Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.
KMA – Katedra matematiky PřF

21.2.2024

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Organizační záležitosti

- Vyučující: Michaela Tichá, katedra matematiky
- Literatura: Úvod do teorie her (Dlouhý, Fiala)
  Teorie her (Magdalena Hykšová)
  Game Theory (Thomas S. Ferguso)
  Two-Person Nonzero-Sum Games and Quadratic Programming (Mangasarian, Stone)
  Extensive Form Games (J. Levin)
- software: MS Excel a Python (studenti)
- Zápočet: 60% bodů z každé zápočtové písemky
  1. test 6.-8. týden semestru, 2. test 10. nebo 13. týden
- Zkouška: písemná a ústní
- Pokud vše stihneme, bude 15.5. předtermín
- ?kdo plánuje státnice v červnu?
- Předpoklad: znalost lineárního programování a simplexové metody

Úvod - matematická teorie her

- matematický nástroj, který nám pomáhá zkoumat rozhodování a interakce mezi účastníky ve strategických situacích
- nejedná se pouze o hry v pravém slova smyslu, poskytuje hluboký vhled do složitých rozhodovacích procesů
- modelujeme strategická rozhodnutí v oblastech, jako je ekonomie, politika, biologie či podnikový management
- průkopníky byli matematici jako John von Neumann a Oskar Morgenstern, kteří v roce 1944 publikovali knihu "Teorie her a ekonomické chování"

Základní pojmy

- Hra - situace, ve které dva nebo více hráčů podnikají vzájemné akce, přičemž výsledek každého hráče závisí na rozhodnutích všech ostatních
- Hráč - každý účastník hry, který má schopnost podnikat akce a ovlivňovat výsledek hry
- Strategie (akce) - plán akcí, kterým hráč dosahuje svých cílů v rámci hry
- Zisk/Užitek - výsledek hry pro každého hráče, může to být finanční odměna, ztráta nebo jiný typ výsledku
- Preference - individuální hodnocení různých možných výsledků hry
- Racionalita hráče - hráč při rozhodování volí strategii, která maximalizuje jeho očekávaný zisk na základě jeho informací a preferencí
- Hraní hry - rozhodování a provádění akcí hráčů během určité situace nebo interakce
- Řešení hry - koncept, který popisuje optimální strategie pro každého hráče, která vede k určitému výsledku hry

Základní pojmy teorie her z pohledu šachisty

TEORIE HER	ŠACHY
hra	šachy, výchozí postavení figur, pravidla hry
hráč	dva hráči: bílý a černý
prostor strategií	umístění a pohyb figurek a budování pozice na šachovnici
kooperace	omezená, protože každý hráč má vlastní cíl
výplatní funkce	výhra, prohra, remíza
typ konfliktu	antagonistický konflikt, výhra jednoho je prohra druhého
informace a racionalita	informace v šachách zahrnuje znalost aktuálního postavení figurek na šachovnici a historii tahů

Základní pojmy teorie her z pohledu konkurenčních firem

TEORIE HER	BOJ O TRH
hra	firmy soutěží o tržní podíl, zákazníky a zisk
hráč	např. dva hráči: firma ALFA a firma BETA
prostor strategií	různé možnosti, jak firmy mohou nastavit své cenové politiky, marketingové kampaně, inovace a další faktory
kooperace	v případě oboustranné výhodnosti kooperace firem možná, pokud není zakázána antimonopolním úřadem
výplatní funkce	zisk, ztráta
typ konfliktu	antagonistický nebo neantagonistický konflikt, což závisí na konkrétní situaci na daném trhu
informace a racionalita	hráči nemusejí mít dostupné všechny informace o ostatních hráčích. hráči zřejmě maximalizují svoje zisky (výplaty), ale mohou mít i jiné cíle

co z příkladů plyne?

- Teorie her předpokládá, že lze najít určité obecné vlastnosti rozhodovacích situací s více účastníky.
- Manažer, šachista i armádní generál řeší na obecné úrovni stejný problém – nalézt optimální rozhodnutí v situaci, kdy se snaží předvídat kroky protihráče.
- Teorie her má za cíl analyzovat široké spektrum konfliktních nebo kooperativních rozhodovacích situací s více účastníky.
- Pojem „hra“ má v moderní teorii her velmi obecný význam, který zahrnuje v podstatě jakoukoli konfliktní či kooperativní situaci mezi jedinci, firmami, armádami, státy, politickými stranami, biologickými druhy.
- Různorodost možných aplikačních oblastí zdůrazňuje univerzálnost modelů vyvinutých v rámci teorie her.
- Teorie her využívá pro zachycení konfliktních či kooperativních rozhodovacích situací matematický aparát. Matematika jednoznačně určuje předpoklady a pravidla hry.

Definice hry - hra v normálním tvaru

Naším výchozím teoretickým modelem bude hra v normálním tvaru, která je určena třemi množinami.

- množina n hráčů
$$Q = \{1, 2, \dots n\}$$
- množina prostoru strategií
$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$
kde X_i je prostor strategií i-tého hráče,
- množina výplatních funkcí
$$\{v_1(x_1, x_2, \dots, x_n), v_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, v_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\},$$
kde $v_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je výplatní funkce i-tého hráče.

Definice

Hra v normálním tvaru Γ je $(2n+1)$-tice
$$\Gamma = (Q, X_1, X_2, \dots, X_n, v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Hry s nulovým a nenulovým součtem

- historicky dříve byly zavedeny hry s nulovým součtem (minimaxová věta - John von Neumann v roce 1928)
- až později (1950-1951) byl definován koncept ekvilibria ve hrách s nenulovým součtem (J. Nash).
- hry s nulovým součtem jsou speciálním případem her s nenulovým součtem
- nejdříve probereme jednodušší variantu s nulovým součtem, poté zobecníme na hru s nenulovým součtem

Hra s nulovým/konstantním součtem

Definice

Mějme hru Γ. Řekneme, že Γ je hra s konstatním součtem $k \in \mathbb{R}$, pokud platí

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \sum_{i \in Q} v_i(\mathbf{x}) = k$$

Pokud je $k = 0$, pak je Γ hra s nulovým součtem.

U her s nenulovým součtem nelze najít $k \in \mathbb{R}$ takové, že by platila předchozí podmínka.

Pro libovolné k je možné hru s konstantním součtem transformovat na ekvivalentní hru s nulovým součtem. Platí totiž, že přičtením určité konstanty ke všem hodnotám výplatní funkce nedojde ke změně řešení (optimálních strategií).

Hra dvou hráčů s nulovým součtem

Dále budeme předpokládat hru dvou hráčů s nulovým součtem. Tato situace je známa jako antagonistický konflikt, kde jeden hráč může získat pouze na úkor toho, co druhý hráč ztratí. Platí základní vztah:

$$v_1(x_1, x_2) = -v_2(x_1, x_2).$$

Předpokládejme konečné prostory strategií, první hráč má k dispozici m možných strategií a druhý hráč n strategií. Pak můžeme množinu všech výher ve hře s nulovým součtem znázornit maticí

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$$

Výběr i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ odpovídá výběru i-té strategie prvním hráčem a výběr j-tého sloupce matice $\mathbf{A}$ odpovídá výběru j-té strategie druhým hráčem.

Příklad hry dvou hráčů s nulovým součtem

- uvažujme hru dvou hráčů, kde prostor strategií je dán dvojicí $X_1 = \{R, L\}$, $X_2 = \{R, L\}$
- hra se hraje tak, že každý hráč má jednu minci a volí, zda ji na stůl položí rubem (R) a nebo lícem (L)
- pokud se sejdou na stole mince otočené stejným stranami nahoru, tak první hráč dostane od druhého hráče 1 Kč
- v opačném případě zaplatí druhý hráč prvnímu 1 Kč
- jedná se o hru s nulovým součtem, co jeden hráč získá, to druhý hráč ztratí
- výplatní funkci můžeme vyjádřit ve formě matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Maticová hra

Hra je tedy určena maticí **A**, tento model se nazývá **maticová hra** a matici **A** nazýváme **výplatní maticí**. Při výběru i-té strategie prvním hráčem a j-té strategie druhým hráčem je hodnota výplatní funkce prvního hráče rovna prvku a_{ij} a hodnota výplatní funkce druhého hráče rovna $-a_{ij}$.

Jakákoliv matice může být považována za maticovou hru. Mějme například matici:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & -1 \\ -12 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matice představuje hru s nulovým součtem se dvěma hráči, ve které má první hráč tři možné strategie a druhý hráč čtyři možné strategie.

Dominované strategie

Jak budou hráči postupovat?

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & -1 \\ -12 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hru lze zjednodušit vyřazením strategií, které nemá smysl nikdy zvolit. První hráč nebude volit řádek matice, ve kterém jsou všechny prvky menší než odpovídající prvky v jiném řádku, a obdobně druhý hráč nebude volit ten sloupec matice, ve kterém jsou všechny prvky větší než odpovídající prvky v jiném sloupci.

Tyto strategie nazýváme **silně dominované strategie**. Pokud bychom připustili i rovnost prvků, jednalo by se o **slabě dominované strategie**. Při vyřazení slabě dominované strategie můžeme přijít o rovnovážné řešení, pokud jich existuje více.

Dominované strategie

V příkladu vidíme, že druhá strategie druhého hráče je silně dominovaná strategie, protože ji dominuje třetí strategie, dominující strategie. Racionální druhý hráč nikdy nezvolí druhý sloupec.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & -1 \\ -12 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hru tedy můžeme zjednodušit na následující:

$$\begin{pmatrix} 4 & . & 3 & 5 \\ 5 & . & 2 & -1 \\ -12 & . & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Dominované strategie

Ve zbývající matici je třetí strategie prvního hráče silně dominovaná strategie, protože ji dominuje první strategie, dominující strategie. Racionální první hráč nikdy nezvolí třetí řádek.

$$\begin{pmatrix} 4 & . & 3 & 5 \\ 5 & . & 2 & -1 \\ -12 & . & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

A hru tedy můžeme zjednodušit na následující:

$$\begin{pmatrix} 4 & . & 3 & 5 \\ 5 & . & 2 & -1 \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Dominované strategie

Ve zbývající matici je první strategie druhého hráče silně dominovaná strategie, protože ji dominuje třetí strategie.

$$\begin{pmatrix} 4 & . & 3 & 5 \\ 5 & . & 2 & -1 \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

A hru tedy můžeme zjednodušit na následující:

$$\begin{pmatrix} . & . & 3 & 5 \\ . & . & 2 & -1 \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Dominované strategie

Ve zbývající matici je druhá strategie prvního hráče silně dominovaná strategie

$$\begin{pmatrix} . & . & 3 & 5 \\ . & . & 2 & -1 \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

A hru tedy můžeme zjednodušit na následující:

$$\begin{pmatrix} . & . & 3 & 5 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Dominované strategie

V posledním kroku už je zcela zjevné, že druhý hráč dá přednost třetímu sloupci před čtvrtým, protože vybírá mezi alternativou prohrát 3 a nebo prohrát 5.

$$\begin{pmatrix} . & . & 3 & 5 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Dospěli jsme k řešení, kde optimální strategií pro prvního hráče je volba prvního řádku a pro druhého hráče je optimální zvolit třetí sloupec. První hráč tak získává 3 a druhý hráč ztrácí 3. Tím jsme úspěšně identifikovali optimální strategie prostřednictvím postupné eliminace dominovaných řádků a sloupců, i když tento postup vyšel spíše jako výjimka. Postupnou eliminací můžeme zjednodušit hru, nalezení optimálního řešení se stává výjimečně.

Příklad hry

Dále uvedeme konkrétní příklad hry.

- mějme dva hráče, každý dostane dvě karty
- první hráč drží černou pětku a červenou dvojku
- druhý hráč má černou pětku a červenou trojku
- na signál každý hráč ukáže jednu kartu
- v případě shody v barvě obdrží první hráč od druhého hráče absolutní hodnotu rozdílu ukázaných karet
- pokud se barva liší, hráč s vyšší hodnotou obdrží součet hodnot ukázaných karet
- jedná se o hru dvou hráčů s nulovým součtem, každý hráč má dvě strategie
- výplatní matice je následující:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad hry

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

- jak můžeme postupovat?
- z pohledu prvního hráče je evidentní, že volba druhého řádku je nevýhodná, tedy strategie červené dvojky je dominovaná strategií černé pětky
- z pohledu druhého hráče je nevýhodné volit druhý sloupec, protože je dominovaný prvním sloupcem, tedy strategie červené trojky je dominovaná strategií černé pětky
- řešením tedy je, že první hráč ukáže černou pětku, druhý hráč rovněž ukáže černou pětky
- pokud se kterýkoliv z hráčů od této strategie odchýlí, může ztratit

Nashova rovnováha

- optimální strategie hráčů ve hře najdeme pomocí **Nashovy rovnováhy**
- Nashova rovnováha je takové řešení, ve kterém platí, že když se některý z hráčů nebude držet své optimální strategie, zatímco soupeř ano, jeho výhra se sníží (v nejlepším případě zůstane stejná).
- Nashova rovnováha ve hře dvou hráčů nastává, pokud najdeme strategie x^0 a y^0, pro které platí

$$v_1(x, y^0) \leq v_1(x^0, y^0) \text{ a } v_2(x^0, y) \leq v_2(x^0, y^0)$$

- U her s nulovým součtem můžeme platí $v_1(x, y) = -v_2(x, y)$ a můžeme tedy zjednodušit na

$$v_1(x, y^0) \leq v_1(x^0, y^0) \leq v_1(x^0, y)$$

- Řekneme, že takové strategie x^0, y^0 představují Nashovu rovnováhu a nazýváme je rovnovážnými strategiemi, hodnotu $v_1(x^0, y^0)$ nazýváme cenou hry

Nashova rovnováha

- Nashovu rovnováhu maticové hry získáme nalezením sedlového prvku matice **A**
- sedlový prvek matice je číslo, které je největší ve svém sloupci a zároveň nejmenší ve svém řádku (neboť druhý hráč se snaží minimalizovat výhru prvního hráče)
- Jestliže a_{ij} je sedlový prvek, potom i-tá strategie prvního hráče a j-tá strategie druhého hráče jsou rovnovážné strategie
- hodnotu a_{ij} potom nazýváme cenou hry
- takové řešení nazveme Nashovou rovnováhou v ryzích strategiích

Hledání sedlového bodu matice

Vrátíme se k příkladu. Označíme závorkami () všechna sloupcová maxima a [ ] všechna řádková minima. Sedlový prvek je potom označen oběma závorkami zároveň.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & [(3)] & (5) \\ (5) & (7) & 2 & [\text{-}1] \\ [\text{-}12] & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tedy rovnovážné řešení v ryzích strategiích je pro prvního hráče první strategie a pro druhého hráče třetí strategie.

Hledání sedlového bodu matice

Při hledání sedlového bodu matice (Nashovy rovnováhy) mohou nastat tyto tři případy:

- matice má jeden sedlový prvek $\rightarrow$ prvek představuje Nashovu rovnováhu
- matice má více sedlových prvků, jejichž hodnoty jsou si rovny $\rightarrow$ tyto sedlové prvky určují alternativní rovnovážné strategie
- matice nemá žádný sedlový prvek $\rightarrow$ neexistuje rovnovážné řešení v ryzích strategiích

Hledání sedlového bodu matice

Matice s více sedlovými prvky:

$$\begin{pmatrix} [(0)] & 2 & [(0)] \\ [(0)] & 1 & [(0)] \\ [(0)] & (3) & [(0)] \end{pmatrix}$$

Matice s žádným sedlovým prvkem:

$$\begin{pmatrix} (0) & -1 & [\text{-}2] \\ [\text{-}2] & (0) & (1) \end{pmatrix}$$

Hra kámen - nůžky - papír

- pokud nenajdeme sedlový prvek, neznamená to, že hráči nemají žádné rovnovážné strategie
- uvažujme známou hru kámen - nůžky - papír
- jedná se o hru dvou hráčů s nulovým součtem
- může skončit výhrou (1), prohrou (-1) nebo remízou (0)
- každý hráč volí ze tří strategií - kámen, nůžky, nebo papír

	kámen	nůžky	papír
kámen	0	(1)	[-1]
nůžky	[-1]	0	(1)
papír	(1)	[-1]	0

Hra kámen - nůžky - papír

- u hry kámen - nůžky - papír neexistuje Nashovo rovnovážné řešení v ryzích strategiích
- přesto danou hru běžně hrajeme a známe odpovídající rovnovážnou strategii, která spočívá v náhodném výběru z prostoru strategií
- pro oba hráče je rovnovážnou strategií vektor $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
- čísla představují pravděpodobnosti, že hráč bude volit první, druhou, nebo třetí strategii
- tento typ strategií nazýváme **smíšenými strategiemi**
- i pro smíšené strategie platí, že hráč, který se od rovnovážné strategie odchýlí, nemůže nic získat, ale může ztratit

Smíšené rozšíření maticové hry

- řešení, kdy používáme smíšené strategie, nazýváme smíšené rozšíření maticové hry
- označíme strategie prvního hráče X, strategie druhé hráče Y a prostory strategií představují vektory pravděpodobností

$$X = \{\mathbf{x}; \mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \ldots, x_m], \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$Y = \{\mathbf{y}; \mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \ldots, y_n], \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \mathbf{y} \geq 0\}$$

- hodnota výplatní funkce potom udává očekávanou střední hodnotu výhry
- v případě her s konstantním součtem stačí sledovat výplatní funkci prvního hráče

$$v_1(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\ \mathbf{y}$$

Základní věta maticových her

Pro maticové hry je důležitá následující věta.

Základní věta maticových her

Každá maticová hra má Nashovo rovnovážné řešení ve smíšených strategiích.

- tedy pro každou matici $\mathbf{A}$ existují vektory $\mathbf{x}^0$ a $\mathbf{y}^0$, pro které platí nerovnice
$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}$$
- tyto nerovnice jsou matematickou definicí Nashovy rovnováhy ve smíšených strategiích
- pokud je maticová hra rozměru m x 2 nebo 2 x n, dá se řešit grafickou metodou
- v obecném případě získáme rovnovážné smíšené strategie řešením úlohy lineárního programování

Maticové hry typu 2x2

Nejprve si ukážeme řešení na hře typu 2x2.
Předpokládejme výplatní matici, která nemá sedlový bod:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Hledáme optimální smíšené strategie
$\mathbf{x}^0 = (x_1, x_2), \mathbf{y}^0 = (y_1, y_2); x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 = 1; x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$
Označíme v cenu hry a pro tyto optimální smíšené strategie musí platit:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \;\; a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \;\; a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v$$

Maticové hry typu 2x2

Řešením předchozí soustavy rovnic a s využitím znalosti $x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 = 1$ získáme neznámé x_1, x_2, y_1, y_2, v. Pro zjednodušení označme $a = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a}$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a}$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a}$$

$$v = \frac{\det A}{a}$$

Determinant matice spočteme jako $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Maticová hra 2x2 - příklad

Uvažujme výplatní matici:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Snadno ověříme, že matice nemá žádný sedlový bod.

$$\begin{pmatrix} (4) & [2] \\ [1] & (3) \end{pmatrix}$$

Maticová hra 2x2 - příklad

Optimální strategie získáme dosazením do vzorců.

$$a = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 4 + 3 - 1 - 2 = 4$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4.3 - 1.2 = 10$$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$v = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Maticová hra 2x2 - příklad pokračování

Tedy

$$\mathbf{x}^{0T} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{y}^{0T} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

$$v = \frac{5}{2}$$