

Diferenciální geometrie

Otázky k SZZ SP Učitelství matematiky pro SŠ

1) Parametricky zadaná křivka a její délka

- Definujte parametricky zadanou křivku, singulární a regulární bod křivky. Uveďte příklady (přímka, kuželosečky, traktrix, řetězovka, cykloida, šroubovice).
- Popište myšlenku odvození vzorce pro délku oblouku křivky jako supremum délek lomených čar určených body křivky.
- Ovlivní zvolená parametrizace délku oblouku křivky? Ukažte na příkladu.
- Definujte parametrizaci obloukem a vysvětlete postup výpočtu délky oblouku křivky za předpokladu, že je parametrizovaná obloukem. Uveďte příklad křivky parametrizované obloukem a určete její délku.

Self-test: Zaveďte na křivce $p(t) = [t, -\sqrt{1-t^2}]$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ jako parametr oblouk.

2) Křivost a torze

Předpokládejte, že jsou známy pojmy parametricky zadaná křivka a parametrizace obloukem.

- Definujte pojmy tečný vektor, vektor normály, vektor binormály, křivost, oskulační rovina, oskulační kružnice, torze, Frenetův repér. Vysvětlete souvislost mezi těmito pojmy (nakreslete obrázek). Ukažte na příkladu.
- Vysvětlete geometrický význam křivosti a torze. Uveďte příklad křivky
 - s konstantní křivostí,
 - s konstantní torzí,
 - s oběma těmito vlastnostmi.
- Vyslovte Frenetovy vzorce.

Self-test: Spočítejte křivost elipsy a nalezněte střed a poloměr oskulační kružnice v hlavním vrcholu.

3) Plochy v Eukleidovském prostoru

- Definujte parametricky zadanou plochu. Uveďte příklady (rovina, kulová plocha, helikoid).
- Je dána plocha $p(u, v) = [r \cos u, r \sin u, v]$, $r > 0$. Popište křivky, které získáme volbou $u = \text{konstanta}$, resp. $v = \text{konstanta}$. Totéž pro kulovou plochu. Jak souvisí tyto křivky s poledníky a rovnoběžkami?

c) Definujte tečnou rovinu a normálu plochy. Ukažte na příkladu.

Self-test: Odvoďte parametrické vyjádření kulové plochy a ukažte, že se skutečně jedná o plochu.

4) Křivky na ploše

a) Definujte křivku na ploše. Uveďte příklady.

b) Definujte první základní formu plochy a popište její souvislost s délkou oblouku křivky na ploše a povrchem plochy.

c) Definujte geodetické křivky. Popište geodetické křivky na rovině, na kulové ploše a na válcové ploše. Popište souvislost geodetických křivek s nejkratší spojnici mezi dvěma body na ploše.