Rekurence

Nechť $\mathbb{N}$ je množina všech přirozených čísel (včetně 0), M je libovolná množina, $f : \mathbb{N} \to M$ je funkce.

Rekurence pro funkci f (alternativně: **rekurzivní definice funkce** f, **induktivní definice funkce** f) je zápis

$$f(n) = g(f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-k), n) \text{ pro } n \geq k$$

(induktivní rovnice)

$$f(i) = b_i \text{ pro } 0 \leq i < k$$

(počáteční podmínky),

kde k je pevně dané kladné celé číslo, $b_i \in M$ pro $0 \leq i < k$, $g : M^k \times \mathbb{N} \to M$.

Vyřešit uvedenou **rekurenci** znamená najít explicitní vyjádření funkce f.

Funkce f se také nazývá **posloupnost** a místo $f(n)$ píšeme a_n (nebo u_n, y_n,...). Hovoříme pak o rekurenci pro posloupnost a_n (alternativně: o rekurzivní definici posloupnosti a_n, o induktivní definici posloupnosti a_n).

Příklad. Funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ je zadána rekurencí (je definována rekurzivně) takto:

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(n) = \sqrt{f(n-1)f(n-2)} \text{ pro } n \geq 2$$

Zde tedy $M = \mathbb{R}^+$, $k = 2$, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $g(x_1, x_2, y) = \sqrt{x_1 x_2}$. Řešením rekurence je explicitní vyjádření funkce f, tedy

$$f(n) = 2^{\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)}$$

PŘÍKLAD. Funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je zadána rekurencí (je definována rekurzivně) takto:

$$f(0) = 1, \; f(n) = f(n-1) \cdot n \text{ pro } n \geq 1$$

Zde tedy $M = \mathbb{N}$, $k = 1$, $b_0 = 1$, $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x, y) = x \cdot y$. Řešením rekurence je explicitní vyjádření funkce f, tedy

$$f(n) = n!$$