Úlohy 6

Na případné chyby mě prosím upozorněte. Děkuji.

1. Jsou dány množiny $A = \{1,2\}$ a $B = \{2,3,\{4,5\}\}$ Určete $(A \times B) \cap (B \times A)$.

2. Je dána množina $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Relace jsou dány následovně:

   (a) $R_1 = \{(x,y); x \in M, y \in M, x + y = 9\}$;

   (b) $R_2 = \{(x,y); x \in M, y \in M, x < y\}$;

   (c) $R_3 = \{(x,y); x \in M, y \in M, x^2 - y < 0\}$.

   i) Určete relaci R_i výčtem.

   ii) Zakreslete příslušný uzlový a kartézský graf.

   iii) Určete také první a druhý obor relace R_i.

   Řešení:

   (a) **Určení relace R_i výčtem:**

   - Relace $R_1 = \{(x,y); x \in M, y \in M, x + y = 9\}$:

$$R_1 = \begin{Bmatrix} (1,8),(2,7),(3,6),(4,5), \\ (5,4),(6,3),(7,2),(8,1) \end{Bmatrix}$$

   - Relace $R_2 = \{(x,y); x \in M, y \in M, x < y\}$:

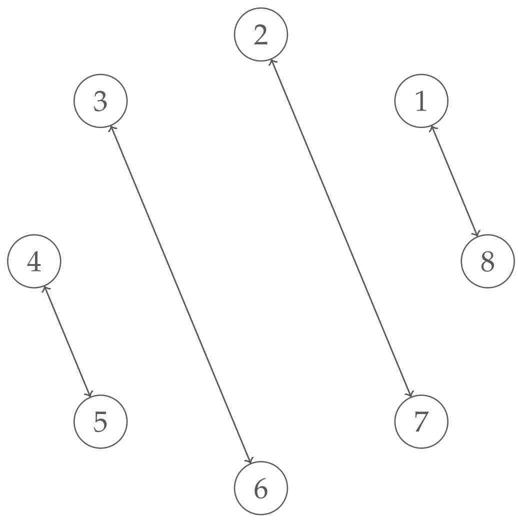
$$R_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8), \\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8), \\ (3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8), \\ (4,5),(4,6),(4,7),(4,8), \\ (5,6),(5,7),(5,8), \\ (6,7),(6,8), \\ (7,8) \end{array} \right\}$$

   - Relace $R_3 = \{(x,y); x \in M, y \in M, x^2 - y < 0\}$:

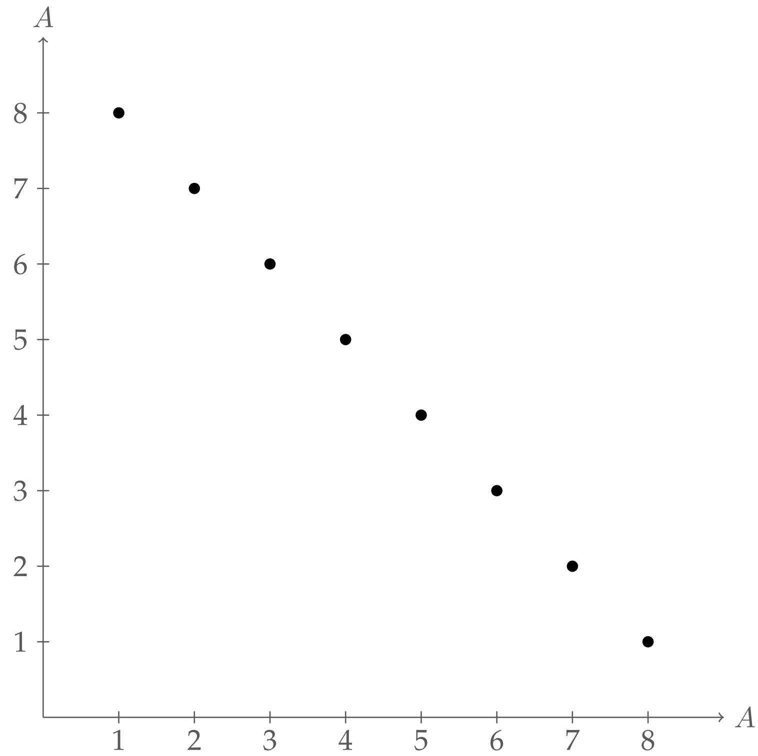
$$R_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8), \\ (2,5),(2,6),(2,7),(2,8), \end{array} \right\}$$

   (b) **Zakreslete příslušný uzlový a kartézský graf:**

   - **Uzlový graf pro R_1:**



- **Kartézský graf pro R_1:**



Stejným způsobem lze vytvořit uzlový a kartézský graf pro relace R_2 a R_3.

(c) **Určete první a druhý obor relace R_i:**

- Relace R_1:

$$\text{První obor} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$
$$\text{Druhý obor} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

- Relace R_2:

$$\text{První obor} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$
$$\text{Druhý obor} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

- Relace R_3:

$$\text{První obor} = \{1, 2\},$$
$$\text{Druhý obor} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

3. K relacím R_2 a R_3 z předchozí úlohy určete inverzní relace.

Řešení:

- Relace $R_2 = \{(x, y); x \in M, y \in M, x < y\}$:
  Inverzní relace k R_2, označíme ji R_2^{-1}, je definována jako:

  $$R_2^{-1} = \{(y, x); x \in M, y \in M, x < y\}$$

  Tedy:

  $$R_2^{-1} = \{(x, y); x \in M, y \in M, x > y\}$$

  Nebo také výčtem

  $$\begin{aligned} R_2^{-1} = \{&(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(7,1),(8,1),\\ &(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(7,2),(8,2),\\ &(4,3),(5,3),(6,3),(7,3),(8,3),\\ &(5,4),(6,4),(7,4),(8,4),\\ &(6,5),(7,5),(8,5),\\ &(7,6),(8,6),\\ &(8,7)\} \end{aligned}$$

- Relace $R_3 = \{(x, y); x \in M, y \in M, x^2 - y < 0\}$:
  Inverzní relace k R_3:

  $$R_3^{-1} = \{(x, y); x \in M, y \in M, y^2 - x < 0\}$$

4. Je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Relace jsou dány následovně:

   (a) $R_1 = \{(x, y); x \in M, y \in M, x = 5\}$;

   (b) $R_2 = \{(x, y); x \in M, y \in M, x \geq y\}$;

   (c) $R_3 = \{(x, y); x \in M, y \in M, x^3 - y < 0\}$.

   i) Určete relaci R_i výčtem.

   ii) Zakreslete příslušný uzlový a kartézský graf.

   iii) Určete také první a druhý obor relace R_i.

5. K relacím R_2 a R_3 z předchozí úlohy určete inverzní relace.

6. Je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Utvořte relaci $R \circ Q$, jestliže

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (4, 4), (2, 3)\} \quad \text{a} \quad Q = \{(1, 1), (2, 4), (4, 3)\}.$$

Rozhodněte a zdůvodněte, jaké vlastnosti relace má. Je relace $R \circ Q$ je nějakým speciálním typem relace (viz další podkapitola)?

Řešení:

Relace $R \circ Q$ (složení relací R a Q) je definována jako:

$$R \circ Q = \{(x, z); \exists y \text{ takové, že } (x, y) \in R \text{ a } (y, z) \in Q\}.$$

Výsledná relace $R \circ Q$ tedy bude:

$$R \circ Q = \{(1, 4), (4, 3)\}$$

Relace $R \circ Q = \{(1, 4), (4, 3)\}$ není žádným speciálním typem relace, není reflexivní (neobsahuje $(1, 1)$), není symetrická (obsahuje $(1, 4)$, ale nikoli $(4, 1)$) ani tranzitivní (obsahuje $(1, 4)$ a $(4, 3)$, ale ne $(1, 3)$).

7. Je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Utvořte relaci $R \circ Q$, jestliže

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\} \quad \text{a} \quad Q = \{(2, 5), (3, 6), (4, 2)\}.$$

Rozhodněte a zdůvodněte, jaké vlastnosti relace má. Je relace $Q \circ R$ je nějakým speciálním typem relace (viz další podkapitola)?

8. Je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Utvořte relaci $Q \circ R$, jestliže

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \quad \text{a}$$

$$Q = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (4, 5)\}.$$

Rozhodněte a zdůvodněte, zda relace $R \circ Q$ je nějakým speciálním typem relace (viz další podkapitola).

9. Za předpokladu, že je to možné, utvořte relace $R \circ Q$ a $Q \circ R$, kde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}; y = \frac{1}{x}\}$ a $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2\}$.

Řešení:

Složení $R \circ Q$:

$$R \circ Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}; y = \frac{1}{x^2}\}.$$

Složení $Q \circ R$:

$$Q \circ R = \{(x, y) \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}; y = \frac{1}{x^2}\}.$$

Obě složené relace tedy vedou ke stejné množině.

$$R \circ Q = Q \circ R = \{(x, y) \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}; y = \frac{1}{x^2}\}.$$

10. Je dána šachovnice o rozměru 8×8 (řádky $\times$ sloupce), kde řádky i sloupce jsou označeny čísly z $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Symbol R_{ab}, je konstruován následovně: R značí jednu z figur (V)ěž, (D)áma, (K)rál a (S)třelec. Dvojice ab pak značí pole, na kterém daná figura stojí. Tedy K_{23} reprezentuje krále stojícího na poli $(2, 3)$. Relace $R_{ab} \subset M \times M$ je definována jako množina polí, která jsou ohrožena figurou R z pole $(2, 3)$ (může na dané pole táhnout, pokud je prázdné). Určete výčtem a zakreslete jak uzlový, tak kartézský graf relace:
    (a) V_{23};
    (b) D_{34};
    (c) S_{43}.
11. Z předchozí úlohy určete množinu polí, která jsou ohrožena alespoň dvěma figurami.
12. Uvažujte relaci R na množině lidí danou aRb, jestliže a a b mají stejnou barvu očí. Je relace reflexivní? Antireflexivní? Symetrická? Antisymetrická? Tranzitivní? Souvislá? Je to speciální typ relace?
13. Relace R je dána následovně:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; x - y = 1\}.$$

Určete vlastnosti relace R a řádně zdůvodněte, proč dané vlastnosti má či nemá.

Řešení:

(a) *Reflexivní:* Relace R není reflexivní, protože například $(1, 1) \notin R$, jelikož $1 - 1 = 0 \neq 1$.

(b) *Antireflexivní:* Relace R je antireflexivní, protože pro žádné $x \in \mathbb{Z}$ neplatí $(x, x) \in R$. Důvodem je, že $x - x = 0 \neq 1$.

(c) *Symetrická:* Relace R není symetrická, protože například $(2, 1) \in R$, ale $(1, 2) \notin R$, jelikož $1 - 2 \neq 1$.

(d) *Silně antisymetrická:* Relace R je silně antisymetrická. Protože

$$x - y = 1 \Rightarrow y - x = -1, \text{ tedy } y - x \neq 1,$$

(e) *Slabě antisymetrická:* Pokud je silně antisymetrická, pak je i slabě antisymetrická.

(f) *Tranzitivní:* Relace R není tranzitivní, protože $(2, 1) \in R$ a $(1, 0) \in R$, ale $(2, 0) \notin R$, jelikož $2 - 0 \neq 1$.

(g) *Souvislá:* Relace R není souvislá. Souvislá relace znamená, že pro každé $x, y \in \mathbb{Z}$, kde $x \neq y$, platí buď $(x, y) \in R$, nebo $(y, x) \in R$. U relace R to neplatí, protože například $(3, 5) \notin R$ a $(5, 3) \notin R$ a $3 \neq 5$, jelikož ani $3 - 5 = -2$, ani $5 - 3 = 2$ se nerovná 1.

Upozornění: Pro důkaz toho, že relace vlastnost nemá, stačí uvést jediný protipříklad. Ovšem pokud relace danou vlastnost má, je potřeba to skutečně dokázat a nestačí uvést jeden (ani několik) příkladů.

14. Relace R je dána následovně:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; xy \geq 0\}.$$

Určete vlastnosti relace R. Pokud relace některou vlastnost nemá, uveďte příklad. Pokud danou vlastnost má, dokažte to.

15. Relace R je dána následovně:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x > y\}.$$

Určete vlastnosti relace R. Pokud relace některou vlastnost nemá, uveďte příklad. Pokud danou vlastnost má, dokažte to.

16. Relace R je dána následovně:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x^2 > y\}.$$

Určete vlastnosti relace R. Pokud relace některou vlastnost nemá, uveďte příklad. Pokud danou vlastnost má, dokažte to.

17. Relace R je dána následovně:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}; x > y\}.$$

Určete vlastnosti relace R. Pokud relace některou vlastnost nemá, uveďte příklad. Pokud danou vlastnost má, dokažte to.

18. Relace R je dána následovně:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}; x^2 > y\}.$$

Určete vlastnosti relace R. Pokud relace některou vlastnost nemá, uveďte příklad. Pokud danou vlastnost má, dokažte to.

19. Uvažujme relaci R na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}.$$

Doplňte relaci R co nejúsporněji tak, aby byla tranzitivní. Tj. přidejte nejmenší možný počet dvojic tak, aby již relace byla tranzitivní.

Řešení:

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}.$$

20. Uvažujme relaci R na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 5)\}.$$

Doplňte relaci R co nejúsporněji tak, aby byla tranzitivní a symetrická.