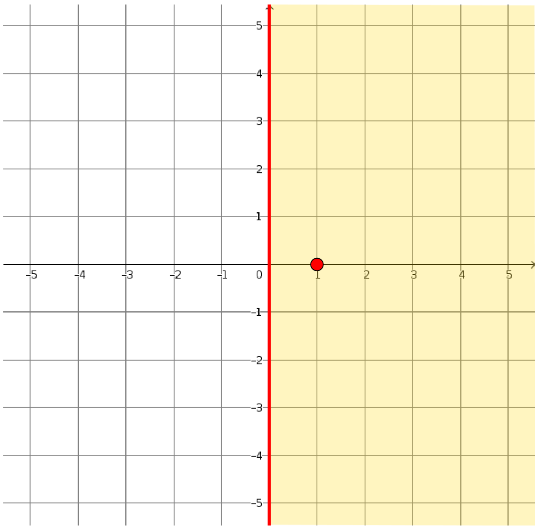
Obrázek 125: Definiční obor funkce $f(x)$

2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

   - Průsečík s osou y
     Funkce $f(x)$ nemá průsečík s osou y, protože $x \neq 0$.
   - Průsečík s osou x

$$0 = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \ln x = 0$$
$$e^{\ln x} = e^0$$
$$x = 1$$

   Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou x jsou $[1, 0]$.



Obrázek 126: Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami

3. Lichost a sudost:

   U funkce $f(x) = \ln x$ nemá smysl tuto vlastnost řešit, protože definice mimo jiné vyžaduje, aby pro všechna x z definičního oboru funkce, leželo v definičním oboru i $-x$, což u této funkce neplatí (viz definice 3 a 2).

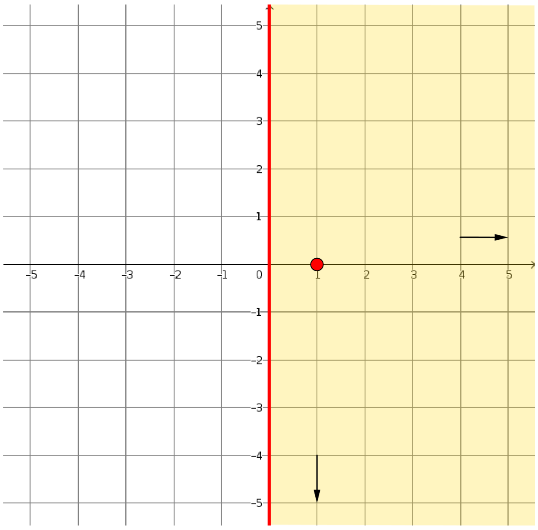
4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \frac{1}{x} = [-\infty \cdot \infty] = -\infty$$

Co nám říkají:

- Pokud hodnota x roste do *nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce jde k 0.
- Pokud hodnota x jde k 0 *zprava*, tak **funkční hodnota** této funkce jde do *mínus nekonečna*.



Obrázek 127: Chování funkce v krajních bodech definičního oboru

5. První derivace:

- Stacionární body

Použité vzorce pro derivování
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

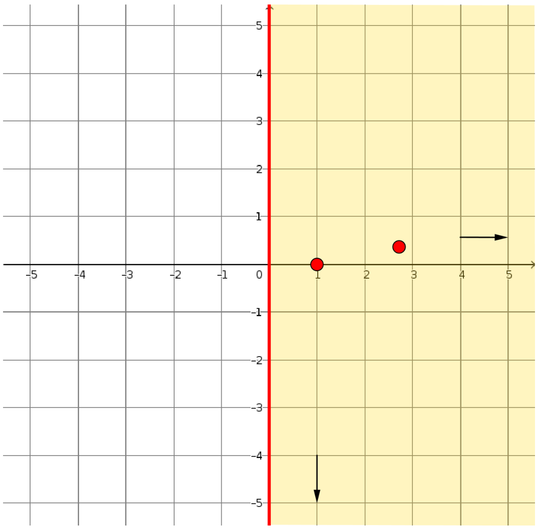
Tabulka viz věta 9.

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Platí $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $1 - \ln x = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} 1 - \ln x &= 0 \\ \ln x &= 1 \\ e^{\ln x} &= e^1 \\ x &= e \end{aligned}$$

Stacionárním bodem je e (viz věta 15). Dosazením do předpisu funkce $f(x)$ dostaneme y-ovou souřadnici, která je v bodě e rovna $\frac{1}{e}$.

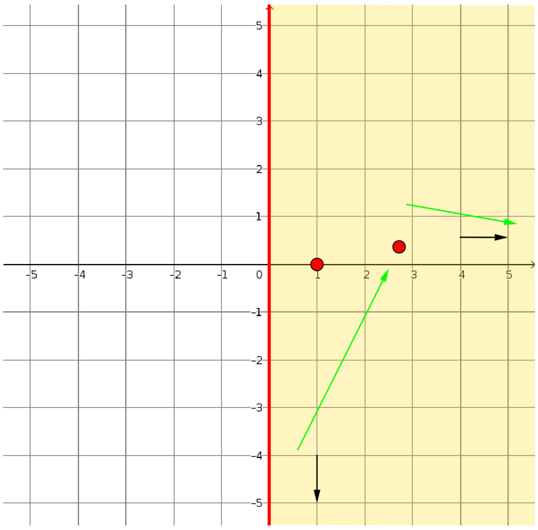


Obrázek 128: Stacionární bod

- Intervaly monotonie

	$(0, e)$	(e, ∞)
$1 - \ln x$	$+$	$-$
x^2	$+$	$+$
$\frac{1-\ln x}{x^2}$	rostoucí	klesající
	$\nearrow$	$\searrow$

Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(0, e)$ rostoucí a na intervalu (e, ∞) klesající (viz věta 11).



Obrázek 129: Monotonie funkce $f(x)$

6. Druhá, třetí derivace:

- Inflexní body

Použité vzorce pro derivování
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Tabulka viz věta 9.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1-\ln x)'x^2 - (1-\ln x)(x^2)'}{x^4} = \\
&= \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x-(2x-2x\ln x)}{x^4} = \frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4} = \\
&= \frac{-3x+2x\ln x}{x^4} = \frac{x(-3+2\ln x)}{x^4} = \frac{-3+2\ln x}{x^3} \\
D_{f''} &= (0,\infty)
\end{aligned}$$

Platí $f''(x) = 0$ právě tehdy, když $-3+2\ln x = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned}
-3+2\ln x &= 0 \\
2\ln x &= 3 \\
\ln x &= \frac{3}{2} \\
e^{\ln x} &= e^{\frac{3}{2}} \\
x &= e^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

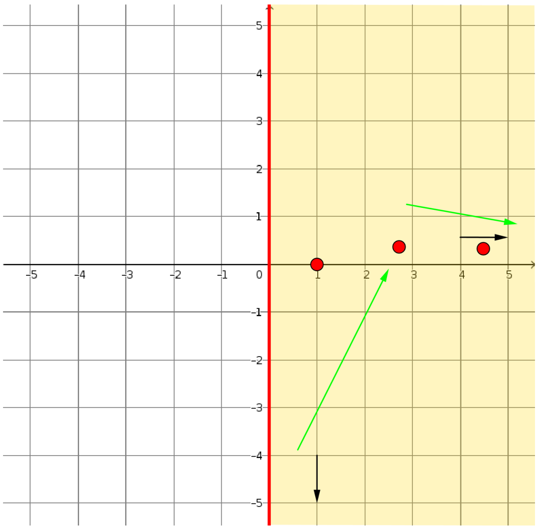
Použité vzorce pro derivování
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Tabulka viz věta 9.

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= \left(\frac{-3+2\ln x}{x^3}\right)' = \frac{(-3+2\ln x)'x^3 - (-3+2\ln x)(x^3)'}{x^6} = \\
&= \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3 - (-3+2\ln x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^2-(-9x^2+6x^2\ln x)}{x^6} = \\
&= \frac{2x^2+9x^2-6x^2\ln x}{x^6} = \frac{11x^2-6x^2\ln x}{x^6} = \frac{x^2(11-6\ln x)}{x^6} = \frac{11-6\ln x}{x^4}
\end{aligned}$$

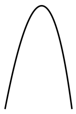
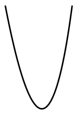
$$f'''(e^{\frac{3}{2}}) \doteq 0{,}005$$

Protože je druhá derivace rovna 0 pro $x = e^{\frac{3}{2}}$ a třetí derivace je v tomto bodě nenulová, tak je v bodě $e^{\frac{3}{2}}$ inflexní bod. Dosazením do předpisu funkce $f(x)$ dostaneme y-ovou souřadnici, která je přibližně 0,33 (viz věta 18).



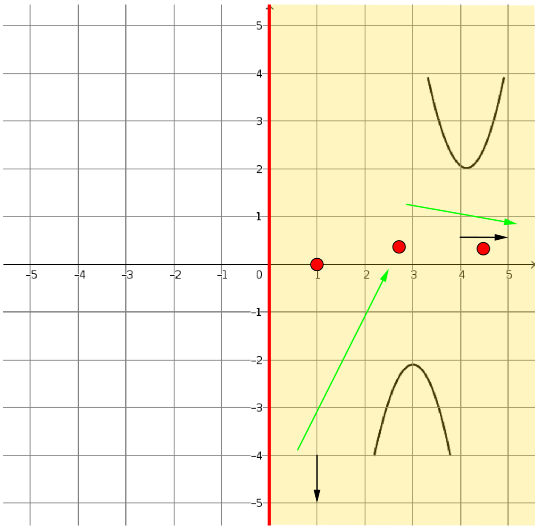
Obrázek 130: Inflexní bod

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(0, e^{\frac{3}{2}})$	$(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$
$-3 + 2\ln x$	$-$	$+$
x^3	$+$	$+$
$\frac{-3+2\ln x}{x^3}$	$-$	$+$
	konkávní 	konvexní 

Dle této tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(0, e^{3/2})$ konkávní a na intervalu $(e^{3/2}, \infty)$ konvexní (viz věta 12).

Dále vidíme, že v se v bodě $e^{\frac{3}{2}}$ mění funkce $f(x)$ s konkávní na konvexní, a proto je v tomto bodě inflexní bod (viz definice 17).



Obrázek 131: Konvexnost a konkávnost funkce $f(x)$

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum
  Protože je $f''(e) \doteq -0.05 < 0$, tak je v bodě e ostré lokální maximum (viz věta 16).

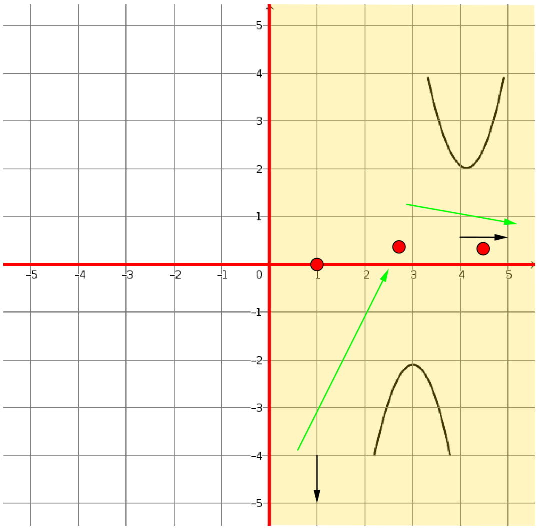
7. Asymptoty:

Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

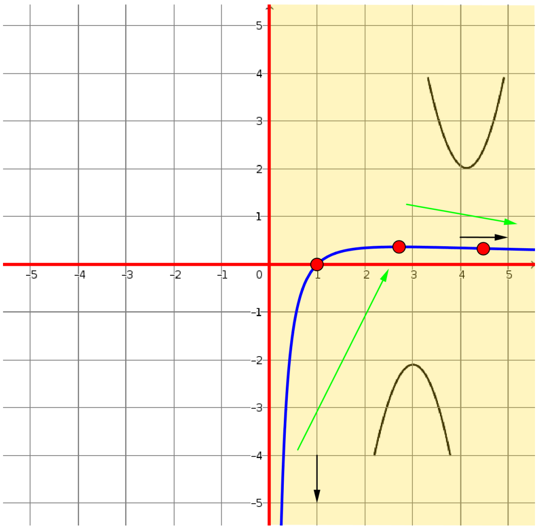
$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 0x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Vzhledem k tomu, že $a = 0$ a $b = 0$, funkce $f(x)$ má vodorovnou asymptotu $y = 0$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 132: Vodorovná asymptota $y = 0$

8. Graf funkce $f(x)$:



Obrázek 133: Výsledný graf funkce $f(x)$

Následující úloha u vybíracího přístupu nebude řešena ve stejném duchu jako do teď. Graf výsledné funkce nebude v hlavním výběru, objeví se v pravý čas.

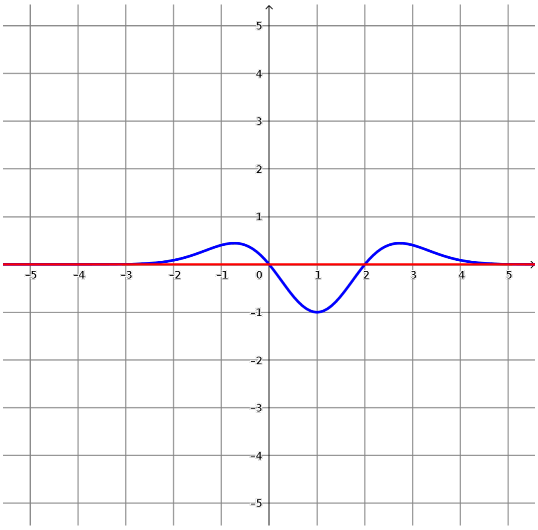
6 Úloha 6

6.1 Přístup vybírací

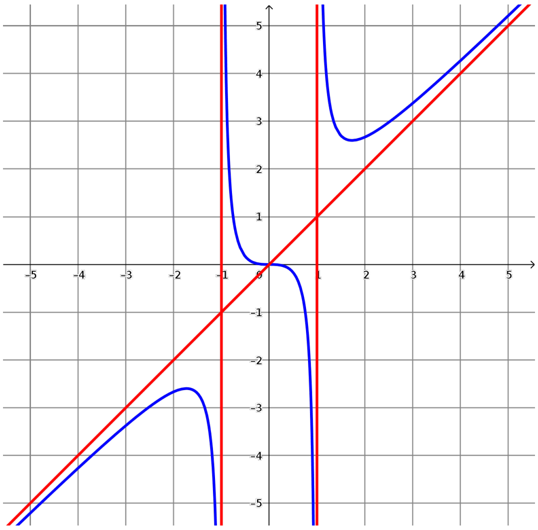
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

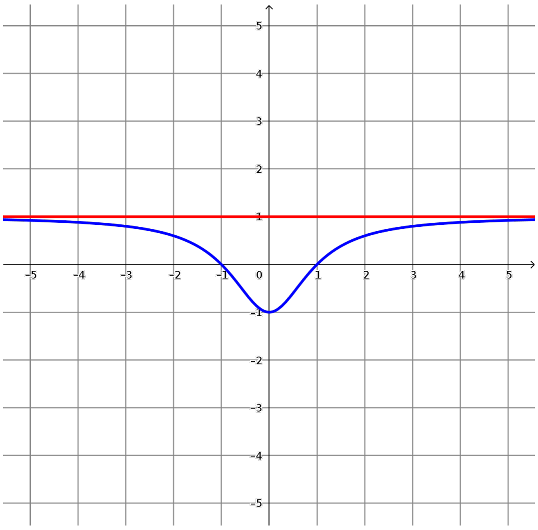
Na obrázcích jsou grafy funkcí 1–5, které jsou kandidáty na graf vyšetřované funkce. Postupnými výpočty zjistíme, že dané grafy nemusí odpovídat zjištěným vlastnostem, a proto je vyřadíme. Takto budeme pokračovat dokud nám nezbude graf výsledný.



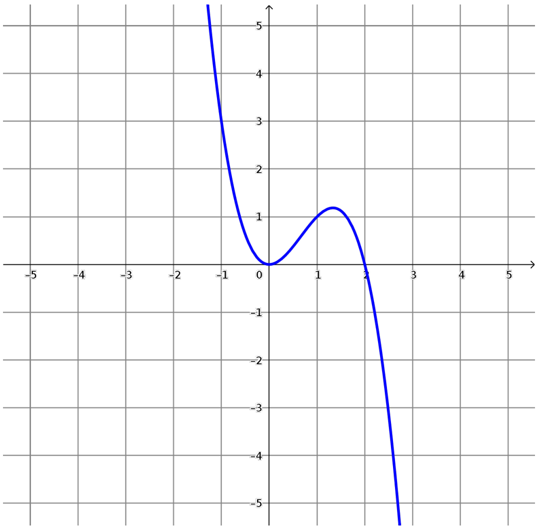
Obrázek 134: Funkce 1



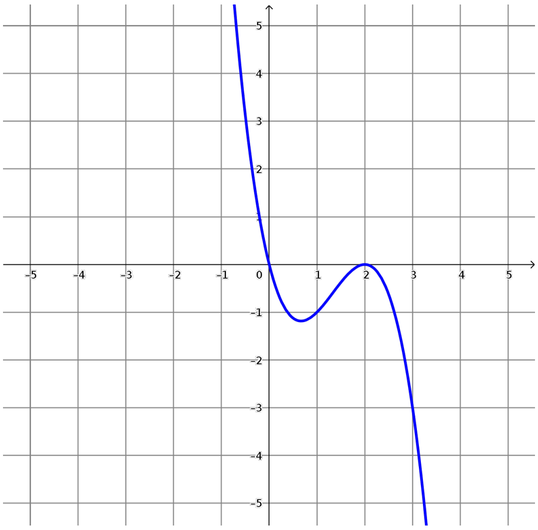
Obrázek 135: Funkce 2



Obrázek 136: Funkce 3



Obrázek 137: Funkce 4

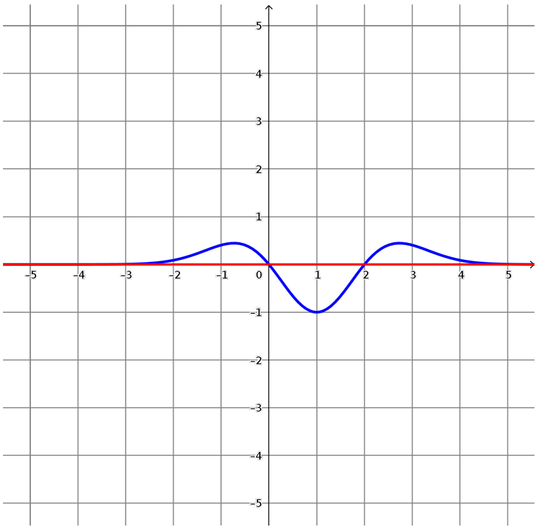


Obrázek 138: Funkce 5

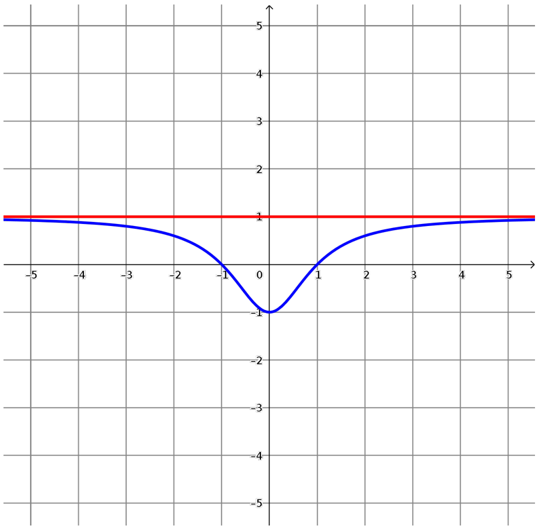
1. Definiční obor:

   $$D_f = \mathbb{R}$$

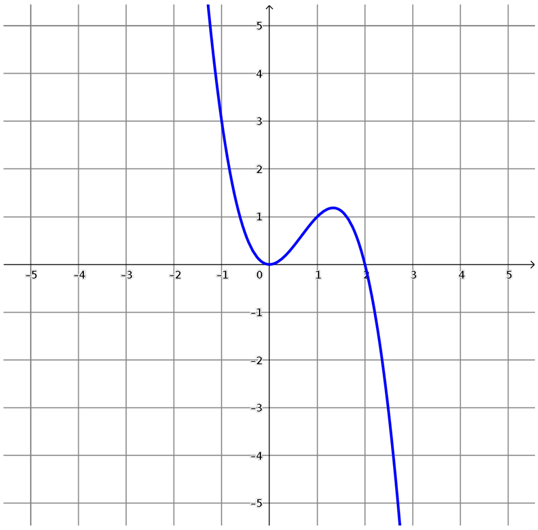
   Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má definiční obor všechna reálná čísla, tak vidíme, že Funkce 2 této vlastnosti neodpovídá, protože její definiční obor je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Proto ji z navrhovaných funkcí vyřádíme.



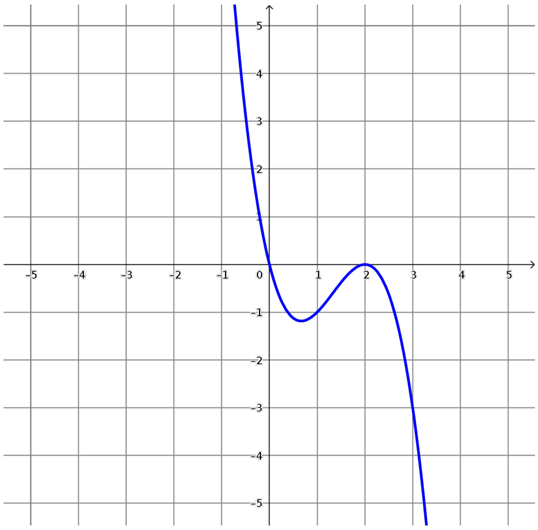
Obrázek 139: Funkce 1



Obrázek 140: Funkce 3



Obrázek 141: Funkce 4



Obrázek 142: Funkce 5

2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

- Průsečík s osou x

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt[3]{2x^2 - x^3} \\ 0 &= 2x^2 - x^3 \\ 0 &= x^2(2 - x) \\ x^2 &= 0 \qquad \text{nebo} \qquad 2 - x = 0 \\ x &= 0 \qquad \text{nebo} \qquad x = 2 \end{aligned}$$

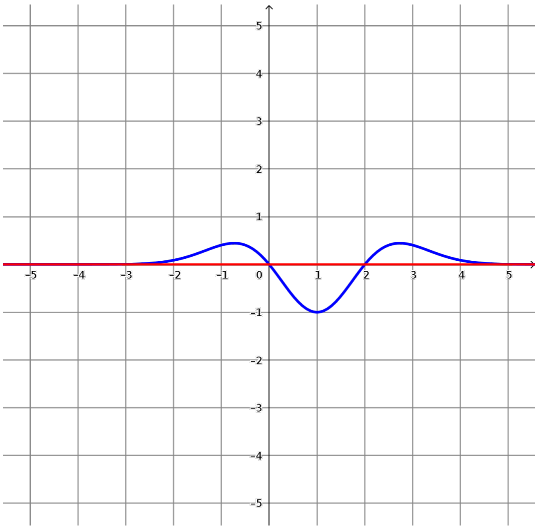
  Souřadnice průsečíků funkce $f(x)$ s osou x jsou $[0, 0]$ a $[2, 0]$.

- Průsečík s osou y

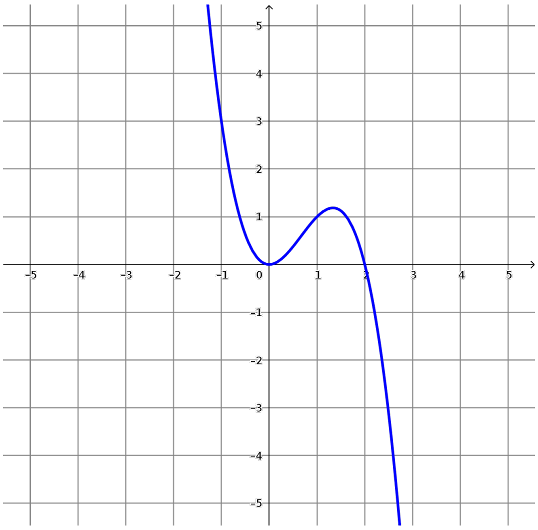
$$y = \sqrt[3]{2 \cdot 0^2 - 0^3} = 0$$

  Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, 0]$.

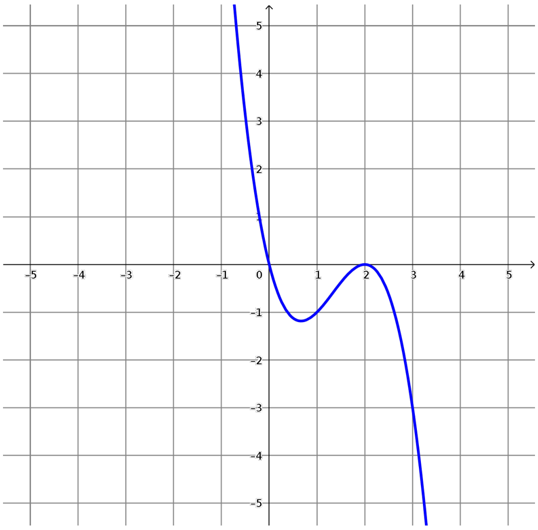
Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má dva průsečíky se souřadnicovými osami, tak vidíme, že Funkce 3 těmto vlastnostem neodpovídá, protože jich má více. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 143: Funkce 1



Obrázek 144: Funkce 4



Obrázek 145: Funkce 5

3. Sudost a lichost:

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = \sqrt[3]{2(-x)^2 - (-x)^3} = \sqrt[3]{2x^2 + x^3}$$

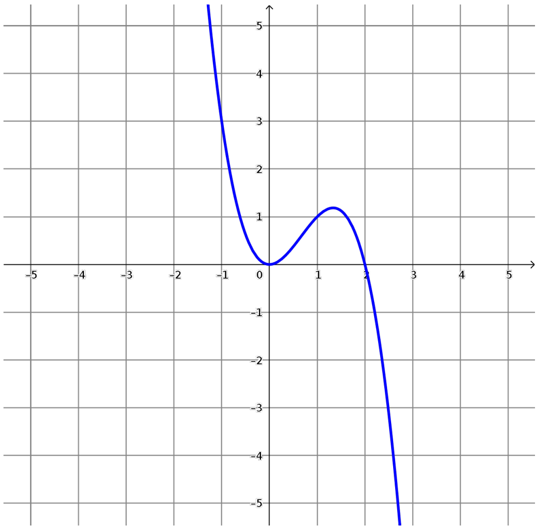
   Funkce $f(x)$ není sudá ani lichá (viz definice 2 a 3).

4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

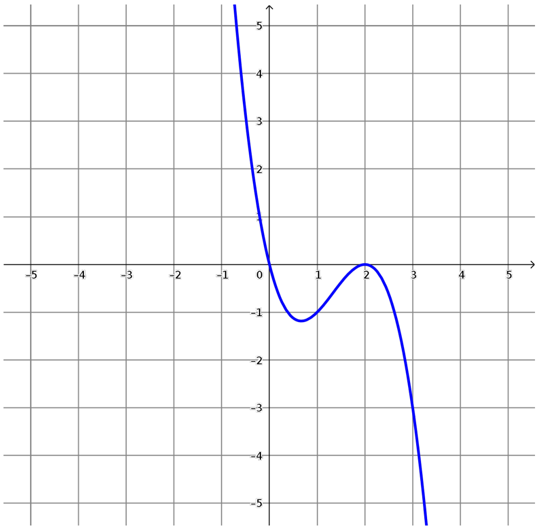
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)} = \lim_{x\to\infty} x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)} = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = \infty$$

   Vzhledem k tomu, že limita funkce $f(x)$ pro $x \to \infty$ je rovna mínus nekonečnu a pro $x \to -\infty$ rovna nekonečnu, tak vidíme, že Funkce 1 těmto vlastnostem neodpovídá, protože její limita pro $x \to \pm\infty$ je rovna 0. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 146: Funkce 4



Obrázek 147: Funkce 5

5. První derivace:

   - Stacionární body

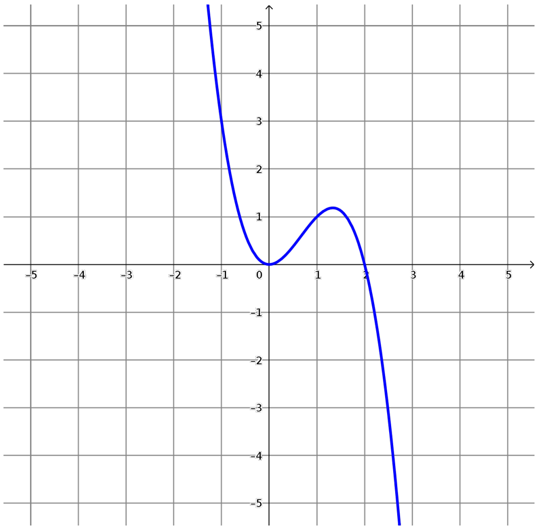
$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}}(4x - 3x^2) = \frac{4x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}} = \frac{x(4 - 3x)}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(4 - 3x) &= 0 \\ 4 - 3x &= 0 \quad \text{nebo} \quad x = 0 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

V bodě $\frac{4}{3}$ je stacionární bod (viz věta 15). Jeho souřadnice jsou $[\frac{4}{3}; 1{,}06]$ (y-ová souřadnice je zaokrouhlená). Bod 0 nemůže být stacionárním bodem, protože v něm derivace neexistuje.

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má stacionární bod ve $\frac{4}{3}$, tak vidíme, že Funkce 5 této vlastnosti neodpovídá, protože má stacionární bod ve $\frac{2}{3}$ a 0. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 148: Funkce 4

- Intervaly monotonie

	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, 2)$	$(2, \infty)$
$\frac{x(4-3x)}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}}$	$-$	$+$	$-$	$-$
	klesající	rostoucí	klesající	klesající

Tabulka viz věta 11.

6. Druhá a třetí derivace:

- Inflexní body

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{(4-6x)(2x^2-x^3)^{\frac{2}{3}} - (4x-3x^2)\cdot\frac{2}{3}(2x^2-x^3)^{\frac{-1}{3}}(4x-3x^2)}{(2x^2-x^3)^{\frac{4}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{3(4-6x)(2x^2-x^3)-2(4x-3x^2)^2}{3(2x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}}}{(2x^2-x^3)^{\frac{4}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{3(8x^2-4x^3-12x^3+6x^4)-2(16x^2-24x^3+9x^4)}{9(2x^2-x^3)^{\frac{5}{3}}} =$$

$$= \frac{24x^2-48x^3+18x^4-32x^2+48x^3-18x^4}{9(2x^2-x^3)^{\frac{5}{3}}} =$$

$$= \frac{-8x^2}{9\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}}$$

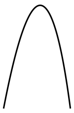
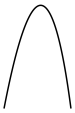
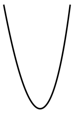
$$D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -8x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné x_0, pro které platí $f''(x_0) = 0$ (v bodě 0 druhá derivace neexistuje), tak nemá smysl řešit třetí derivaci (viz věta 18).

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$\frac{-8x^2}{9\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}}$	$-$	$-$	$+$
	konkávní 	konkávní 	konvexní 

Tabulka viz věta 12.

V bodě 2 se funkce $f(x)$ mění z konkávní na konvexní, a proto je tento bod inflexní (viz definice 17).

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, 0)$ a $(0, 2)$ konkávní, tak vidíme, že Funkce 4 těmto vlastnostem neodpovídá, protože je konvexní na intervalu $(-\infty, \frac{4}{3})$ a konkávní na intervalu $(\frac{4}{3}, \infty)$. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme. Tato funkce záměrně nebyla vyřazena už po výpočtu stacionárních bodů, kvůli možnosti, že v bodě 0 může být lokální extrém.

Protože jsme právě vyřadili z výběru i poslední funkci, tak se ve výpočtu musíme vrátit, abychom zjistili, kde jsme udělali chybu. Přesněji, vrátíme se k první derivaci.

Definiční obor první derivace nám vyšel následovně:

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

To znamená, že první derivace v bodech 0 a 2 neexistuje, ale přesto musíme zjistit, jak se funkce $f(x)$ chová v okolí těchto bodů. Využijeme výpočtu jednostranných derivací.

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{-x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x}-1\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{\frac{2}{x}-1} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{-x} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x}-1\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{2}{x}-1} = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{-x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = NEEXISTUJE \end{aligned}$$

Výpočtem jednostranných derivací jsme zjistili, že pokud se blížíme k 0 zleva, je tečnou zleva grafu funkce $f(x)$ osa y a funkce $f(x)$ tam klesá a pokud se blížíme k 0 zprava, je tečna zprava grafu funkce $f(x)$ také osa y, ale funkce $f(x)$ tam roste.

Pomocí definic pro lokální extrémy (viz definice 13 a 14) zjistíme, jestli je v bodě 0 lokální minimum či maximum.

Musíme najít takové prstencové okolí $P(x_0)$, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je splněna nerovnost $f(x_0) \leq f(x)$ nebo $f(x_0) \geq f(x)$.

Pokud zvolíme $\varepsilon = 2$, získáme prstencové okolí

$$P(x_0) = (0-2,0) \cup (0,0+2) = (-2,0) \cup (0,2).$$

Platí, že $f(x_0) = f(0) = 0$. Pro všechna x z intervalu $(-2,0)$ je $f(x) > 0$ kvůli členu $-x^3$, který v tomto intervalu bude vždy kladný (př.: $-(-1)^3 = 1$).

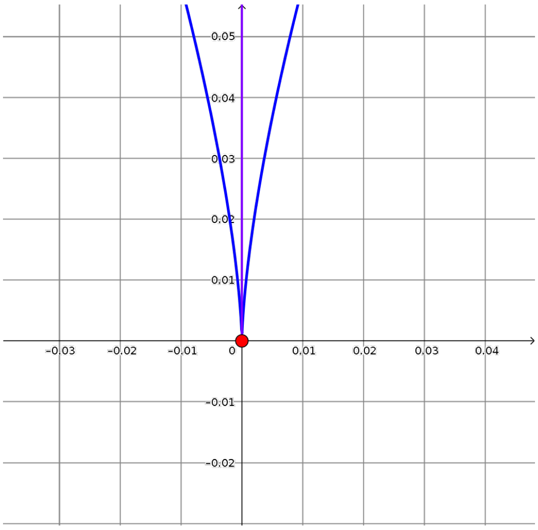
V intervalu $(0,2)$ bude také platit pro všechna x nerovnost $f(x) > 0$. Když se řešená funkce upraví na tvar

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(2-x)},$$

lze vidět, že pro hodnotu x z intervalu $(0,2)$ bude $(2-x)$ vždy větší než nula.

To znamená, že v tomto intervalu bude $f(x) > 0$.

Protože jsme našli prstencové okolí $P(x_0)$, pro které platí vztah $f(x_0) < f(x)$ můžeme říci, že v $x_0 = 0$ je ostré lokální minimum (tento extrém se do grafu zakreslí jako tzv.hrot, protože v bodě 0 derivace neexistuje).



Obrázek 149: Chování funkce $f(x)$ v okolí bodu 0

Počítejme jednostranné derivace funkce $f(x)$ v bodě 2.

$$\begin{aligned}
f'_-(2) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{f(2)-f(x)}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} = \\
&= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{-\frac{1}{3}(2x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}(4x-3x^2)}{-1} = \\
&= \lim_{x\to 2^-} \frac{4x-3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty \\
f'_+(2) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{f(2)-f(x)}{2-x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} = \\
&= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{-\frac{1}{3}(2x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}(4x-3x^2)}{-1} = \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty \\
f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(2)-f(x)}{2-x} = \lim_{x\to 2} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} = \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = NEEXISTUJE
\end{aligned}$$

Výpočtem jednostranných derivací jsme zjistili, že pokud se blížíme k 2 zleva, je tečnou zleva grafu funkce $f(x)$ přímka rovnoběžná s osou y a funkce $f(x)$ tam klesá. Pokud se blížíme k 2 zprava, je tečna zprava grafu funkce $f(x)$ také přímka rovnoběžná s osou y, funkce $f(x)$ tam také klesá.

Pomocí definic pro lokální extrémy (viz definice 13 a 14) zjistíme, zda je v bodě 2 lokální minimum či maximum.

Musíme najít takové prstencové okolí $P(x_0)$, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je splněna nerovnost $f(x_0) \leq f(x)$ nebo $f(x_0) \geq f(x)$.

Pokud zvolíme $\varepsilon = 2$, máme prstencové okolí

$$P(x_0) = (2-2, 2) \cup (2, 2+2) = (0, 2) \cup (2, 4).$$

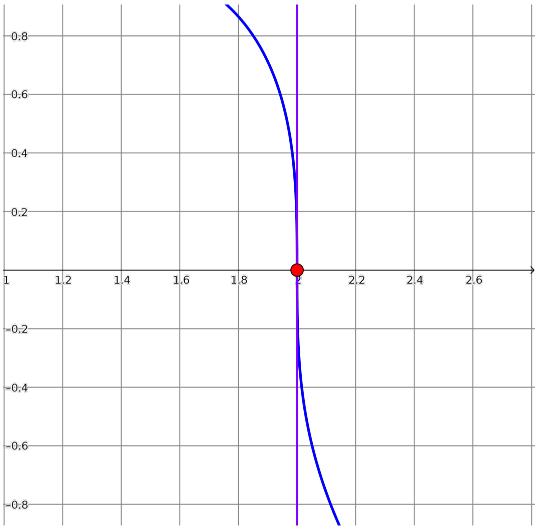
Platí, že $f(x_0) = f(2) = 0$. V intervalu $(0, 2)$ platí nerovnost $f(x) > 0$ jak je uvedeno u důkazu pro číslo 0.

Pro všechna $x > 2$ platí nerovnost $f(x) < 0$. Když se řešená funkce upraví na tvar

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(2-x)},$$

lze vidět, že pro hodnotu x z intervalu $(2, 4)$ bude $(2-x)$ vždy menší než nula, a to bude platit i pro interval $(2, \infty)$.

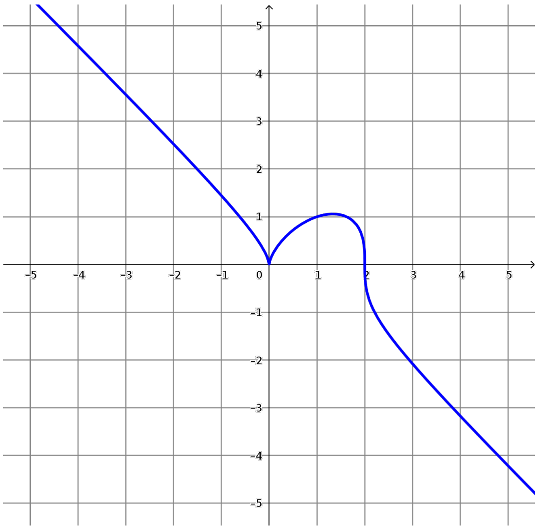
Protože na intervalu $(0, 2)$ je $f(x) > f(x_0)$ a na intervalu $(2, \infty)$ bude $f(x) < f(x_0)$, není v $x_0 = 2$ lokální extrém.



Obrázek 150: Chování funkce $f(x)$ v okolí bodu 2

Když vezmeme v potaz nové informace o okolí bodu 0 tedy, že je v tomto bodě ostré lokální minimum, funkce se v levém a pravém okolí blíží ke kladné části osy y, na intervalu $(-\infty, 0)$ i $(0, 2)$ je funkce $f(x)$ konkávní a hlavně, že první derivace v tomto bodě neexistuje (graf má tzv. hrot), můžeme upravit chování grafu funkce $f(x)$ v okolí bodu 0. A pokud zohledníme informace o okolí bodu 2 tedy, že je tento bod inflexní, funkce se v levém a pravém okolí blíží k přímce rovnoběžné s osou y, na intervalu $(0, 2)$ je funkce $f(x)$ konkávní a na intervalu $(2, 0)$ je konvexní, můžeme upravit chování grafu funkce $f(x)$ v okolí bodu 2.

Takto vypadá funkce $f(x)$ po úpravě.



Obrázek 151: Funkce 6

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum

  Protože je $f''(\frac{4}{3}) = -1{,}2 < 0$, tak má funkce $f(x)$ v bodě $\frac{4}{3}$ ostré lokální maximum (viz věta 16).

Ještě je nutné zjistit, jestli funkce $f(x)$ nemá nějaké asymptoty.

7. Asymptoty:

   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = -1$$

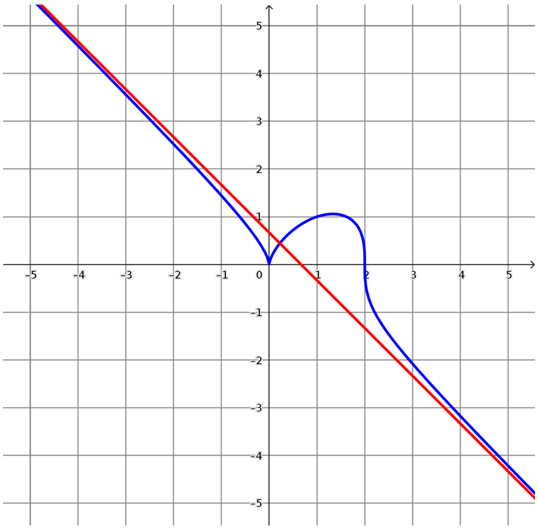
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1}{x^{-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} - 1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2(-x^{-2})}{-x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x} - 1\right)^2}} = \frac{2}{3}$$

Funkce $f(x)$ má šikmou asymptotu $y = -x + \frac{2}{3}$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 152: Funkce 6 - výsledná funkce $f(x)$

6.2 Přístup tvořivý

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

1. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}$$

2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

- Průsečík s osou x

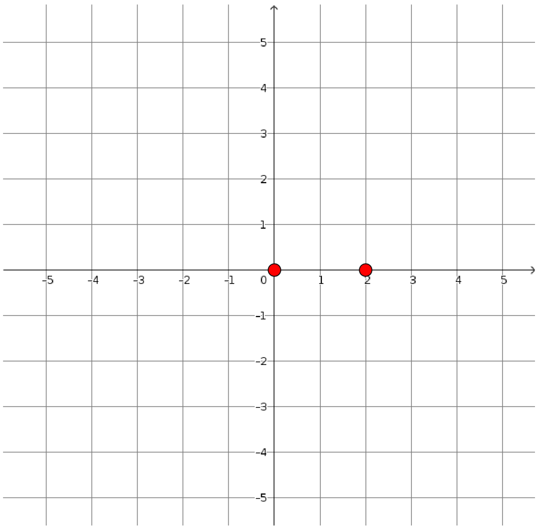
$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt[3]{2x^2 - x^3} \\ 0 &= 2x^2 - x^3 \\ 0 &= x^2(2 - x) \\ x^2 &= 0 \qquad \text{nebo} \qquad 2 - x = 0 \\ x &= 0 \qquad \text{nebo} \qquad x = 2 \end{aligned}$$

Souřadnice průsečíků funkce $f(x)$ s osou x jsou $[0, 0]$ a $[2, 0]$.

- Průsečík s osou y

$$y = \sqrt[3]{2 \cdot 0^2 - 0^3} = 0$$

Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, 0]$.



Obrázek 153: Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami

3. Sudost a lichost:

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = \sqrt[3]{2(-x)^2 - (-x)^3} = \sqrt[3]{2x^2 + x^3}$$

Funkce $f(x)$ není sudá ani lichá, protože $f(-x) \neq f(x)$ a $f(-x) \neq -f(x)$(viz definice 2 a 3).

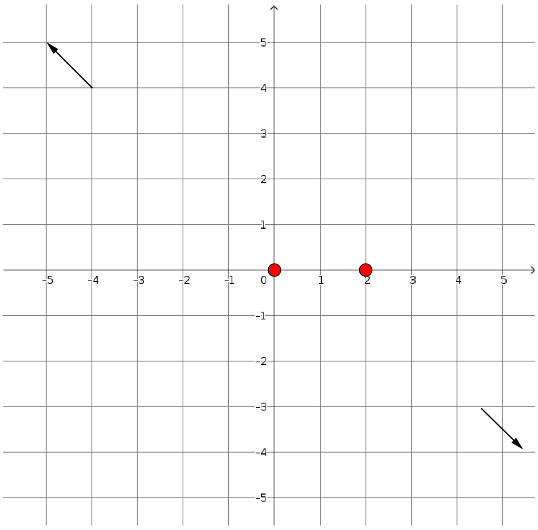
4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)} = \lim_{x\to\infty} x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)} = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = \infty$$

Co nám říkají:

- Pokud hodnota x roste do *nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce jde do *mínus nekonečna*.
- Pokud hodnota x jde do *mínus nekonečna*, tak **funkční hodnota** této funkce roste do *nekonečna*.



Obrázek 154: Chování funkce v krajních bodech definičního oboru

5. První derivace:

- Stacionární body

Použité vzorce pro derivování
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Tabulka viz věta 10 a 9.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3}\right)' = \left(\left(2x^2 - x^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(2x^2 - x^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2x^2 - x^3\right)' =$$

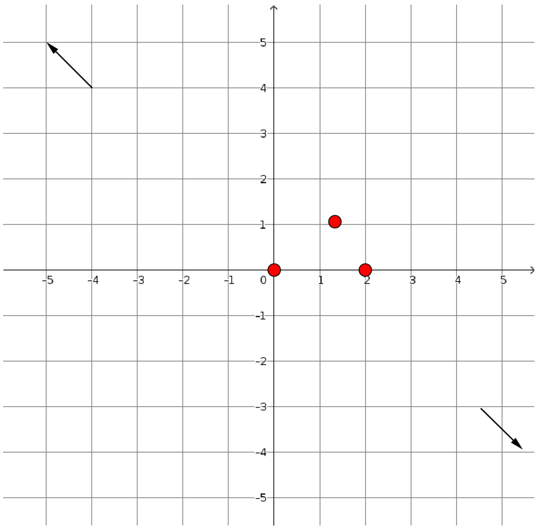
$$= \frac{1}{3}\left(2x^2 - x^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(4x - 3x^2\right) = \frac{4x - 3x^2}{3\left(2x^2 - x^2\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x(4 - 3x)}{3\sqrt[3]{\left(2x^2 - x^3\right)^2}}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

Platí $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $x(4-3x) = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} x(4-3x) &= 0 \\ 4-3x &= 0 \quad \text{nebo} \quad x = 0 \\ 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Stacionárním bodem jsou $\frac{4}{3}$ (viz věta 15). Dosazením do předpisu funkce $f(x)$ dostaneme y-ovou souřadnici bodu, která je rovna přibližně 1,06. Bod 0 nemůže být stacionárním bodem, protože v něm derivace neexistuje.



Obrázek 155: Stacionární bod

V bodech 0 a 2 první derivace neexistuje, ale přesto tam může být extrém. Chování první derivace v těchto bodech prozkoumáme pomocí jednostranných derivací.

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{-x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x}-1\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{\frac{2}{x}-1} = -\infty \\ f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{-x} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x}-1\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{2}{x}-1} = \infty \\ f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{-x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = NEEXISTUJE \end{aligned}$$

Výpočtem jednostranných derivací jsme zjistili, že pokud se blížíme k 0 zleva, je tečnou zleva grafu funkce $f(x)$ osa y a funkce $f(x)$ tam klesá a pokud se blížíme k 0 zprava, je tečna zprava grafu funkce $f(x)$ také osa y, ale funkce $f(x)$ tam roste.

Pomocí definic pro lokální extrémy (viz definice 13 a 14) zjistíme, jestli je v bodě 0 lokální minimum či maximum.

Musíme najít takové prstencové okolí $P(x_0)$, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je splněna nerovnost $f(x_0) \leq f(x)$ nebo $f(x_0) \geq f(x)$.

Pokud zvolíme $\varepsilon = 2$, získáme prstencové okolí

$$P(x_0) = (0 - 2, 0) \cup (0, 0 + 2) = (-2, 0) \cup (0, 2).$$

Platí, že $f(x_0) = f(0) = 0$. Pro všechna x z intervalu $(-2, 0)$ je $f(x) > 0$ kvůli členu $-x^3$, který v tomto intervalu bude vždy kladný (př.: $-(-1)^3 = 1$).

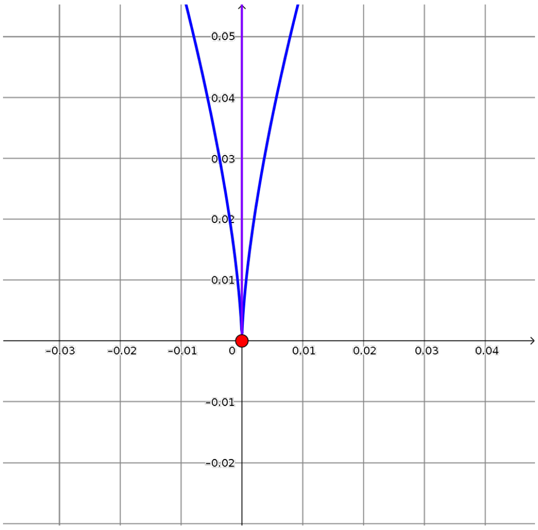
V intervalu $(0, 2)$ bude také platit pro všechna x nerovnost $f(x) > 0$. Když se řešená funkce upraví na tvar

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(2 - x)},$$

lze vidět, že pro hodnotu x z intervalu $(0, 2)$ bude $(2 - x)$ vždy větší než nula.

To znamená, že v tomto intervalu bude $f(x) > 0$.

Protože jsme našli prstencové okolí $P(x_0)$, pro které platí vztah $f(x_0) < f(x)$ můžeme říci, že v $x_0 = 0$ je ostré lokální minimum (tento extrém se do grafu zakreslí jako tzv.hrot, protože v bodě 0 derivace neexistuje).



Obrázek 156: Chování funkce $f(x)$ v okolí bodu 0

Počítejme jednostranné derivace funkce $f(x)$ v bodě 2.

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(2)-f(x)}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0^-}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{-\frac{1}{3}(2x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}(4x-3x^2)}{-1} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{4x-3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(2)-f(x)}{2-x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0^+}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{-\frac{1}{3}(2x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}(4x-3x^2)}{-1} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(2)-f(x)}{2-x} = \lim_{x\to 2} \frac{0-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{2-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = NEEXISTUJE$$

Výpočtem jednostranných derivací jsme zjistili, že pokud se blížíme k 2 zleva, je tečnou zleva grafu funkce $f(x)$ přímka rovnoběžná s osou y a funkce $f(x)$ tam klesá. Pokud se blížíme k 2 zprava, je tečna zprava grafu funkce $f(x)$ také přímka rovnoběžná s osou y, funkce $f(x)$ tam také klesá.

Pomocí definic pro lokální extrémy (viz definice 13 a 14) zjistíme, zda je v bodě 2 lokální minimum či maximum.

Musíme najít takové prstencové okolí $P(x_0)$, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je splněna nerovnost $f(x_0) \leq f(x)$ nebo $f(x_0) \geq f(x)$.

Pokud zvolíme $\varepsilon = 2$, máme prstencové okolí

$$P(x_0) = (2-2, 2) \cup (2, 2+2) = (0, 2) \cup (2, 4).$$

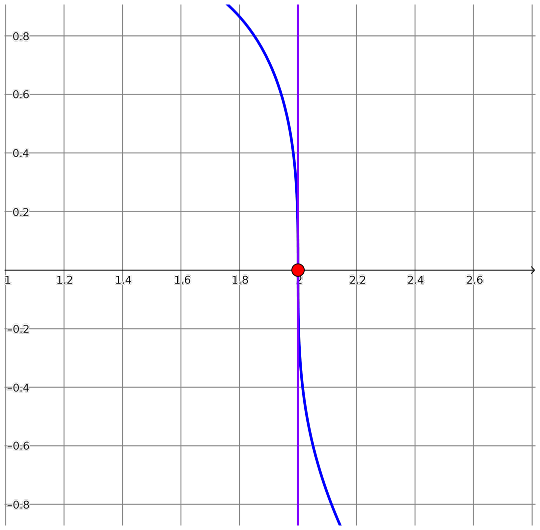
Platí, že $f(x_0) = f(2) = 0$. V intervalu $(0, 2)$ platí nerovnost $f(x) > 0$ jak je uvedeno u důkazu pro číslo 0.

Pro všechna $x > 2$ platí nerovnost $f(x) < 0$. Když se řešená funkce upraví na tvar

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(2-x)},$$

lze vidět, že pro hodnotu x z intervalu $(2, 4)$ bude $(2-x)$ vždy menší než nula, a to bude platit i pro interval $(2, \infty)$.

Protože na intervalu $(0, 2)$ je $f(x) > f(x_0)$ a na intervalu $(2, \infty)$ bude $f(x) < f(x_0)$, není v $x_0 = 2$ lokální extrém.

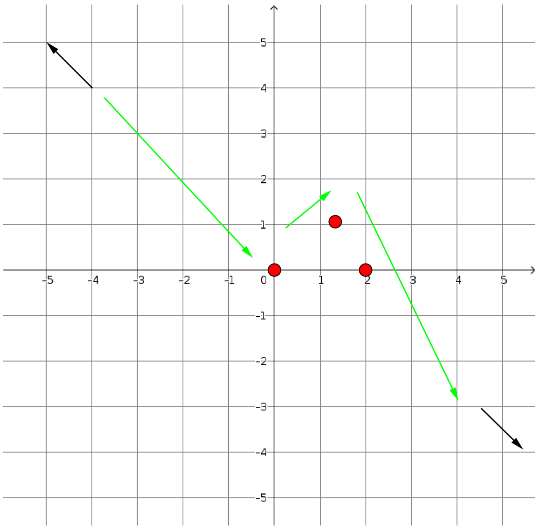


Obrázek 157: Chování funkce $f(x)$ v okolí bodu 2

- Intervaly monotonie

	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, 2)$	$(2, \infty)$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$4-3x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(2x^2-x^3)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(4-3x)}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}}$	$-$	$+$	$-$	$-$
	klesající	rostoucí	klesající	klesající
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, 0)$ klesající, na intervalu $(0, \frac{4}{3})$ rostoucí a na intervalech $(\frac{4}{3}, 2)$ a $(2, \infty)$ klesající (viz věta 11).



Obrázek 158: Monotonie funkce $f(x)$

6. Druhá a třetí derivace:

    - Inflexní body

Použité vzorce pro derivování
$(cf(x))' = cf'(x)$
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Tabulka viz věta 9.

$$f''(x) = \left(\frac{4x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{4x - 3x^2}{(2x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(4x - 3x^2)'(2x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}} - (4x - 3x^2)\left((2x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}\right)'}{(2x^2 - x^3)^{\frac{4}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(4 - 6x)(2x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}} - (4x - 3x^2) \cdot \frac{2}{3}(2x^2 - x^3)^{-\frac{1}{3}}(2x^2 - x^3)'}{(2x^2 - x^3)^{\frac{4}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(4 - 6x)(2x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}} - (4x - 3x^2) \cdot \frac{2}{3}(2x^2 - x^3)^{-\frac{1}{3}}(4x - 3x^2)}{(2x^2 - x^3)^{\frac{4}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(4 - 6x)(2x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}} - \frac{2(4x - 3x^2)^2}{3(2x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}}}{(2x^2 - x^3)^{\frac{4}{3}}}\right) =$$

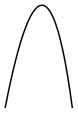
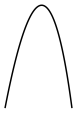
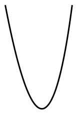
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{3(4-6x)(2x^2-x^3)-2(4x-3x^2)^2}{3(2x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}}}{(2x^2-x^3)^{\frac{4}{3}}}\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{3(4-6x)(2x^2-x^3)-2(4x-3x^2)^2}{3(2x^2-x^3)^{\frac{5}{3}}}\right) = \\
&= \frac{3(8x^2-4x^3-12x^3+6x^4)-2(16x^2-24x^3+9x^4)}{9(2x^2-x^3)^{\frac{5}{3}}} = \\
&= \frac{24x^2-48x^3+18x^4-(32x^2-48x^3+18x^4)}{9\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}} = \\
&= \frac{24x^2-48x^3+18x^4-32x^2+48^3-18x^4}{9\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}} = \\
&= \frac{-8x^2}{9\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}} \\
D_{f''} &= \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}
\end{aligned}
$$

Platí $f''(x) = 0$ právě tehdy, když $-8x^2 = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

$$
\begin{aligned}
-8x^2 &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

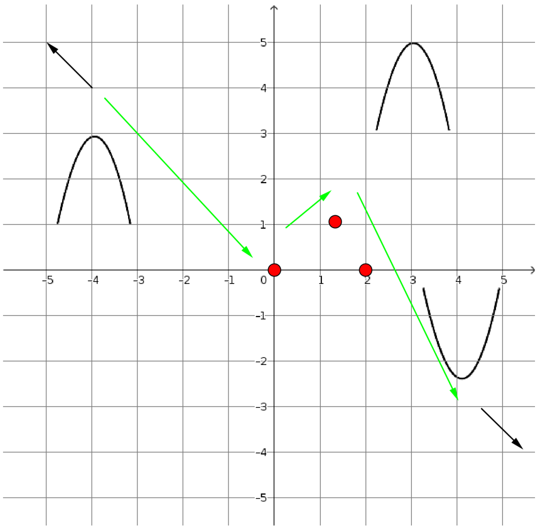
Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné x_0, pro které platí $f''(x_0) = 0$ (v bodě 0 druhá derivace neexistuje), tak nemá smysl řešit třetí derivaci (viz věta 18).

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$-8x^2$	$-$	$-$	$-$
$2x^2 - x^3$	$+$	$+$	$-$
$(2x^2 - x^3)^5$	$+$	$+$	$-$
$\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^5}$	$+$	$+$	$-$
$\frac{-8x^2}{\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}}$	$-$	$-$	$+$
	konkávní 	konkávní 	konvexní 

Tabulka viz věta 12.

Z tabulky vidíme, že v bodě 2 se funkce $f(x)$ mění z konvexní na konkávní a funkce je v bodě 2 definována, proto je tento bod inflexní (viz definice 17). Dosazením do předpisu funkce $f(x)$ dostaneme y-ovou souřadnici bodu 2, která je rovna 0.



Obrázek 159: Konvexnost a konkávnost funkce $f(x)$

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum
  Protože je $f''(\frac{4}{3}) = -1{,}2 < 0$, tak je v bodě $\frac{4}{3}$ ostré lokální maximum (viz věta 16).

7. Asymptoty:

   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} - (-1x)\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\right) =$$

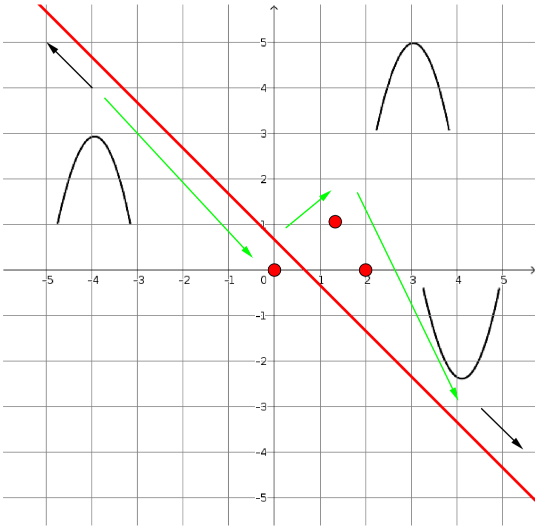
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1}{x^{-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\frac{2}{x} - 1\right)^{\frac{1}{3}} + 1}{x^{-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} - 1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2(-x^{-2})}{-x^{-2}} =$$

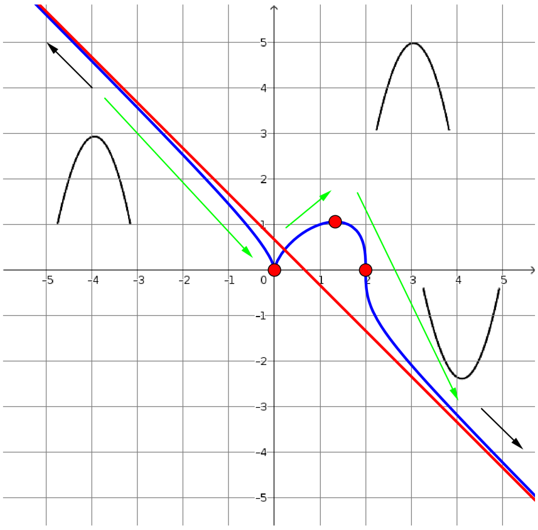
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x} - 1\right)^2}} = \frac{2}{3}$$

Dosazením do předpisu $y = ax + b$ získáme šikmou asymptotu $y = -x + \frac{2}{3}$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 160: Šikmá asymptota $y = -x + \frac{2}{3}$

8. Graf funkce $f(x)$:



Obrázek 161: Výsledný graf funkce $f(x)$

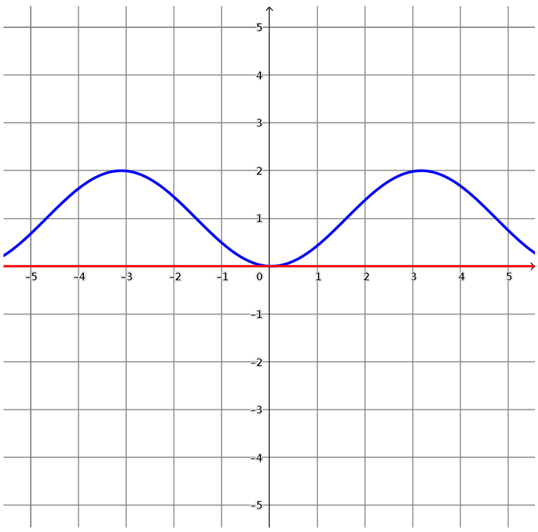
7 Úloha 7

7.1 Přístup vybírací

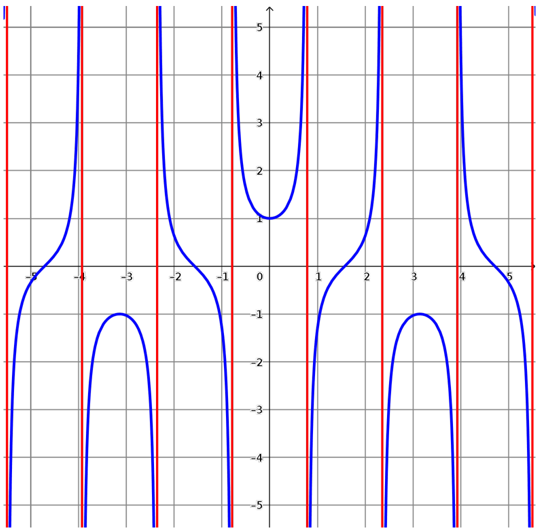
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

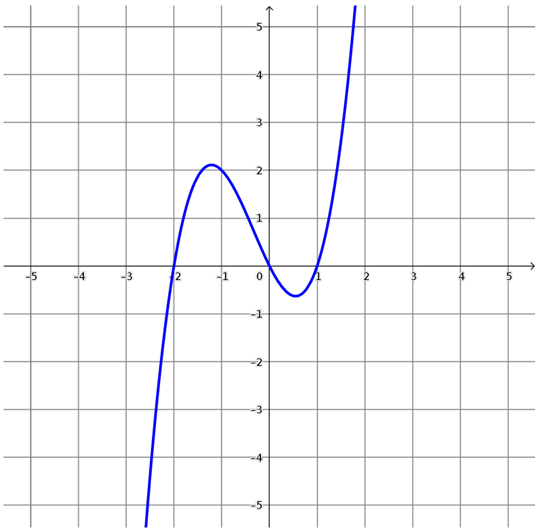
Na obrázcích jsou grafy funkcí 1–5, které jsou kandidáty na graf vyšetřované funkce. Postupnými výpočty zjistíme, že dané grafy nemusí odpovídat zjištěným vlastnostem, a proto je vyřadíme. Takto budeme pokračovat dokud nám nezbude graf výsledný.



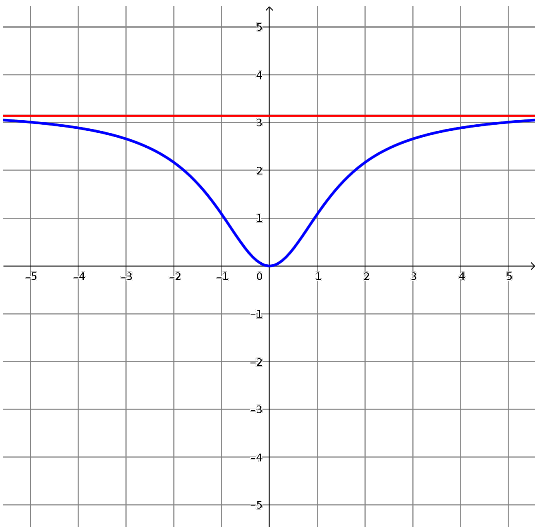
Obrázek 162: Funkce 1



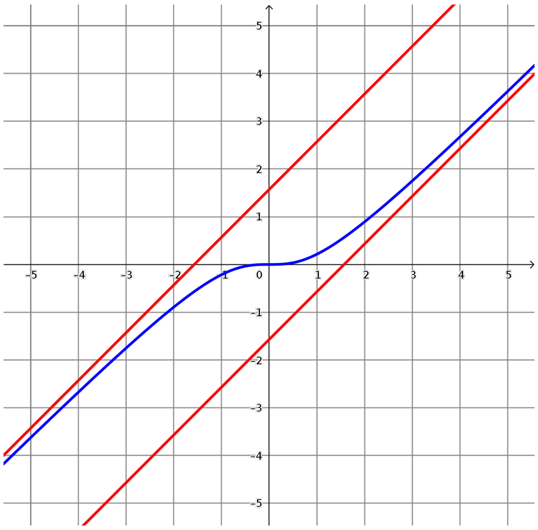
Obrázek 163: Funkce 2



Obrázek 164: Funkce 3



Obrázek 165: Funkce 4

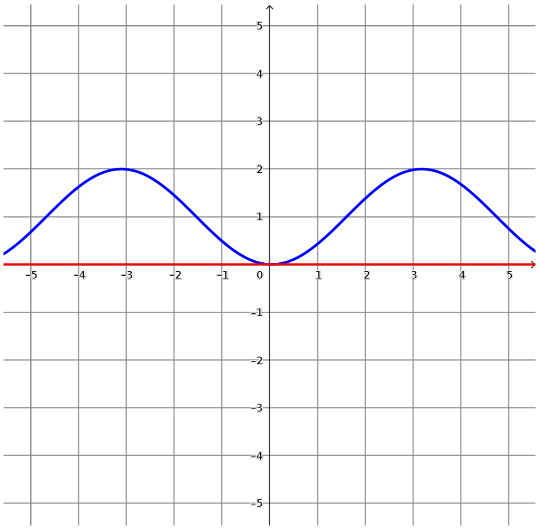


Obrázek 166: Funkce 5

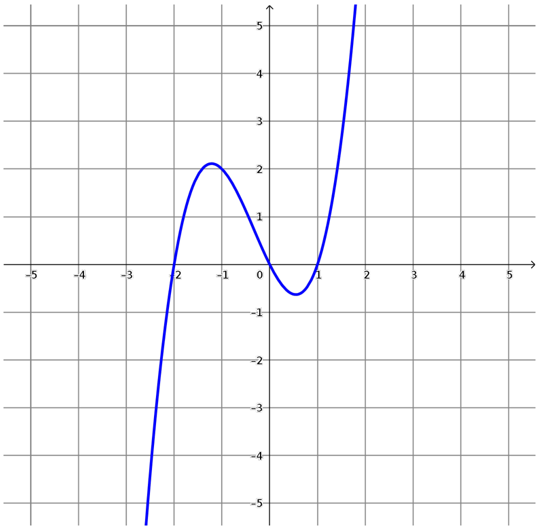
1. Definiční obor:

   $$D_f = \mathbb{R}$$

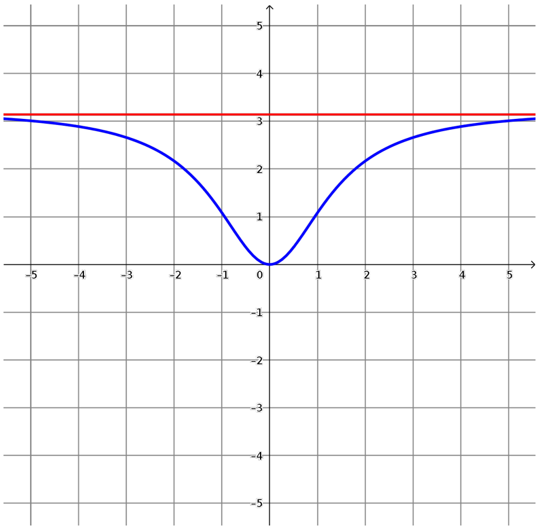
Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má za definiční obor všechna reálná čísla, tak vidíme, že Funkce 2 této vlastnosti neodpovídá, protože má svislé asymptoty v bodech $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, Z \in \mathbb{R}$. Proto ji z navrhovaných funkcí vyřadíme.



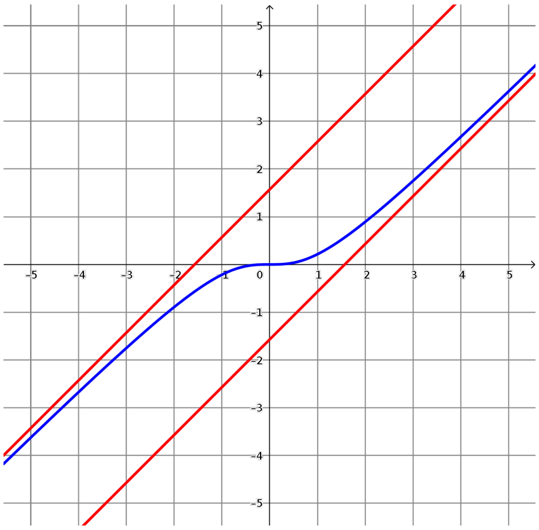
Obrázek 167: Funkce 1



Obrázek 168: Funkce 3



Obrázek 169: Funkce 4



Obrázek 170: Funkce 5

2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

   - Průsečík s osou y

     $$y = \arccos\left(\frac{1-0}{1+0}\right) = \arccos(1) = 0$$

     Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, 0]$.

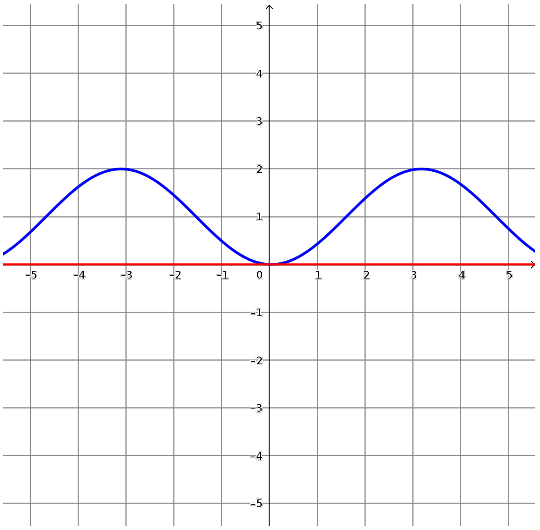
   - Průsečík s osou x

     $$\begin{aligned} 0 &= \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \\ \cos(0) &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ 1 &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ 0 &= \frac{1-x^2-1-x^2}{1+x^2} \\ 0 &= \frac{-2x^2}{1+x^2} \end{aligned}$$

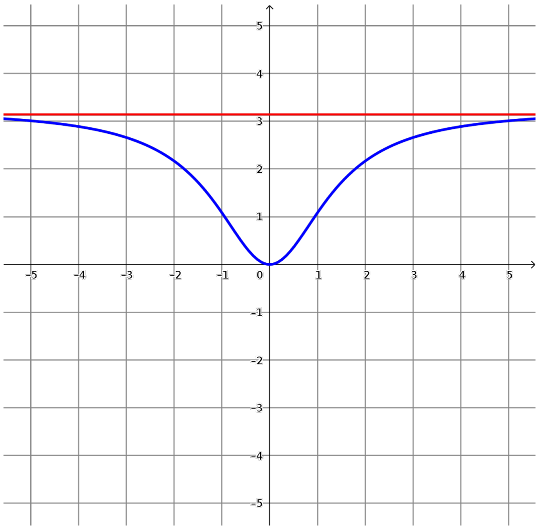
     $$\begin{aligned} 0 = \frac{-2x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow -2x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

     Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, 0]$.

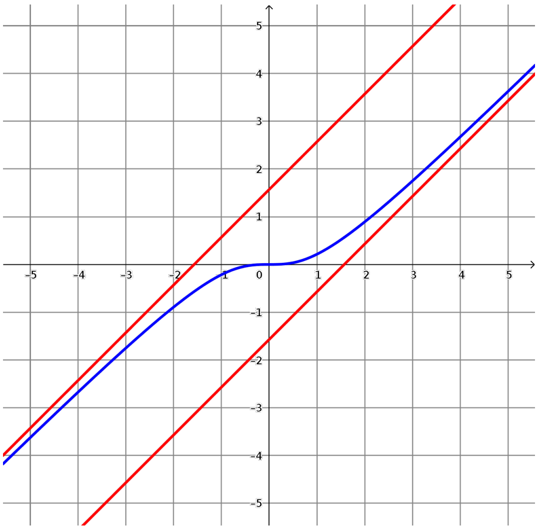
Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má jeden průsečík se souřadnicovými osami, vidíme, že Funkce 3 této vlastnosti neodpovídá, protože jich má více. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 171: Funkce 1



Obrázek 172: Funkce 4

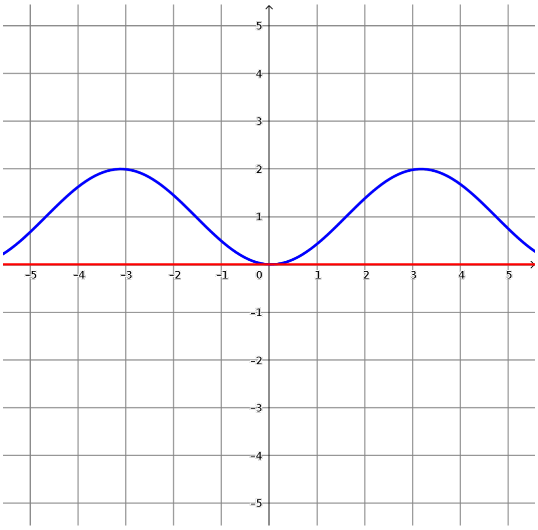


Obrázek 173: Funkce 5

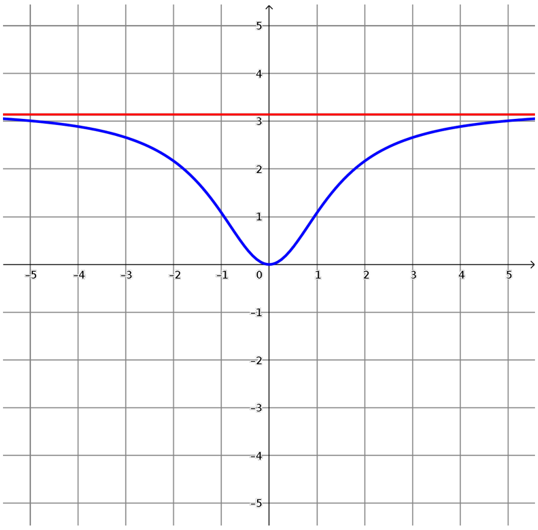
3. Sudost a lichost:

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = \arccos\left(\frac{1-(-x^2)}{1+(-x^2)}\right) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$$

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ je sudá, tak vidíme, že Funkce 5 této vlastnosti neodpovídá, protože je lichá. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 174: Funkce 1

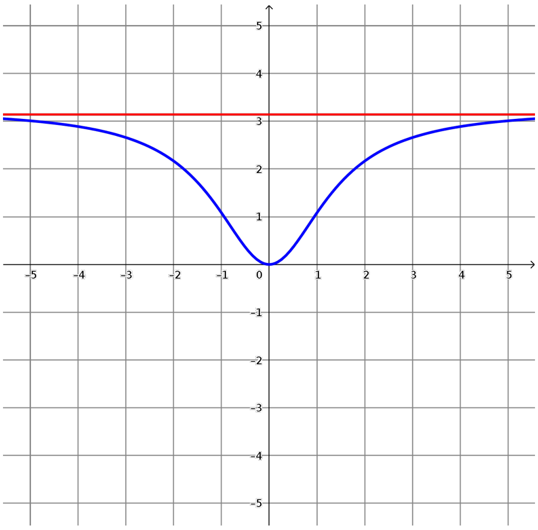


Obrázek 175: Funkce 4

4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to\infty} \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \arccos\left(\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right) = \lim_{x\to\infty} \arccos\left(\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}\right) =$$
$$= \arccos(-1) = \pi$$
$$\lim_{x\to-\infty} \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \arccos\left(\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right) = \lim_{x\to-\infty} \arccos\left(\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}\right) =$$
$$= \arccos(-1) = \pi$$

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má limity pro $x \to \pm\infty$ rovny π, tak vidíme, že Funkce 1 této vlastnosti neodpovídá, protože má limity pro $x \to \pm\infty$ rovny 0. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme.



Obrázek 176: Funkce 4

5. První derivace:

- Stacionární body

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\right) = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\left(\frac{-4x}{(1+x^2)^2}\right) = \\
&= \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{1+2x^2+x^4-(1-2x^2+x^4)}}\,\frac{4x}{(1+x^2)^2} = \\
&= \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{4x^2}}\,\frac{4x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x(1+x^2)}{2\sqrt{x^2}(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}} \\
D_{f'} &= \mathbb{R}\setminus\{0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Funkce $f(x)$ nemá stacionární body (viz věta 15), protože v bodě 0 derivace neexistuje.

- Intervaly monotonie

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\frac{2x}{\sqrt{x^2}(1+x^2)}$	$-$	$+$
	klesající	rostoucí

Tabulka viz věta 11.

6. Druhá a třetí derivace:

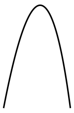
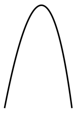
- Druhá derivace

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2}-2x\left((1+x^2)\sqrt{x^2}\right)'}{x^2(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2}-2x\left(2x\sqrt{x^2}+(1+x^2)\cdot\frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right)}{x^2(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2}-2x\left(2x\sqrt{x^2}+\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{x^2}}\right)}{x^2(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2}-2x\frac{\left(2x^3+x(1+x^2)\right)}{\sqrt{x^2}}}{x^2(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{\frac{2x^2(1+x^2)-4x^4-2x^2(1+x^2)}{\sqrt{x^2}}}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{-4x^4}{x^2(1+x^2)^2\sqrt{x^2}} = \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2\sqrt{x^2}} \\
D_{f''} &= \mathbb{R}\setminus\{0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné x_0, pro které platí $f''(x_0) = 0$ (v bodě 0 druhá derivace neexistuje), tak nemá smysl řešit třetí derivaci (viz věta 18).

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\frac{-4x^2}{(1+x^2)^2\sqrt{x^2}}$	$-$	$-$
	konkávní 	konkávní 

Tabulka viz věta 12.

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ je na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ konkávní a nemá žádný inflexní bod (viz definice 17), tak vidíme, že Funkce 4 těmto vlastnostem neodpovídá, protože má dva inflexní body. Proto ji z navrhovaných funkcí také vyřadíme. Tato funkce záměrně nebyla vyřazena už po výpočtu stacionárních bodů, kvůli možnosti, že v bodě 0 může být lokální extrém.

Protože jsem právě vyřadili z výběru i poslední funkci, tak se ve výpočtu musíme vrátit, abychom zjistili, kde jsme udělali chybu. Přesněji, vrátíme se k první derivaci.

Definiční obor první derivace nám vyšel následovně:

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

To znamená, že první derivace v bodě 0 neexistuje, ale přesto musíme zjistit, jak se funkce $f(x)$ chová v okolí tohoto bodu. Využijeme výpočtu jednostranných derivací.

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\arccos(1) - \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{0 - \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = \left[\frac{\arccos 1}{0^-}\right] = \\ &= \left[\frac{0}{0^-}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}}}{1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{(1+x^2)|x|} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{(1+x^2)(-x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{1+x^2} = -2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'_{+}(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1)-\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{0-\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = \left[\frac{\arccos 1}{0^+}\right] = \\
&= \left[\frac{0}{0^+}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{(1+x^2)|x|} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{(1+x^2)(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+x^2} = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arccos(1)-\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{0-\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = NEEXISTUJE
\end{aligned}
$$

Výpočtem jednostranných derivací jsme zjistili, že pokud se blížíme k 0 zleva, je směrnicí tečny zleva grafu funkce $f(x)$ číslo -2 a funkce tam klesá a pokud se blížíme k 0 zprava je směrnicí tečny zprava grafu funkce $f(x)$ číslo 2 a funkce tam roste.

Pomocí definic pro lokální extrémy (viz definice 13 a 14) zjistíme, zda je v bodě 0 lokální minimum či maximum.

Musíme najít takové prstencové okolí $P(x_0)$, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je splněna nerovnost $f(x_0) \le f(x)$ nebo $f(x_0) \ge f(x)$.

Pokud zvolíme $\varepsilon = 2$, získáme prstencové okolí

$$P(x_0) = (0-2, 0) \cup (0, 0+2) = (-2, 0) \cup (0, 2).$$

Platí, že $f(x_0) = f(0) = 0$. Vzhledem k tomu, že obor hodnot funkce $f(x) = \arccos x$ je $\langle 0, \pi \rangle$, bude $f(x)$ vždy kladné číslo. Bude tedy platit vztah $f(x_0) < f(x)$, a proto je v $x_0 = 0$ ostré lokální minimum.

Když vezmeme v potaz nové informace o okolí bodu 0 tedy, že je v tomto bodě lokální minimum, funkce se v levém a pravém okolí blíží přímce procházející bodem 0, se směrnicí po řadě -2 a 2, na intervalu $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ je funkce $f(x)$ konkávní a hlavně, že první derivace funkce $f(x)$ v bodě 0 neexistuje (graf má tzv. hrot), můžeme graf funkce $f(x)$ upravit.

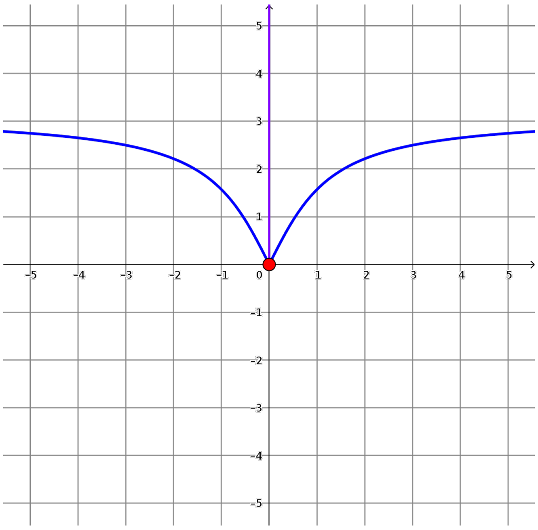
Takto vypadá graf funkce $f(x)$ po úpravě.

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum

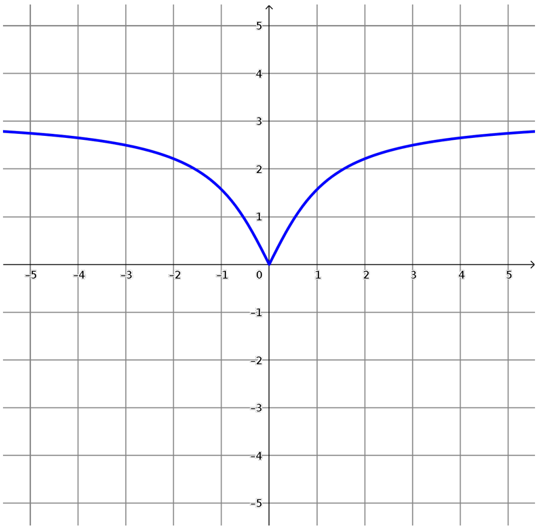
  Nemá ji smysl řešit, protože funkce $f(x)$ nemá v bodě 0 druhou derivaci (viz věta 16).

Ještě je nutné zjistit, jestli funkce $f(x)$ nemá nějaké asymptoty.

7. Asymptoty:



Obrázek 177: Chování funkce v okolí bodu 0



Obrázek 178: Funkce 6

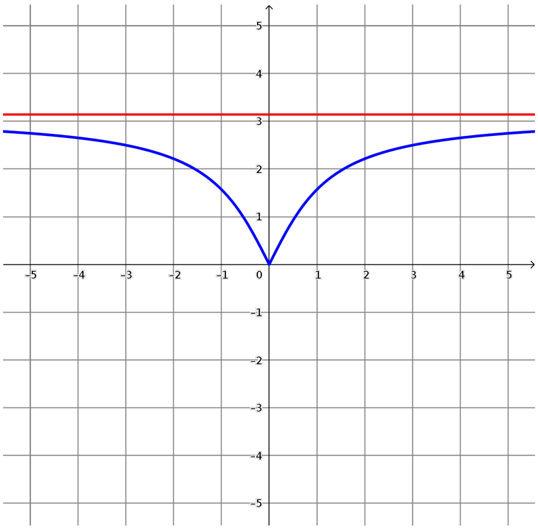
Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arccos\left(\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arccos\left(\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}\right)}{x} =$$

$$= \left[\frac{\arccos(-1)}{\infty}\right] = \left[\frac{\pi}{\infty}\right] = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \arccos\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \pi$$

Funkce $f(x)$ má vodorovnou asymptotu $y = \pi$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 179: Funkce 6 - výsledná funkce $f(x)$

7.2 Přístup tvořivý

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

1. Definiční obor:

   $$D_f = \mathbb{R}$$

2. Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami:

   - Průsečík s osou y

     $$y = \arccos\left(\frac{1-0}{1+0}\right) = \arccos(1) = 0$$

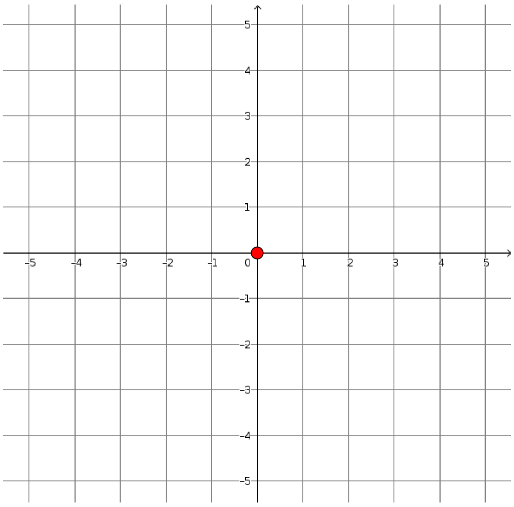
     Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou y jsou $[0, 0]$.

   - Průsečík s osou x

     $$\begin{aligned} 0 &= \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \\ \cos(0) &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ 1 &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ 0 &= \frac{1-x^2}{1+x^2} - 1 \\ 0 &= \frac{1-x^2-(1+x^2)}{1+x^2} \\ 0 &= \frac{1-x^2-1-x^2}{1+x^2} \\ 0 &= \frac{-2x^2}{1+x^2} \end{aligned}$$

     $$\begin{aligned} 0 = \frac{-2x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow -2x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

     Souřadnice průsečíku funkce $f(x)$ s osou x jsou $[0, 0]$.



Obrázek 180: Průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnicovými osami

3. Sudost a lichost:

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = \arccos\left(\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}\right) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x)$$

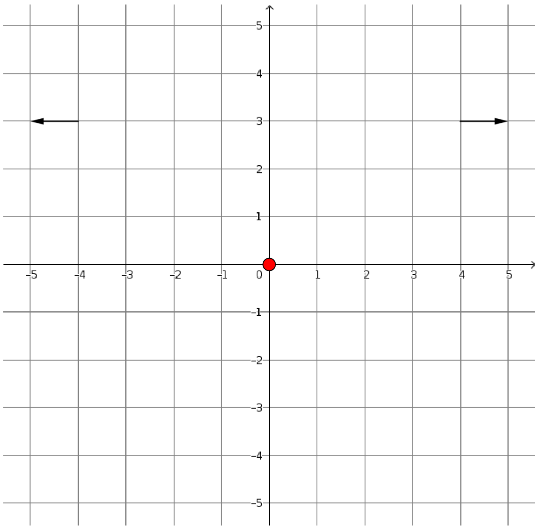
Funkce $f(x)$ je sudá, tedy její graf je souměrný podle osy y (viz definice 2).

4. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to\infty} \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \arccos\left(\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right) = \lim_{x\to\infty} \arccos\left(\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}\right) =$$
$$= \arccos(-1) = \pi$$
$$\lim_{x\to-\infty} \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \arccos\left(\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right) = \lim_{x\to-\infty} \arccos\left(\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}\right) =$$
$$= \arccos(-1) = \pi$$

Co nám říkají:

- Pokud hodnota x roste do *nekonečna*, tak jde **funkční hodnota** této funkce k π.
- Pokud hodnota x jde do *mínus nekonečna*, tak jde **funkční hodnota** této funkce k π.



Obrázek 181: Chování funkce $f(x)$ v krajních bodech definičního oboru

5. První derivace:

- Stacionární body

Použité vzorce pro derivování
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Tabulka viz věta 10 a 9.

$$f'(x) = \left(\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{(1-x^2)'(1+x^2)-(1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\left(\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-(1-2x^2+x^4)}{(1+x^2)^2}}}\left(\frac{-2x-2x^3-(2x-2x^3)}{(1+x^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}{(1+x^2)^2}}}\left(\frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{4x^2}} \cdot \frac{4x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x\sqrt{(1+x^2)^2}}{2\sqrt{x^2}(1+x^2)^2} = \frac{2x(1+x^2)}{(1+x^2)^2\sqrt{x^2}} =$$

$$= \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Platí $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $2x = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

V bodě 0 první derivace neexistuje, ale přesto tam může být lokální extrém. Chování první derivace v tomto bodě prozkoumáme pomocí jednostranných derivací.

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\arccos(1) - \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{0 - \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = \left[\frac{\arccos(1)}{0^-}\right] = \\ &= \left[\frac{0}{0^-}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)^2}\sqrt{x^2}}}{1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{|1+x^2||x|} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{(1+x^2)(-x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{1+x^2} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1) - \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{0 - \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = \left[\frac{\arccos(1)}{0^+}\right] = \\ &= \left[\frac{0}{0^+}\right] \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)^2}\sqrt{x^2}}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{|1+x^2||x|} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{(1+x^2)(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+x^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arccos(1) - \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{0 - \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = NEEXISTUJE \end{aligned}$$

Výpočtem jednostranných derivací jsme zjistili, že pokud se blížíme k 0 zleva, je směrnicí tečny zleva grafu funkce $f(x)$ číslo -2 a funkce tam klesá a pokud se blížíme k 0 zprava je směrnicí tečny zprava grafu funkce $f(x)$ číslo 2 a funkce tam roste.

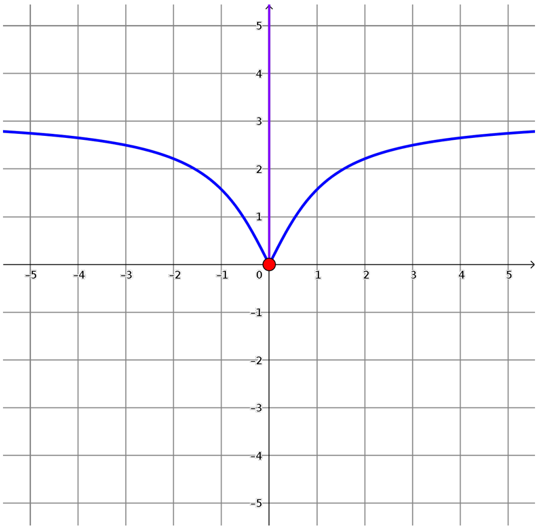
Pomocí definic pro lokální extrémy (viz definice 13 a 14) zjistíme, zda je v bodě 0 lokální minimum či maximum.

Musíme najít takové prstencové okolí $P(x_0)$, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je splněna nerovnost $f(x_0) \leq f(x)$ nebo $f(x_0) \geq f(x)$.

Pokud zvolíme $\varepsilon = 2$, získáme prstencové okolí

$$P(x_0) = (0-2, 0) \cup (0, 0+2) = (-2, 0) \cup (0, 2).$$

Platí, že $f(x_0) = f(0) = 0$. Vzhledem k tomu, že obor hodnot funkce $f(x) = \arccos x$ je $\langle 0, \pi \rangle$, bude $f(x)$ vždy kladné číslo. Bude tedy platit vztah $f(x_0) < f(x)$, a proto je v $x_0 = 0$ ostré lokální minimum (tento extrém se do grafu zakreslí jako tzv.hrot, protože v bodě 0 derivace neexistuje).

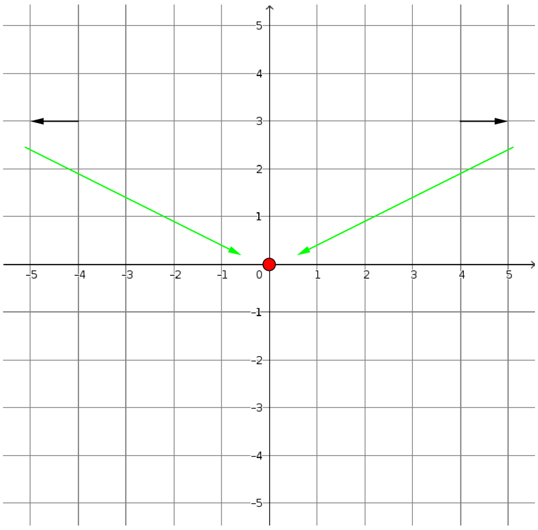


Obrázek 182: Chování funkce v okolí bodu 0

- Intervaly monotonie

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$2x$	$-$	$+$
$(1 + x^2)$	$+$	$+$
$\sqrt{x^2}$	$+$	$+$
$\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}}$	$-$	$+$
	klesající	rostoucí
	↘	↗

Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, 0)$ klesající a na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí (viz věta 11).



Obrázek 183: Monotonie funkce $f(x)$

6. Druhá a třetí derivace:

- Druhá derivace

Použité vzorce pro derivování
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Tabulka viz věta 10 a 9.

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}}\right)' =$$

$$= \frac{(2x)'(1+x^2)\sqrt{x^2} - 2x\left((1+x^2)\sqrt{x^2}\right)'}{(1+x^2)^2x^2} =$$

$$= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2} - 2x\left((1+x^2)'\sqrt{x^2} + (1+x^2)\left(\sqrt{x^2}\right)'\right)}{x^2(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2} - 2x\left(2x\sqrt{x^2} + (1+x^2)\left((x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'\right)}{x^2(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2} - 2x\left(2x\sqrt{x^2} + (1+x^2)\cdot\frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2)'\right)}{x^2(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2} - 2x\left(2x\sqrt{x^2} + (1+x^2)\cdot\frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right)}{x^2(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2} - 2x\left(2x\sqrt{x^2} + \frac{x(1+x^2)}{(x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{x^2(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2} - 2x\left(2x\sqrt{x^2} + \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{x^2}}\right)}{x^2(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1+x^2)\sqrt{x^2} - 2x\frac{\left(2x\cdot x^2 + x(1+x^2)\right)}{\sqrt{x^2}}}{x^2(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{2\left(1+x^2\right)x^2 - 2x\left(2x^3 + x\left(1+x^2\right)\right)}{\sqrt{x^2}}}{x^2(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2\left(1+x^2\right) - \left(4x^4 + 2x^2\left(1+x^2\right)\right)}{x^2(1+x^2)^2\sqrt{x^2}} =$$

$$= \frac{2x^2\left(1+x^2\right) - 4x^4 - 2x^2\left(1+x^2\right)}{x^2(1+x^2)^2\sqrt{x^2}} =$$

$$= \frac{-4x^4}{x^2(1+x^2)^2\sqrt{x^2}} = \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2\sqrt{x^2}}$$

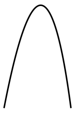
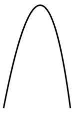
$$D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Platí $f''(x) = 0$ právě tehdy, když $-4x^2 = 0$. Řešením této rovnice dostáváme:

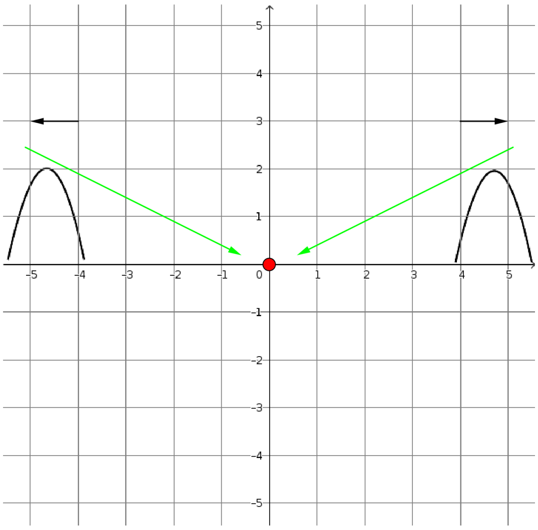
$$-4x^2 = 0$$
$$x = 0$$

Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné x_0, pro které platí $f''(x_0) = 0$ (v bodě 0 druhá derivace neexistuje), tak nemá smysl řešit třetí derivaci (viz věta 18).

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$-4x^2$	$-$	$-$
$(1+x^2)^2$	$+$	$+$
$\sqrt{x^2}$	$+$	$+$
$\frac{-4x^2}{(1+x^2)\sqrt{x^2}}$	$-$	$-$
	konkávní 	konkávní 

Dle tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ je na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ konkávní, a proto nemá v bodě 0 inflexní bod (viz věta 12 a definice 17).



Obrázek 184: Konvexnost a konkávnost funkce $f(x)$

- Postačující podmínka pro lokální minimum či maximum
  Nemá ji smysl řešit, protože funkce nemá v bodě 0 druhou derivaci (viz věta 16).

7. Asymptoty:

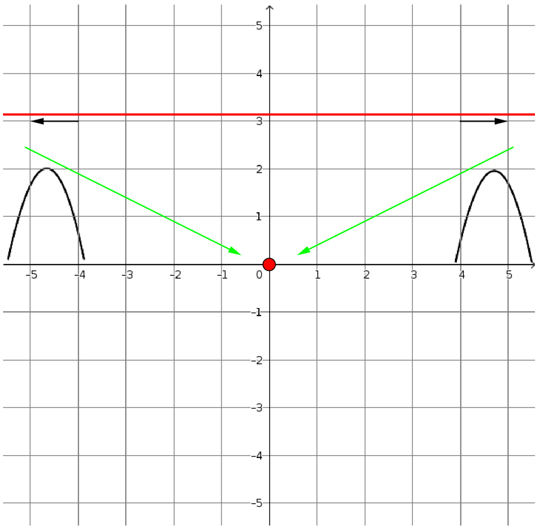
   Rovnice asymptoty budiž $y = ax + b$. Určíme koeficienty a, b.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arccos\left(\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arccos\left(\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}\right)}{x} =$$

$$= \left[\frac{\arccos(-1)}{\infty}\right] = \left[\frac{\pi}{\infty}\right] = 0$$

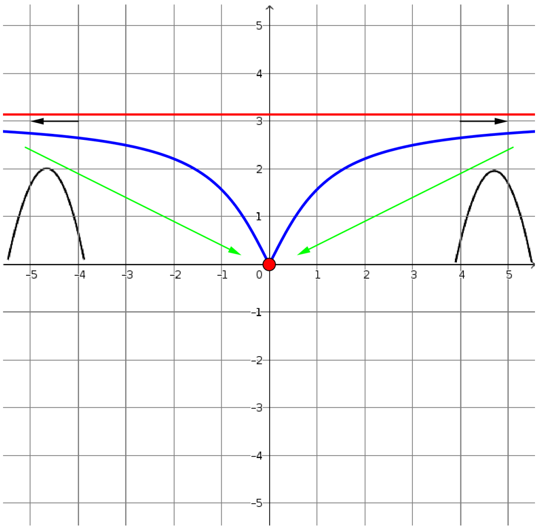
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\arccos\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) - 0x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \arccos\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \pi$$

   Vzhledem k tomu, že $a = 0$ a $b = \pi$, funkce $f(x)$ má vodorovnou asymptotu $y = \pi$ (viz definice 19 a věta 20).



Obrázek 185: Vodorovná asymptota $y = \pi$

8. Graf funkce $f(x)$:



Obrázek 186: Výsledný graf funkce $f(x)$

Seznam literatury

BURDA, Pavel, 2008. *Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia: Matematika I* [online]. [cit. 2017-11-20]. Dostupné z: http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/MI.html

DEMIDOVIČ, Boris Pavlovič, 2003. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Havlíčkův Brod: Fragment. ISBN 80-7200-587-1.

HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT, 2008. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*. 3. vyd. Praha: Prometheus. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.

KAŇKA, Miloš a Jiří HENZLER, 1995. *Matematická analýza: (Matematika B pro VŠE)*. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze. ISBN 80-7079-546-8.

MOC, Ondřej, Jana ŠIMSOVÁ a Marta ŽAMBOCHOVÁ, 2013. *Matematika pro ekonomy*. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně v Ústí nad Labem. ISBN 8074145999.

PYRIH, Pavel, 1999. *matematika.cuni.cz: Portál pro vysokoškolskou matematiku* [online]. [cit. 2017-12-08]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼pyrih/

ZEMÁNEK, Petr a Petr HASIL, 2012. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I* [online]. [cit. 2017-12-08]. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/prubeh-funkce.html