PŘÍKLAD:

$f(x) = \sqrt{x}$; $f(x)$ je spojitá a rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$.
Předp., že $f(x) = c$, kde $c \in \mathbb{Z}$. Pak $\sqrt{x} = c$, $x = c^2$, $x \in \mathbb{Z}$.
Tedy pro $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x$, máme:

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor.$$

2.2 LOGARITMY

Logaritmická funkce $\log_a x$, kde a je reálné číslo, $a > 1$, je spojitá a rostoucí pro $x \geq 1$.
Pokud a je celé číslo, pak $\log_a x$ nabývá celočíselných hodnot pouze pro celá čísla x.

[Když a je celé, b je celé, $b \geq 0$.

$$\log_a x = b \iff a^b = x$$]

Podle Tvrzení 2.1.1 pak pro všechna reálná čísla x, $x \geq 1$, máme

$$\cancel{\lfloor \log_a (\lfloor x \rfloor) \rfloor = \log_a x} \quad \lfloor \log_a \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor \log_a x \rfloor,$$

$$\lceil \log_a \lceil x \rceil \rceil = \lceil \log_a x \rceil.$$

$\lg n = \log_2 n$ (binární logaritmus)

$\ln n = \log_e n$ (přirozený logaritmus)

$\lg n = \log_{10} n$ (dekadický logaritmus)

Pro různá kladná reálná čísla x, a, b, $a \neq 1$, $b \neq 1$, platí:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

[$\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$

$b^{\log_b a \cdot \log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x,$

$b^{\log_b x} = x,$

tedy $b^{\log_b a \cdot \log_a x} = b^{\log_b x}$, $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$

– využili jsme toho, že fce $f(x) = b^x$ je prostá]

POZNÁMKA

Velmi důležitá aplikace binárního logaritmu:

(I) $\lceil \lg(n+1) \rceil$ je počet bitů v binární reprezentaci kladného celého čísla n

__Zdůvodnění:__

Nechť $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$.

$2^k \leq n < 2^{k+1} \iff$ binární reprezentace čísla n má $k+1$ bitů

$2^k \leq n < 2^{k+1} \iff 2^k < n+1 \leq 2^{k+1} \iff k < \lg(n+1) \leq k+1$

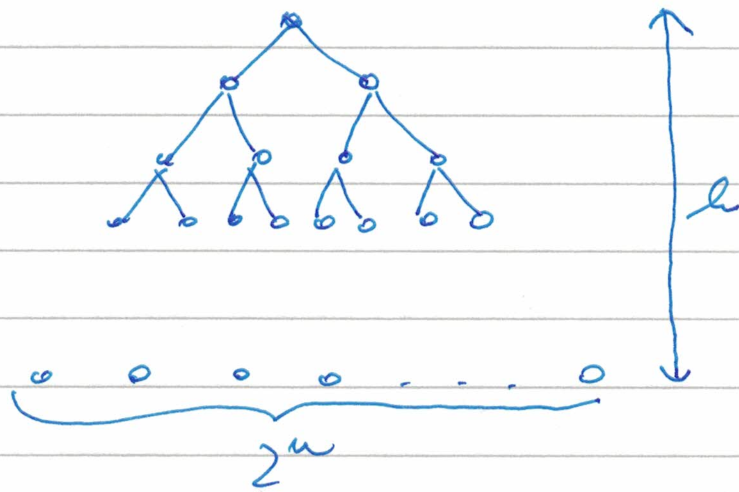
$\iff \lceil \lg(n+1) \rceil = k+1$

Tedy: binární reprezentace čísla n má $\lceil \lg(n+1) \rceil$ bitů.

(II) $\lceil \lg n \rceil$ je minimální hloubka binárního stromu s n listy

Zdůvodnění:

hloubka:	počet listů:
0	1
1	2
2	4
3	8
⋮	⋮
h	2^h



strom s n listy má minimální hloubku h

$\iff 2^{h-1} < n \leq 2^h$

$\iff h-1 < \lg n \leq h$

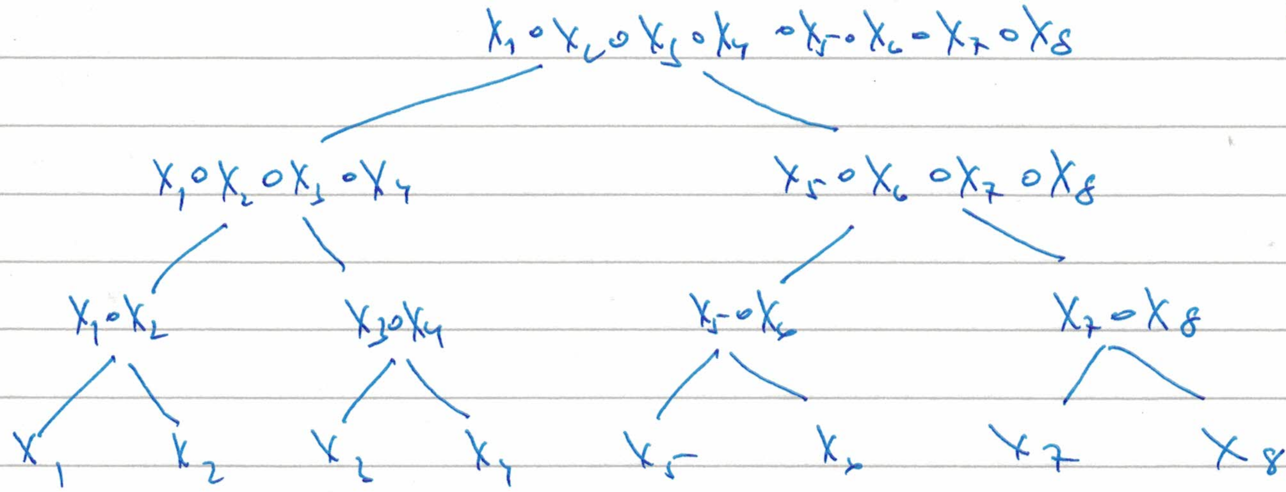
$\iff \lceil \lg n \rceil = h$

Tedy: Strom s n listy má minimální hloubku $\lceil \lg n \rceil$.

(III) $\lceil \lg n \rceil$ je počet paralelních kol při výpočtu $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$, kde $\circ$ je asociativní binární operace

Zdůvodnění:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ budou listy binárního stromu; ten bude mít hloubku $\lceil \lg n \rceil$, v hloubce $\lceil \lg n \rceil$ proběhne 1. kolo výpočtu, v hloubce $\lceil \lg n \rceil - 1$ proběhne 2. kolo výpočtu, ..., v hloubce 1 proběhne kolo výpočtu číslo $\lceil \lg n \rceil$; např. pro $n = 8$ máme $\lceil \lg 8 \rceil = \lceil 3 \rceil = 3$ paralelní kola:



Často se setkáme také s umocňováním a iterováním logaritmických funkcí. K tomu se používá následující notace (n je libovolné kladné reálné číslo, k je libovolné kladné celé číslo).

$$\lg^k n = (\lg n)^k$$

$\lg\lg n = \lg(\lg n)$, pokud $\lg n \geq 0$

$\lg\lg\lg n = \lg(\lg(\lg n))$, pokud existuje $\lg(\lg n) > 0$

$$\lg^{(0)} n = n$$

$\lg^{(k)} n = \underbrace{\lg\lg\ldots\lg}_{k} n$, pokud existuje $\lg^{(k-1)} n > 0$

Důležitou funkcí je iterovaný logaritmus:

$$\lg^* n = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid i \geq 0, \lg^{(i)} n \leq 1\}$$

~~[illegible]~~: Funkce $\lg^*$ roste velmi pomalu:

$\lg^* 2 = 1,\ \lg^* 4 = 2,\ \lg^* 16 = 3,\ \lg^* 65536 = 4,$

$\lg^* 2^{65536} = 5$;

Přitom číslo 2^{65536} je obrovské, v desítkové soustavě má více než 19 600 cifer

$$\left[\, 2^{65536} > 2^{65530} = \left(2^{10}\right)^{6553} = (1024)^{6553} > (1000)^{6553} = \left(10^3\right)^{6553} = 10^{3\cdot 6553} = 10^{19659} \,\right]$$

Také funkce $\lg\lg n$, $\lg\lg\lg n$ rostou velmi pomalu,

například

$$\lg\lg 2^{65536} = 16, \quad \lg\lg\lg 2^{65536} = 4.$$

Inverzní funkcí k funkci přirozený logaritmus je funkce e^x (někdy se značí $\exp(x)$).

2.3. BINOMICKÉ KOEFICIENTY

Nechť n je nějaké číslo, k je celé číslo. Binomický koeficient $\binom{n}{k}$ (čteme "n nad k") definujeme následovně

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k < 0 \\ 1 & \text{pro } k = 0 \\ \dfrac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 1} & \text{pro } k > 0. \end{cases}$$

Jestliže k, n jsou celá čísla, $0 \le k \le n$, pak $\binom{n}{k}$ je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.

BINOMICKÁ VĚTA

Pro všechna nezáporná celá čísla n platí

$$(x+y)^n = \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

IDENTITY PRO BINOMICKÉ KOEFICIENTY

(1) Nechť n je nezáporné celé číslo a k je celé číslo. Pak

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(2) Nechť n je reálné číslo a k je celé číslo. Pak

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

(3) Nechť k a n jsou celá čísla, $0 \le k \le n$. Pak

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

(4) Nechť n je reálné číslo a k je celé číslo, $k \neq 0$. Pak

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

PŘÍKLAD 2.3.1

Dosazením $x = y = 1$ do binomické věty dokážeme, že pro každé nezáporné celé číslo n je

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

3. ASYMPTOTIKA

V této kapitole se budeme zabývat funkcemi, které zobrazují množinu kladných celých čísel do množiny reálných čísel. Symbol n bude vždy (neřekne-li něco jiného) značit kladné celé číslo.

3.1. ASYMPTOTICKÁ HIERARCHIE

3.2. O-, Θ- a Ω-NOTACE

Pro funkci $g(n)$ definujeme množiny $O(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $\Omega(g(n))$ takto:

$f(n) \in O(g(n)) \iff$ existují reálná čísla c, n_0, $c > 0$, taková, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$|f(n)| \leq c\,|g(n)|$$

$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff$ existují reálná čísla c_1, c_2, n_0, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, taková, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$c_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2 \cdot |g(n)|$$

$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff$ existují reálná čísla c, n_0, $c > 0$, taková, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$c \cdot |g(n)| \leq |f(n)|$$

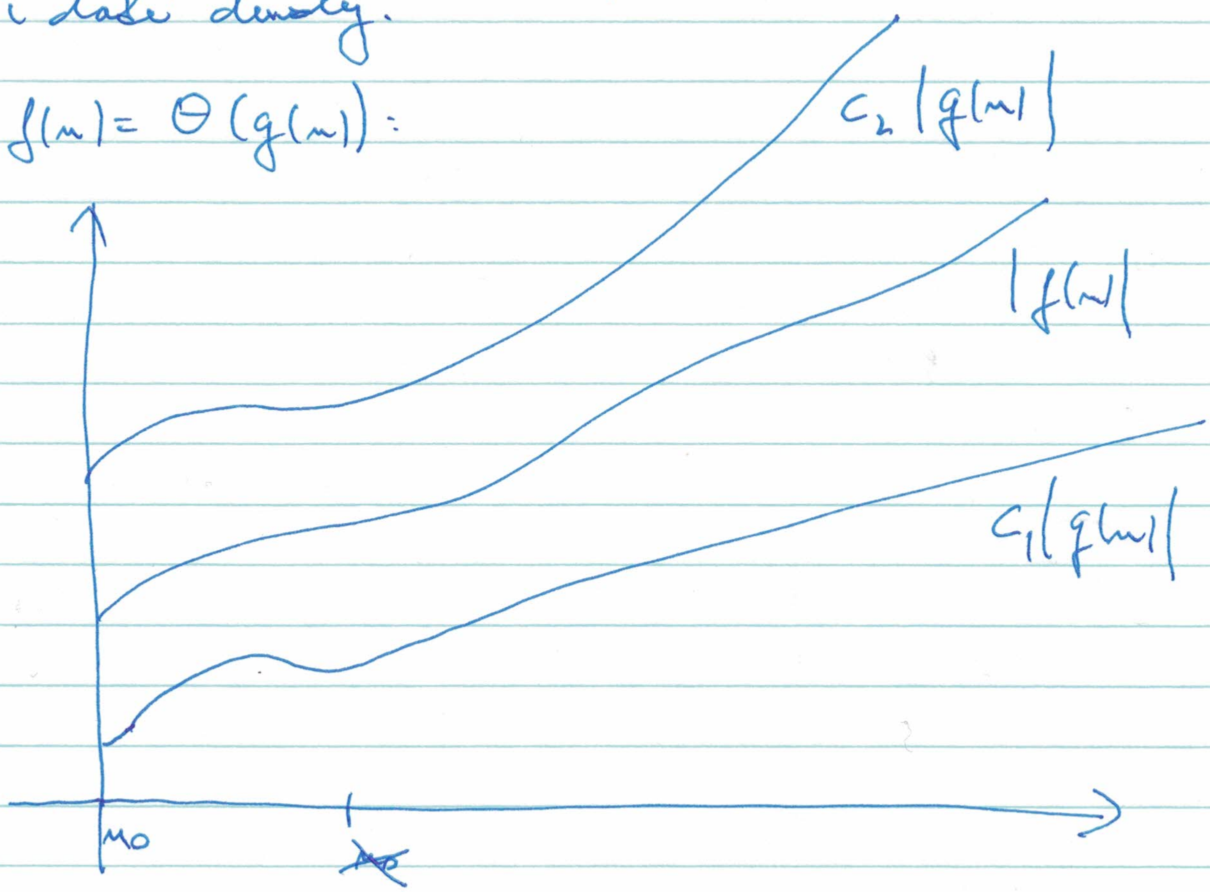
$O(g(n))$, $\Theta(g(n))$ a $\Omega(g(n))$ jsou množiny funkcí, ale

místo $f(n) \in O(g(n))$, $f(n) \in \Theta(g(n))$, $f(n) \in \Omega(g(n))$

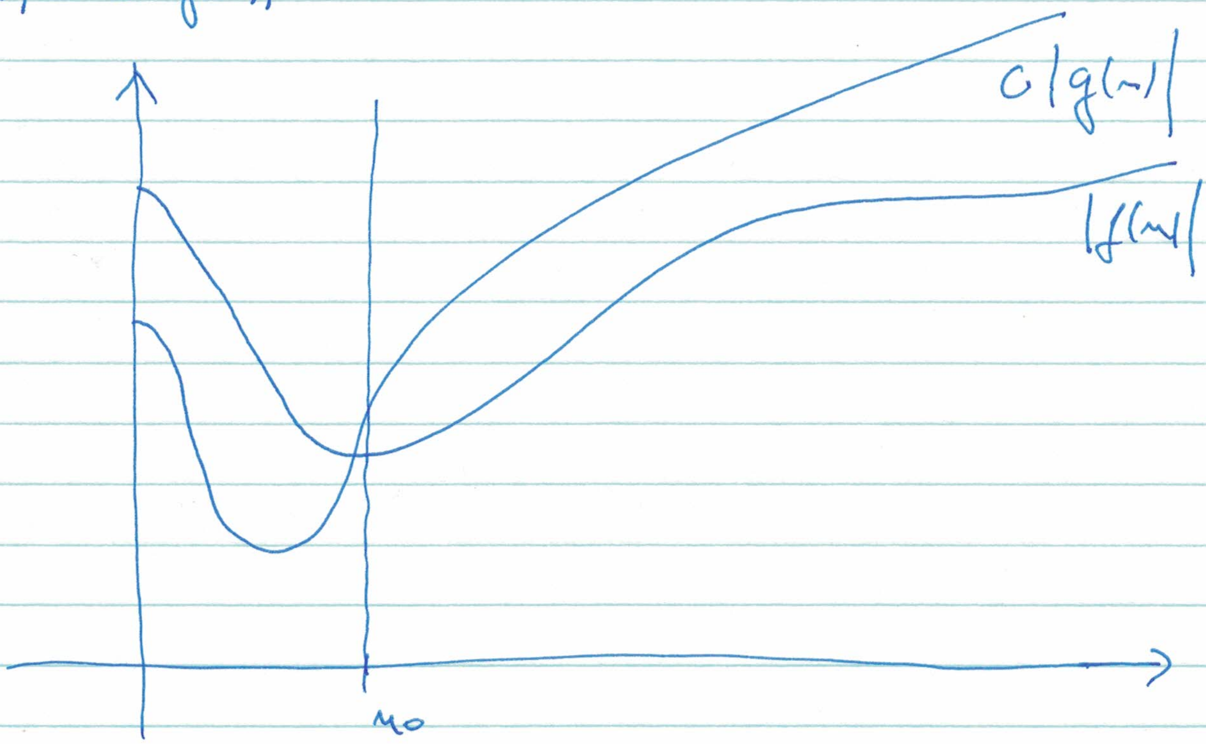
píšeme obvykle $f(n) = O(g(n))$, $f(n) = \Theta(g(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$

To má několik důvodů. Jedním je tradice.
Dále často čteme "$f(n)$ je velké theta $g(n)$", nikoli "$f(n)$ patří do velkého theta $g(n)$".
Jsou i další důvody.

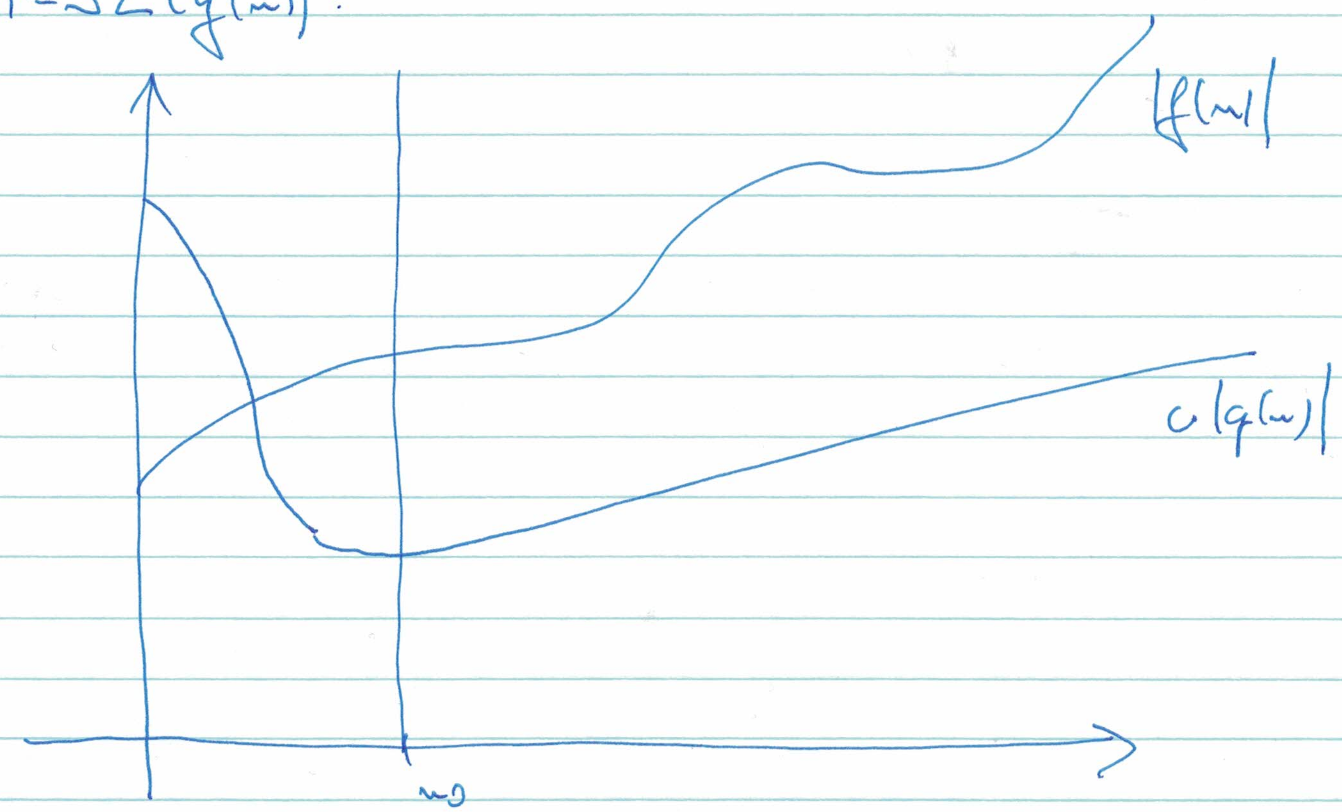
$f(n) = \Theta(g(n))$:



$f(n) = O(g(n))$:



$f(n) = \Omega(g(n))$:



Jedna z důležitých vlastností ~~asymptotické notace~~ O-, Θ- a Ω- notací je tranzitivita. Například

$$f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(h(n)) \implies f(n) = O(h(n)).$$

~~3.2.1.~~ PŘÍKLAD 3.2.1.

Ukážeme, že $(n+1)^2 = \Theta(n^2)$.

Hledáme kladná čísla c_1, c_2, n_0, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, tak, aby pro všechna n, $n \geq n_0$, platilo

$$c_1 \cdot |n^2| \leq |(n+1)^2| \leq c_2 \cdot |n^2|$$

$$c_1 n^2 \leq (n+1)^2 \leq c_2 n^2$$

$$c_1 n^2 \leq n^2 + 2n + 1 \leq c_2 n^2 \quad \Big| : n^2$$

$$c_1 \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c_2$$

Volíme $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $n_0 = 1$.

PŘÍKLAD 3.2.2.

Ukážeme, že $\frac{n^2-1}{n+1} = \Theta(n)$.

Hledáme kladná čísla c_1, c_2, n_0, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, tak, aby pro všechna n, $n \geq n_0$, platilo

$$c_1 |n| \leq \left| \frac{n^2-1}{n+1} \right| \leq c_2 |n|$$

$$c_1 n \leq |n-1| \leq c_2 n$$

$$c_1 n \leq n - 1 \leq c_2 n$$

Volíme $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$, $n_0 = 2$.

$$\left[\quad \frac{1}{2} n \leq n - 1 \quad \Big| \cdot 2 \right.$$

$$\left. \begin{aligned} n &\leq 2n - 2 \\ 2 &\leq n \end{aligned} \quad \right]$$