Úlohy 7

Na případné chyby mě prosím upozorněte. Děkuji.

1. Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e\}$ a relace $S \subseteq M \times M$, o které víte, že obsahuje i uspořádané dvojice
$$(c, e), (b, b), (d, a), (a, b).$$
Určete výčtem celou relaci S tak, aby byla lineárním uspořádáním.

   Řešení:

   Aby relace S byla lineárním uspořádáním, musí být reflexivní (nebo antireflexivní v případě ostrého uspořádání), antisymetrická, tranzitivní a nesmí obsahovat neporovnatelné prvky. Začneme s danými dvojicemi $(c, e), (b, b), (d, a), (a, b)$ a doplníme další dvojice, abychom zajistili, že relace splňuje podmínky lineárního uspořádání:

$$\begin{aligned} S = \{&(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e),\\ &(a, b)\\ &(c, a), (c, b), (c, d), (c, e),\\ &(d, a), (d, b),\\ &(e, a), (e, b), (e, d)\} \end{aligned}$$

   Relace S splňuje všechny požadované vlastnosti lineárního uspořádání. Hasseův diagram může pomoci naší představě.

2. Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e\}$ a relace $S \subseteq M \times M$, o které víte, že obsahuje i uspořádané dvojice
$$(b, c), (c, d), (d, b), (a, a).$$
Určete výčtem celou relaci S tak, aby byla lineárním uspořádáním.

   Nápověda: Relace obsahující tyto uspořádané dvojice již nemůže být lineárním uspořádáním, ověřte proč.

3. Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e\}$ a relace $S \subseteq M \times M$, o které víte, že obsahuje i uspořádané dvojice
$$(b, c), (c, d), (b, d), (a, a).$$
Určete výčtem celou relaci S tak, aby byla lineárním uspořádáním.

4. Určete všechny rozklady množiny $\{a, b, c\}$.

Řešení:
$$\{\{a, b, c\}\}, \quad \{\{a, b\}, \{c\}\}, \quad \{\{a, c\}, \{b\}\}, \quad \{\{b, c\}, \{a\}\}, \quad \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

5. Určete všechny rozklady množiny $\{1, 2, 3, 4\}$.

6. Které z množin E, F, G, H nejsou rozklady množiny $M = \{a, b, c, d, e, f\}$?
   - $E = \{\{a, d\}, \{c, e, f\}, \{b\}\}$
   - $F = \{\{a, b\}, \{c, e, f\}, \{a, b\}\}$
   - $G = \{\{a, b, c\}, \{d, f\}\}$
   - $H = \{\{a, b, c, d, e, f\}\}$

Řešení: E ano, F ne, G ne, H ano.

7. Zapište výčtem ekvivalenci, která určuje rozklad.
   (a) $\{\{p, q\}, \{r, s\}\}$
   (b) $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}\}$

Řešení:
$$R_a = \{(p, p), (q, q), (r, r), (s, s), (p, q), (q, p), (r, s), (s, r)\}$$
$$R_b = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (5, 6), (6, 5)\}$$

8. Zapište výčtem ekvivalenci, která určuje rozklad.
   (a) $\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$
   (b) $\{\{5\}, \{6\}, \{7\}\}$

9. Zapište rozklad množiny $M = \{x \in \mathbb{N}; n < 32\}$ indukovaný ekvivalencí $E = \{(a, b) \in M \times M, a$ dává stejný zbytek po dělení sedmi jako $b\}$.

Řešení:
$$\begin{aligned}\{&\{0, 7, 14, 21, 28\},\\ &\{1, 8, 15, 22, 29\},\\ &\{2, 9, 16, 23, 30\},\\ &\{3, 10, 17, 24, 31\},\\ &\{4, 11, 18, 25\},\\ &\{5, 12, 19, 26\},\\ &\{6, 13, 20, 27\}\}\end{aligned}$$

10. Zapište rozklad množiny $M = \{x \in \mathbb{N}; n \leq 20\}$ indukovaný ekvivalencí $E = \{(a, b) \in M \times M, a$ a b mají stejnou paritu$\}$.

11. Rozhodněte, zda relace $R = \{(k, m), (k, h), (k, g), (m, h), (m, g), (h, g)\}$ je uspořádáním na množině $M = \{g, h, k, m\}$. Pokud je uspořádáním, načrtněte Hasseův diagram. Pokud je to možné, určete nejmenší a největší prvek.

   Řešení:

   Ano, relace je antireflexivní, silně antisymetrická, tranzitivní a trichotomická (vlastnosti ověřte!), jde o ostré lineární uspořádání. Hasseův diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{k} \arrow[d, dash] \\ \mathrm{m} \arrow[d, dash] \\ \mathrm{h} \arrow[d, dash] \\ \mathrm{g} \end{tikzcd}$$

   Nejmenší prvek je g, největší prvek je k.

12. Rozhodněte, zda relace $R = \{(x, y), (x, z), (y, z), (y, w), (z, w)\}$ je uspořádáním na množině $M = \{x, y, z, w\}$. Pokud je uspořádáním, načrtněte Hasseův diagram a pokud je to možné, určete nejmenší a největší prvek. Pokud není uspořádáním, doplňte ji tak, aby uspořádáním byla a postupujte stejným způsobem.

13. Je dána relace $R = (1, 2), (2, 5)$ na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Doplňte relaci R tak, aby

   - relace R byla ekvivalencí na množině M.
   - relace R byla lineární uspořádáním na množině M.
   - relace R byla uspořádáním na množině M, které není lineární.
   - relace R byla trichotomická.
   - relace R byla zobrazením.

   Řešení:

   - **Relace R jako ekvivalence:**
     Aby relace R byla ekvivalencí, musí být reflexivní, symetrická a tranzitivní. Doplníme relaci R o potřebné dvojice:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (2, 5), (5, 2), (1, 5), (5, 1)\}$$

     Řešení není jediné.

- **Relace R jako lineární uspořádání:**

  Aby byla relace R lineárním uspořádáním, musí být reflexivní (nebo antireflexivní), antisymetrická, tranzitivní a nesmí obsahovat neporovnatelné prvky. Doplníme relaci:

  $$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$$

  Řešení není jediné.

- **Relace R jako uspořádání, které není lineární:**

  Aby byla relace R uspořádáním, které není lineární, musí být reflexivní (nebo antireflexivní), antisymetrická a tranzitivní, ale musí obsahovat neporovnatelné prvky. Tedy například:

  $$R = \{(1,2),(2,5),(1,5)\}$$

  Opět se nejedná o jediné řešení.

- **Relace R jako trichotomická:**

  Aby relace R byla trichotomická, musí pro všechny prvky $a, b \in R$ platit právě jedna z možností: $a = b$ nebo aRb nebo bRa. Pokud je relace ostré lineární uspořádání, pak už je trichotomická, můžeme tedy využít relaci z úlohy lineárního uspořádání:

  $$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$$

  Trichotomická relace však nevyžaduje tranzitivitu, tedy pokud bychom prohodili některé prvky z prvního místa na druhé a naopak, relace už by nemusela být tranzitivní, ale stále by byla trichotomická.

- **Relace R jako zobrazení:**

  Relace již je zobrazení, každému prvku z prvního oboru relace náleží právě jeden prvek z množiny M.

14. Je dána relace $R = (a,b),(b,c)$ na množině $M = \{a,b,c,d,e\}$. Doplňte relaci R tak, aby

    - relace R byla ekvivalencí na množině M.
    - relace R byla lineární uspořádáním na množině M.
    - relace R byla uspořádáním na množině M, které není lineární.
    - relace R byla trichotomická.
    - relace R byla zobrazením.

15. Je dána množina $M = \{e,f,g\}$. Dále jsou dány relace

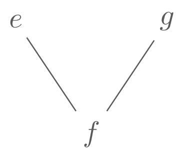
    - $R_0 = \{(e,f),(g,f)\}$
    - $R_1 = \{(e,f),(g,f),(g,g)\}$
    - $R_2 = \{(e,f),(g,f),(g,g),(e,e),(f,f)\}$
    - $R_3 = \{(e,f),(g,f),(g,e)\}$

Určete, které z výše uvedených relací jsou uspořádání, a své rozhodnutí patřičně zdůvodněte. U uspořádání načrtněte jak uzlový graf, tak Hasseův diagram. Dále rozhodněte, která z uspořádání jsou ostrá, neostrá, lineární.

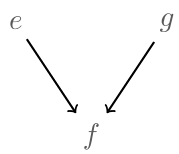
Nápověda:

- R_0 je ostré uspořádání, není lineární (neobsahuje (e, g) ani (g, e)). Je antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní (ověřte vlastnosti).

  Hasseův diagram:

  Uzlový graf:

- R_1 není uspořádání, není reflexivní ani antireflexivní (uveďte protipříklady).
- R_2 je neostré uspořádání, není lineární (neobsahuje (e, g) ani (g, e)). Je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (ověřte vlastnosti).
- R_3 je ostré lineární uspořádání, je antireflexivní, antisymetrická, tranzitivní a trichotomická (ověřte vlastnosti).

16. Je dána množina $M = \{m, n, o\}$. Dále jsou dány relace

    - $R_0 = \{(m, n), (n, o)\}$
    - $R_1 = \{(m, m), (n, n), (o, o)\}$
    - $R_2 = \{(m, m), (n, n), (o, o), (n, m), (n, o), (o, m)\}$
    - $R_3 = \{(o, n), (n, m), (o, m)\}$

    Určete, které z výše uvedených relací jsou uspořádání, a své rozhodnutí patřičně zdůvodněte. U uspořádání načrtněte jak uzlový graf, tak Hasseův diagram. Dále rozhodněte, která z uspořádání jsou ostrá, neostrá, lineární.

17. Je dána množina $M = \{e, f, g\}$. Určete počet

    - všech uspořádání množiny M,
    - všech lineárních uspořádání množiny M.

    Nápověda: Využijte Hasseův diagram a nakreslete si možnosti. Nezapomeňte, že uspořádání může být ostré, nebo neostré. Může být celkem 26 různých uspořádání, z toho 12 lineárních uspořádání.

18. Najděte chybu v následujícím důkazu, že jestliže je nějaká relace R na množině M symetrická a tranzitivní, pak už musí být i reflexivní:

    Nechť $a \in M$. Vezměme $b \in M$ takové, aby aRb. Ze symetrie pak musí být bRa a následně z tranzitivity plyne $aRb \wedge bRa \Rightarrow aRa$. Tedy R musí být reflexivní.

19. Je dáno zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = x^2$. Rozhodněte, zda je f

    - bijektivní zobrazení množiny **na** množinu?
    - bijektivní zobrazení množiny **do** množiny?
    - prosté zobrazení?