
Seminář řešení matematických více méně středoškolských úloh

Zadání úloh

7. 1. 2026

Zadání: Necht' $ABCD$ je tětívový čtyřúhelník se stranami a, b, c, d a necht' s označuje polovinu obvodu. Potom pro obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Dokažte.

Zadání: Necht' i je kladné celé číslo. Definujeme posloupnost celých čísel $c_0^{(i)}, c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots$ takto: $c_0^{(i)} = i$ a pro $n > 0$

$$c_n^{(i)} = \begin{cases} \frac{c_{n-1}^{(i)}}{2} & \text{pokud } c_{n-1}^{(i)} \text{ je sudé} \\ 3c_{n-1}^{(i)} + 1 & \text{pokud } c_{n-1}^{(i)} \text{ je liché} \end{cases}$$

Collatzova hypotéza tvrdí, že pro každé kladné celé číslo i existuje n_i , $c_{n_i}^{(i)} = 1$ (a tudíž $c_{n_i+1}^{(i)} = 4$, $c_{n_i+2}^{(i)} = 2$, $c_{n_i+3}^{(i)} = 1, \dots$).

1. Ověřte platnost Collatzovy hypotézy pro $i = 39$.
2. Najděte nekonečně mnoho lichých kladných celých čísel i , pro něž platí Collatzova hypotéza.

Zadání: Každé z čísel $1, 2, 3, \dots, 324, 325$ je obarveno buď červeně nebo modře. Pak existují tři čísla $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 324, 325\}$ taková, že a, b, c mají stejnou barvu, $a < b < c$, $b - a = c - b$ (tedy a, b, c tvoří rostoucí jednobarevnou aritmetickou posloupnost).

Dokažte.

Zadání: Určete počet všech řešení diofantické rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2026$$

v oboru nezáporných celých čísel.