Diskrétní matematika (studijní opora)

Martin Kuřil

Obsah

1 Úvod

Jednotlivé kapitoly (části) této studijní opory jsou zpracovány dvojím způsobem. V některé kapitole je probíraná látka v textu přímo vyložena a výklad je doplněn několika cvičeními. Jindy je čtenáři (studentovi) po krátkém úvodu do problematiky uloženo, kde a co přesně má nastudovat. Někdy následují další doporučení, například co dalšího by bylo dobré si přečíst. Ve většině případů je uloženo studium z knihy [4]:

Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Nakladatelství Karolinum, Praha 2002.

Jde o výbornou knihu, která již vyšla v několika vydáních (naposled, pokud vím, roku 2010). O kvalitě knihy svědčí také fakt, že byla přeložena do angličtiny a pod názvem Invitation to Discrete Mathematics také již vyšla nejméně ve dvou vydáních. Milovníci anglického jazyka (a matematické angličtiny) mohou tedy studovat z anglického překladu.

V jednom případě je čtenáři uloženo studium z knihy [1]:

Eduard Fuchs: *Diskrétní matematika pro učitele.* Masarykova univerzita, Brno 2011.

Prosím čtenáře, aby vzal v úvahu, že toto je první verze studijní opory – v budoucnu bude ještě opravována, upravována, vylepšována.

Jednotlivé číselné obory budeme značit následovně:

- $\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel, $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} |\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- $\mathbb{R}$ – množina všech reálných čísel
- $\mathbb{C}$ – množina všech komplexních čísel, $\mathbb{C} = \{a + bi |\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Připomeňme: Pro množiny A, B zápis $A \subseteq B$ znamená, že množina A je podmnožinou množiny B (tedy: pro každý prvek $x \in A$ platí, že $x \in B$). Zápis $A \subset B$ znamená, že $A \subseteq B$ a současně $A \neq B$.

Platí:

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Také budeme používat následující značení:

- $\mathbb{Z}^+$ – množina všech kladných celých čísel, $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} |\ x > 0\}$
- $\mathbb{Z}^-$ – množina všech záporných celých čísel, $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} |\ x < 0\}$
- $\mathbb{Q}^+$ – množina všech kladných racionálních čísel, $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} |\ x > 0\}$
- $\mathbb{Q}^-$ – množina všech záporných racionálních čísel, $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} |\ x < 0\}$
- $\mathbb{R}^+$ – množina všech kladných reálných čísel, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\}$
- $\mathbb{R}^-$ – množina všech záporných reálných čísel, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} |\ x < 0\}$

2 Kombinatorické počítání

Jestliže A je konečná množina, pak $|A|$ značí počet prvků množiny A. Počet prvků množiny A též nazýváme mohutnost množiny A či kardinalita množiny A. Například

$$|\emptyset| = 0,\ \ |\{1, 2, 3, 4, 5\}| = 5,\ \ |\{x \in \mathbb{Z} |\ -4 \leq x < 11\}| = 15$$

2.1 Počet podmnožin

Nechť A je množina. Symbolem $P(A)$ označíme množinu všech podmnožin množiny A. Množina $P(A)$ se nazývá potence množiny A nebo potenční množina množiny A. Například

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $P(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Předpokládejme, že množina A je konečná a má n prvků ($n \in \mathbb{N}$). Kolik podmnožin má množina A? Neboli: Jaká je mohutnost množiny $P(A)$?

Před chvílí uvedené příklady nám poskytují tyto informace:

počet prvků	0	1	2	3
počet podmnožin	1	2	4	8

Všimněme si, že ve spodním řádku tabulky jsme dostali mocniny čísla 2: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$. To nás vede k vyslovení hypotézy: Množina s n prvky má 2^n podmnožin. Toto tvrzení vskutku platí.

Věta 2.1.1. *Nechť A je konečná množina s n prvky ($n \in \mathbb{N}$), tj. $|A| = n$. Pak množina A má 2^n podmnožin, tj. $|P(A)| = 2^n = 2^{|A|}$.*

Důkaz. Použijeme indukci – viz tabuli na přednášce nebo [4], Tvrzení 2.1.2 (strana 54). Jiný důkaz (bez indukce) naznačíme v další části.

Cvičení.

1. Nechť A je konečná neprázdná množina s n prvky. Nechť $a \in A$. Určete počet všech podmnožin množiny A obsahujících prvek a.

2. Nechť A je konečná neprázdná množina s n prvky. Dokažte, že množina A má 2^{n-1} podmnožin s lichým počtem prvků a 2^{n-1} podmnožin se sudým počtem prvků.

2.2 Počet posloupností

Jsou dány tři prvky, například a, b, c.

Kolik existuje posloupností délky 0 sestavených ze tří daných prvků? Taková posloupnost je pouze jedna, totiž prázdná.

Kolik existuje posloupností délky 1 sestavených ze tří daných prvků? Takové posloupnosti jsou tři, totiž a, b, c.

Kolik existuje posloupností délky 2 sestavených ze tří daných prvků? Takových posloupností je devět, totiž aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.

V otázkách bychom mohli pokračovat. Obecnou situaci řeší následující věta.

Věta 2.2.1. *Nechť k, n jsou celá čísla, $k > 0$, $n \geq 0$. Nechť je dáno k prvků. Počet všech posloupností délky n sestavených z k daných prvků je roven k^n.*

DŮKAZ. Nechť je dáno k prvků: $a_1, a_2, \dots, a_k$. Dokážeme, že počet všech posloupností délky n sestavených z prvků $a_1, a_2, \dots, a_k$ je roven k^n. Postupujme indukcí vzhledem k n.

1. $n = 0$: Existuje 1 posloupnost délky 0, totiž prázdná. A také $2^0 = 1$.

2. $n > 0$: Předpokládejme, že počet všech posloupností délky $n - 1$ sestavených z prvků $a_1, a_2, \dots, a_k$ je roven k^{n-1}. Nechť jsou to posloupnosti $p_1, p_2, \dots, p_l$, kde $l = k^{n-1}$. Z prvků $a_1, a_2, \dots, a_k$ nyní sestavíme všechny posloupnosti délky n. Dostaneme tyto posloupnosti:

$$\begin{array}{ccccc}
p_1a_1 & p_1a_2 & p_1a_3 & \dots & p_1a_k \\
p_2a_1 & p_2a_2 & p_2a_3 & \dots & p_2a_k \\
p_3a_1 & p_3a_2 & p_3a_3 & \dots & p_3a_k \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
p_la_1 & p_la_2 & p_la_3 & \dots & p_la_k
\end{array}$$

   Vidíme, že počet sestavených posloupností je roven $l \cdot k = k^{n-1} \cdot k = k^n$.

Příklad. Nechť A je konečná neprázdná množina s n prvky, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Podmnožiny množiny A jednoznačně zakódujeme pomocí posloupností délky n sestavených z prvků 0,1. Podmnožině $B \subseteq A$ přiřadíme posloupnost $x_1x_2 \dots x_n$ definovanou následovně:

$$x_i = \begin{cases} 0 & a_i \notin B \\ 1 & a_i \in B \end{cases}$$

Ukažme si to na příkladu množiny $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

podmnožina:	posloupnost:
$\emptyset$	000
$\{a_1\}$	100
$\{a_2\}$	010
$\{a_3\}$	001
$\{a_1, a_2\}$	110
$\{a_1, a_3\}$	101
$\{a_2, a_3\}$	011
$\{a_1, a_2, a_3\}$	111

Vraťme se k obecnému případu. Definovali jsme vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi všemi podmnožinami množiny A a všemi posloupnostmi délky n sestavenými z prvků 0,1. Takže: Počet všech podmnožin konečné neprázdné množiny A s n prvky je roven počtu všech posloupností délky n sestavených ze dvou prvků 0 a 1. A tento počet, jak již víme, je roven 2^n. Odvodili jsme, že $|P(A)| = 2^n = 2^{|A|}$.

Větu 2.2.1 lze zobecnit.

Věta 2.2.2. *Nechť n, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jsou kladná celá čísla. Počet všech posloupností délky n takových, že na prvním místě je některý z k_1 daných prvků, na druhém místě je některý z k_2 daných prvků, ..., na n-tém místě je některý z k_n daných prvků, je roven $k_1 k_2 \ldots k_n$.*

Důkaz. Indukcí vzhledem k n. Pro $n = 1$ je jasné, že existuje k_1 posloupností délky 1 sestavených z k_1 daných prvků. Pro $n > 1$ zopakujeme argument z případu $n > 0$ v důkazu věty 2.2.1.

Cvičení.

1. Ve sportovním obchodě mají trička 5 různých barev, trenýrky 4 různých barev a páry ponožek 3 různých barev. Kolik dresů z nich můžeme sestavit? (Dres tvoří jedno tričko, jedny trenýrky a jeden pár ponožek.)

2. Házeme dvakrát kostkou. Kolik různých výsledků existuje? (Padne-li 3 po 2, pak je to něco jiného, než když padne 2 po 3.)

3. Máme 20 různých dárků, které chceme rozdělit mezi 12 dětí. Nepožaduje se, aby každé dítě něco dostalo. Může se také stát, že všechny dárky dáme jednomu dítěti. Kolika způsoby můžeme dárky rozdělit?

4. Máme 20 druhů dárků; nyní máme libovolně velký počet dárků každého druhu. Chceme dát dárky 12 dětem. Opět se nepožaduje, aby každé dítě něco dostalo. Avšak žádné dítě nemůže dostat dvě či více kopií téhož dárku. Kolika způsoby můžeme dárky rozdělit?

2.3 Prostá zobrazení a permutace

Nechť A, B jsou množiny, $f : A \to B$ je zobrazení. Připomeňme, že zobrazení f se nazývá prosté (injektivní, injekce), pokud pro všechna $x, y \in A$ platí: jestliže $x \neq y$, pak $f(x) \neq f(y)$. Zobrazení f se nazývá na (surjektivní, surjekce), pokud pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$. Zobrazení f se nazývá vzájemně jednoznačné (bijektivní, bijekce), pokud je současně prosté a na. Předpokládejme, že množiny A, B jsou konečné a neprázdné. Budeme se nyní zabývat otázkou, kolik existuje prostých zobrazení množiny A do množiny B.

Věta 2.3.1. *Nechť A, B jsou konečné neprázdné množiny, $|A| = k$, $|B| = n$. Počet všech prostých zobrazení množiny A do množiny B je roven*

$$n(n-1)\dots(n-(k-1)) = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

.

Důkaz. Indukcí vzhledem ke k. Nechť $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

1. $k = 1$: Součin $n(n-1)\dots(n-(k-1))$ má jeden činitel a je roven n. A opravdu, existuje celkem n prostých zobrazení množiny A do množiny B – první zobrazuje prvek a_1 na b_1, druhé zobrazuje prvek a_1 na b_2, atd.

2. $1 < k \leq n$: Počet všech prostých zobrazení množiny A do množiny B označme p. Pro $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme p_j počet všech prostých zobrazení množiny A do množiny B takových, že prvek a_k se zobrazí na prvek b_j. Je $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$. Dále si uvědomme, že p_j je rovno počtu všech prostých zobrazení množiny $A - \{a_k\}$ do množiny $B - \{b_j\}$. Ovšem $|A - \{a_k\}| = k - 1 > 0$, $|B - \{b_j\}| = n - 1 \geq k - 1 > 0$, takže dle indukčního předpokladu je $p_j = (n-1)\dots((n-1)-(k-2)) = (n-1)\dots(n-k+1)$. Máme tedy

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = n \cdot (n-1)\dots(n-k+1).$$

3. $k > n$: Je $n > 0$, $0 \geq n - k + 1$, takže $n(n-1)\dots(n-k+1) = 0$. A zřejmě neexistuje žádné prosté zobrazení množiny A do množiny B.

Vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu A se nazývá permutace množiny A. Nechť A je konečná neprázdná množina, $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Permutaci p množiny A často zapisujeme ve tvaru

$$p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_n) \end{pmatrix}$$

či pouze $p(a_1)p(a_2)\dots p(a_n)$. Vypíšeme například všechny permutace množiny $\{a, b, c\}$:

$$abc, acb, cba, bac, bca, cab$$

Pro kladné celé číslo n definujeme hodnotu $n!$ (čteme "n faktoriál") následovně:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

Dále ještě klademe $0! = 1$. Takže například $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.

Věta 2.3.2. *Nechť A je konečná neprázdná množina, $|A| = n$. Počet všech permutací množiny A je roven $n!$.*

Důkaz. Pro zobrazení $f : A \to A$ platí: f je vzájemně jednoznačné právě tehdy, když f je prosté. Proto je počet všech permutací množiny A roven počtu všech prostých zobrazení množiny A do množiny A, a ten je dle Věty 2.3.1 roven $n(n-1)\dots(n-(n-1)) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Cvičení.

1. Tancovat jde n chlapců a n dívek. Kolika způsoby mohou spolu současně tancovat? Předpokládáme přitom, že tancují v párech, a to vždy chlapec s dívkou.
2. Zjistěte, jakou nejvyšší mocninou čísla 5 je dělitelné číslo $50!$. Kolik nul na konci bude mít zápis čísla $50!$ v desítkové soustavě?

2.4 Počet podmnožin dané mohutnosti

Nechť n je reálné číslo, k je celé číslo. Binomický koeficient $\binom{n}{k}$ (čteme "n nad k") definujeme následovně:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k = 0 \\ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} & k > 0 \end{cases}$$

Například $\binom{15}{-8} = 0$, $\binom{15}{0} = 1$, $\binom{15}{8} = \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 6435$, $\binom{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2\cdot1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, $\binom{15}{17} = \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot0\cdot(-1)}{17!} = \frac{0}{17!} = 0$.

Věta 2.4.1. *Nechť A je konečná množina, $|A| = n$. Nechť k je nezáporné celé číslo. Počet všech k – prvkových podmnožin množiny A je roven $\binom{n}{k}$.*

Důkaz.

1. $n = 0$: Je $A = \emptyset$. Rozlišíme dva případy:
   - $k = 0$: Množina A má jednu 0 – prvkovou podmnožinu, totiž $\emptyset$. A vskutku $\binom{0}{0} = 1$.
   - $k > 0$: Množina A nemá žádnou k – prvkovou podmnožinu. A vskutku $\binom{0}{k} = \frac{0\cdot(-1)\cdots(-k+1)}{k!} = \frac{0}{k!} = 0$.

2. $n > 0$: Rozlišíme tři případy:

- $k = 0$: Množina A má jednu 0 – prvkovou podmnožinu, totiž $\emptyset$. A vskutku $\binom{n}{0} = 1$.
- $0 < k \leq n$: Počet všech k – prvkových podmnožin množiny A označme p. Jistě $k \geq 1$. Množina A má celkem 2^n podmnožin (viz Větu 2.1.1.), takže $p \leq 2^n$. Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_p$ jsou všechny k – prvkové podmnožiny množiny A. Položme $B = \{1, 2, \ldots, k\}$. Množinu všech prostých zobrazení množiny B do množiny A označme P. Dle Věty 2.3.1. je $|P| = n(n-1)\ldots(n-k+1)$. Nechť $f \in P$. Uvědomme si, že $f(B) = \{f(1), f(2), \ldots, f(k)\}$ je k – prvková podmnožina množiny A. Pro celé číslo i, $1 \leq i \leq p$, položme $P_i = \{f \in P |\ f(B) = A_i\}$. Je $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_p$. Přitom pro celá čísla i, j, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p$, $i \neq j$, je $P_i \cap P_j = \emptyset$. Nechť i je celé číslo, $1 \leq i \leq p$. Uvědomme si, že počet všech prvků množiny P_i je roven počtu všech prostých zobrazení množiny B na množinu A_i, takže $|P_i| = k(k-1)\ldots(k-k+1) = k \cdot (k-1) \cdots 1 = k!$ (je $|B| = |A_i| = k$ a použijeme Větu 2.3.1.). Celkem tedy:

$$
\begin{aligned}
n(n-1)\ldots(n-k+1) &= |P| \\
&= |P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_p| \\
&= |P_1| + |P_2| + \cdots + |P_p| \\
&= \underbrace{k! + k! + \cdots + k!}_{p} \\
&= p \cdot k!
\end{aligned}
$$

  Tudíž $n(n-1)\ldots(n-k+1) = p \cdot k!$, $p = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$, $p = \binom{n}{k}$. A to jsme chtěli dokázat.
- $n < k$: Množina A nemá žádnou k – prvkovou podmnožinu. A $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = 0$, protože $n > 0 \geq n - k + 1$.

Binomické koeficienty splňují řadu zajímavých a důležitých identit. Tři z nich uvádíme v následující větě, další přijdou později. Tyto identity se často dají dokázat dvěma způsoby, a to algebraicky – použijeme definici binomických koeficientů, a také kombinatoricky – použijeme kombinatorický význam binomických koeficientů (viz Větu 2.4.1.).

Věta 2.4.2.

1. *Nechť n je nezáporné celé číslo a k je celé číslo. Pak*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. *Nechť n je reálné číslo a k je celé číslo. Pak*

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

3. Nechť n je nezáporné celé číslo. Pak

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Důkaz.

1. • $k < 0$:

$$\binom{n}{k} = 0$$

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-k)+1)}{(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{(n-k)!} \\ &= 0\end{aligned}$$

Využili jsme fakt, že $n \geq 0 \geq k+1$.

• $k = 0$: Pro $n = 0$ máme $\binom{0}{0} = \binom{0}{0-0}$. Nechť nyní $n > 0$.

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-0} &= \binom{n}{n} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!} \\ &= \frac{n!}{n!} \\ &= 1\end{aligned}$$

- $0 < k < n$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 1}{k!(n-k)\dots 1} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(k+1)k\dots 1}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(k+1)\cdot k!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(k+1)}{(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-(n-k)+1)}{(n-k)!} \\
&= \binom{n}{n-k}
\end{aligned}$$

- $k = n$: $\binom{n}{n} = 1$ (to jsme již počítali pro $n > 0$, pro $n = 0$ je to jasné), $\binom{n}{n-n} = \binom{n}{0} = 1$
- $k > n$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Využili jsme fakt že $n \geq 0 \geq n - k + 1$.

$$\binom{n}{n-k} = 0$$

Využili jsme fakt, že $n - k < 0$.

2.
- $k < 0$: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = 0 + 0 = 0$, $\binom{n}{k} = 0$
- $k = 0$: $\binom{n-1}{-1} + \binom{n-1}{0} = 0 + 1 = 1$, $\binom{n}{0} = 1$
- $k = 1$: $\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} = 1 + \frac{n-1}{1!} = 1 + \frac{n-1}{1} = 1 + (n-1) = n$, $\binom{n}{1} = \frac{n}{1!} = \frac{n}{1} = n$

- $1 < k$:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)\dots((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!} + \\
&\quad + \frac{(n-1)\dots((n-1)-k+1)}{k!} \\
&= \frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)\dots(n-k)}{k!} \\
&= \frac{(n-1)\dots(n-k+1)\cdot k}{k\cdot(k-1)!} + \frac{(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{k!} \\
&= \frac{(n-1)\dots(n-k+1)[k+(n-k)]}{k!} \\
&= \frac{(n-1)\dots(n-k+1)\cdot n}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

3. Rovnost dokážeme s využitím kombinatorického významu binomického koeficientu. Nechť A je množina, $|A| = n$. Nechť k je nezáporné celé číslo. Dle Věty 2.4.1. je $\binom{n}{k}$ rovno počtu všech k – prvkových podmnožin množiny A. Množina A má podmnožiny mohutnosti 0, 1, $\dots$,n. Počet všech podmnožin množiny A je tedy roven $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots \binom{n}{n}$. Ovšem počet všech podmnožin množiny A je také roven 2^n (viz Větu 2.1.1.), takže $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots \binom{n}{n} = 2^n$, což jsme chtěli dokázat.

Cvičení.

1. Určete hodnoty $\binom{n}{k}$ pro $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $k \in \mathbb{Z}$.
2. Nechť n je kladné celé číslo. Podle definice binomického koeficientu vypočtěte hodnoty $\binom{n}{k}$ pro $k = 0, 1, n-1, n$ a výsledky vysvětlete pomocí kombinatorického významu čísla $\binom{n}{k}$.
3. Nechť n, k jsou celá čísla, $0 \le k \le n$. Dokažte vztah $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ s využitím kombinatorického významu obou stran rovnosti.
4. Nechť n a k jsou kladná celá čísla. Dokažte vztah $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ s využitím kombinatorického významu obou stran rovnosti.
5. Nechť n je reálné číslo a k je celé číslo, $k \neq 0$. Dokažte: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$.

3 Kombinatorické prostředky

3.1 Indukce

Indukce (podrobněji: matematická indukce) je jedním z nejdůležitějších důkazových prostředků diskrétní matematiky.

Úkol. Prostudujte kapitolu 1.3 Matematická indukce v knize [4]. Nezapomeňte na cvičení.

Poznámka. Doporučit lze také kapitolu 1.2.1. Matematická indukce v knize [3]. Na konci kapitoly je řada cvičení, jejichž řešení jsou uvedena na konci knihy.

3.2 Porovnávání a odhady čísel

Je pěkné, když máme formule pro počet jistých objektů (víme například, že existuje přesně $n!$ permutací konečné neprázdné množiny s n prvky). Často je ale důležitější mít dobrou (i když třeba přibližnou) představu o tom, jak velký tento počet je. Například, kolik číslic má číslo $100!$? Takovým otázkám se budete věnovat v této kapitole.

Úkol. Prostudujte kapitolu 2.4 Odhady funkcí: faktoriál a také kapitolu 2.5 Odhady: bimomické koeficienty. Uvedené kapitoly najdete v knize [4]. V obou kapitolách najdete cvičení, na konci knihy pak návody k (některým) cvičením.

3.3 Princip inkluze a exkluze

Máme dány dvě konečné množiny, třeba A a B, a víme také, kolik mají prvků (známe $|A|$ a $|B|$). Chceme určit počet prvků množiny $A \cup B$, tedy $|A \cup B|$. Jako první by nás mohlo napadnout, že $|A \cup B| = |A| + |B|$. Brzy však zjistíme, že to tak být nemusí. Uvažme například množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Pak $|A| = 6$, $|B| = 7$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, takže $|A| + |B| = 6 + 7 = 13$, $|A \cup B| = 10$. Čísla $4, 5, 6$ (čísla patřící do $A \cap B$) jsou v $|A| + |B|$ započítána dvakrát. Po chvíli přemýšlení bychom jistě přišli na to, že pro jakékoli konečné množiny A, B platí:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Vidíme, že k určení mohutnosti množiny $A \cup B$ nestačí znát pouze mohutnosti množin A a B, ale také mohutnost množiny $A \cap B$.

Princip inkluze a exkluze řeší popsanou úlohu obecně. Používá se v situaci, kdy chceme určit mohutnost sjednocení konečného počtu konečných množin, a známe přitom mohutnosti všech možných průniků.

Úkol. Prostudujte kapitolu 2.6 Princip inkluze a exkluze v knize [4].

Poznámka. Celá řada aplikací principu inkluze a exkluze je uvedena v knize [2] v kapitole 1, paragrafu 6 Princip inkluze a exkluze. Najdete tam také hodně cvičení, přičemž návody a odpovědi ke cvičením jsou v paragrafu 10.

3.4 Dirichletův princip

Věta 3.4.1. (Dirichletův princip) *Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou množiny (n je kladné celé číslo). Nechť k je nezáporné celé číslo, B je konečná množina, $|B| > nk$, $B \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Pak existuje celé číslo i, $1 \leq i \leq n$, takové, že $|B \cap A_i| > k$.*

Důkaz. Postupujme sporem. Předpokládejme, že pro všechna celá čísla i, $1 \leq i \leq n$, je $|B \cap A_i| \leq k$. Počítejme:

$$\begin{aligned} |B| &= |B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| \\ &= |(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)| \\ &\leq |B \cap A_1| + |B \cap A_2| + \cdots + |B \cap A_n| \\ &\leq \underbrace{k + k + \cdots + k}_{n} \\ &= nk \end{aligned}$$

Máme tedy $|B| \leq nk$, což je spor.

Věta 3.4.1. se nazývá Dirichletův princip. Bez velkého množství matematických symbolů jej můžeme vyslovit následovně: Máme dáno n přihrádek (to jsou množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$), dále máme konečně mnoho objektů (to jsou prvky množiny B), přičemž těchto objektů je více než nk (kde k je nezáporné celé číslo). Objekty jsou rozmístěny do daných n přihrádek ($B \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$). Pak v aspoň jedné přihrádce je více než k objektů ($|B \cap A_i| > k$ pro nějaké celé číslo i, $1 \leq i \leq n$).

Povšimněme si, že jeden objekt se může nacházet ve více přihrádkách současně (nepožadujeme, aby množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ byly vzájemně disjunktní).

Dirichletův princip se také nazývá přihrádkový princip (rozdělujeme objekty do přihrádek) nebo též princip holubníku.

Použití Dirichletova principu ukážeme na dvou příkladech.

Příklad. Je dána množina deseti kladných celých čísel menších než 100. Dokážeme, že existují dvě disjunktní neprázdné podmnožiny této množiny se stejným součtem svých prvků. Danou množinu deseti kladných celých čísel označme M. Pro konečnou neprázdnou množinu celých čísel T označme $S(T)$ součet všech jejích prvků. Nechť B je množina všech neprázdných podmnožin množiny M. Pro $T \in B$ je $1 \leq S(T)$, $S(T) \leq 90+91+92+93+94+95+96+97+98+99 = 945$. Pro celé číslo i, $1 \leq i \leq 945$, položme $A_i = \{T \in B |\ S(T) = i\}$. Je $B \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{945}$. Je $|B| = 2^{10} - 1 = 1023$ (viz Větu 2.1.1.). Takže $|B| > 945 \cdot 1$. Podle Dirichletova principu existuje celé číslo i, $1 \leq i \leq 945$, $|B \cap A_i| > 1$. Existují tedy $C, D \in B \cap A_i$, $C \neq D$. Je $C \subseteq M$, $C \neq \emptyset$, $D \subseteq M$, $D \neq \emptyset$, $S(C) = i$, $S(D) = i$, $S(C) = S(D)$. Jestliže $C \cap D = \emptyset$, pak jsme hotovi (C, D jsou dvě neprázdné disjunktní podmnožiny množiny M se stejným součtem svých prvků). Zbývá ještě případ, kdy $C \cap D \neq \emptyset$. Jistě $C \cap D \subseteq C$, $C \cap D \subseteq D$. Předpokládejme, že $C \cap D = C$. Pak $C \subseteq D$, takže $C \subset D$, $S(C) = S(D) = S(C \cup (D - C)) = S(C) + S(D - C)$, $S(C) = S(C) + S(D - C)$, $S(D - C) = 0$; to je však spor, protože $D - C$ je konečná neprázdná množina kladných celých čísel. Nutně tedy $C \cap D \subset C$. Obdobně lze ukázat, že $C \cap D \subset D$. Položme $E = C - (C \cap D)$, $F = D - (C \cap D)$. Je $E \cap F = \emptyset$, $E \neq F$, $E \subseteq M$, $E \neq \emptyset$, $F \subseteq M$, $F \neq \emptyset$, $S(E) = S(C) - S(C \cap D) = S(D) - S(C \cap D) = S(F)$. Jsou tedy E, F dvě neprázdné disjunktní podmnožiny množiny M se stejným součtem svých prvků.

Příklad. Ve čtverci Q se stranou délky 2 je dáno pět bodů. Ukážeme, že z daných pěti bodů lze vybrat dva, jejichž vzdálenost je nejvýše $\sqrt{2}$. Středem čtverce Q vedeme rovnoběžky se stranami čtverce Q a tak jej rozdělíme na čtyři čtverce se stranou délky 1 – označme je Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4. Pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ označme A_i množinu všech bodů čtverce Q_i. Množinu daných pěti bodů označme B. Je $B \subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ a také $|B| > 4 \cdot 1$. Dle Dirichletova principu existuje $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tak, že $|B \cap A_i| > 1$. Existují tedy body $S, T \in B \cap A_i$, $S \neq T$. Stačí dokázat, že vzdálenost bodů S, T je nejvýše $\sqrt{2}$. Máme $S, T \in A_i$. Lze předpokládat, že vrcholy čtverce Q_i mají souřadnice $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ a $(1, 1)$. Nechť $S = (s_1, s_2)$, $T = (t_1, t_2)$. Je $distance(S, T) = \sqrt{(s_1 - t_1)^2 + (s_2 - t_2)^2} = \sqrt{|s_1 - t_1|^2 + |s_2 - t_2|^2} \leq \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Cvičení.

1. Nechť n je kladné celé číslo. Je dána množina $n + 1$ kladných celých čísel, z nichž žádné není větší než $2n$. Dokažte: v dané množině existují taková dvě čísla, že jedno z nich je dělitelem druhého.

2. Nechť S je čtverec se stranou délky 2. Dokažte, že z libovolnývh devíti bodů ležících v S lze vybrat takové tři, které leží na jedné přímce nebo jsou vrcholy trojúhelníka s obsahem nejvýše $\frac{1}{2}$.

4 Binomické koeficienty a Pascalův trojúhelník

4.1 Binomická věta

Binomická věta se týká umocňování dvojčlenu, tedy binomu. Ve formulaci binomické věty se vyskytuje suma $\sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, v níž se sčítá přes všechna celá čísla k, a n je nezáporné celé číslo. Zdá se tedy, že se jedná o nekonečný součet. Připomeňme však, že $\binom{n}{k} = 0$ pro všechna reálná čísla n a všechna záporná celá čísla k (tak je to stanoveno přímo v definici binomických koeficientů). Dále, nechť n je nezáporné celé číslo a k je celé číslo takové, že $n < k$. Pak

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = 0$$

protože $n, (n-1), \ldots, (n-k+1)$ je klesající posloupnost celých čísel a $n \geq 0 \geq n-k+1$. Zdůvodnili jsme, že pro všechna nezáporná celá čísla n je

$$\sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Zapamatujte si prosím, že $\binom{n}{k} = 0$ pro všechna nezáporná celá čísla n a všechna celá čísla k taková, že $k > n$.

Nyní již konečně vyslovíme binomickou větu.

Věta 4.1.1. (Binomická věta) *Pro všechna nezáporná celá čísla n platí:*

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Důkaz. Indukcí:

1. $n = 0$: $(x+y)^0 = 1$, $\sum_k \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \sum_{0 \leq k \leq 0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
2. $n > 0$: Dle indukčního předpokladu je $(x+y)^{n-1} = \sum_k \binom{n-1}{k} x^k y^{(n-1)-k}$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} \\
&= (x+y) \cdot \sum_k \binom{n-1}{k} x^k y^{(n-1)-k} \\
&= x \cdot \sum_k \binom{n-1}{k} x^k y^{(n-1)-k} + y \cdot \sum_k \binom{n-1}{k} x^k y^{(n-1)-k} \\
&= \sum_k \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{(n-1)-k} + \sum_k \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-(k+1)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k}
\end{aligned}$$

V první sumě nyní položme $l = k+1$ (tedy $k = l-1$) a uvědomme si, že $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow l \in \mathbb{Z}$, a pokračujme ve výpočtu:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\binom{n-1}{l-1}x^l y^{n-l} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{l}\binom{n-1}{l-1}x^l y^{n-l} + \sum_{k}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k}\binom{n-1}{k-1}x^k y^{n-k} + \sum_{k}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k}\left(\binom{n-1}{k-1}x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{k}x^k y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right) x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}
\end{aligned}$$

Spočítali jsme tedy, že $(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k}x^k y^{n-k}$.

Vidíme, že v binomické větě (o umocňování binomu) hrají důležitou roli binomické koeficienty – odtud pochází jejich název.

Binomickou větu můžeme použít k odvození řady identit týkajících se binomických koeficientů. Například dosazením $x = y = 1$ dostaneme

$$2^n = \sum_k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

(n je libovolné nezáporné celé číslo). Tuto identitu jsme dokázali ve Větě 2.4.2.

Cvičení.

1. Dokažte identitu

$$0 = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$$

   (n je kladné celé číslo).

2. Identita ze cvičení 1 je zřejmá pro lichá n. Proč?

3. Použijte kombinatorický význam binomických koeficientů a dokažte identitu ze cvičení 1.

4.2 Pascalův trojúhelník

Pascalův trojúhelník je rovinné schéma, v němž jsou systematicky zaznamenány hodnoty $\binom{n}{k}$ pro všechna celá čísla n a k. (Nejsou v něm tedy všechny binomické koeficienty, protože $\binom{n}{k}$ je definováno také pro necelá reálná čísla n.) Popišme Pascalův trojúhelník podrobněji.

Pascalův trojúhelník je nekonečná šachovnice, v níž každé pole je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí celých čísel (n, k) – n je číslo řádku, k je číslo sloupce. V poli se souřadnicemi (n, k) je uložena hodnota binomického koeficientu $\binom{n}{k}$.

Jelikož $\binom{n}{0} = 1$ pro všechna n, obsahuje nultý sloupec Pascalova trojúhelníka samé 1. A co nultý řádek? Je $\binom{0}{k} = 0$ pro všechna nenulová k. Takže nultý řádek obsahuje samé 0 s jedinou vyjímkou – na průsečíku nultého řádku a nultého sloupce je hodnota 1.

Nalevo od nultého sloupce je Pascalův trojúhelník jednotvárný, protože se tam vyskytují pouze nuly. K vyplnění dalších polí můžeme s výhodou využít identitu

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Sestavme nyní kousek Pascalova trojúhelníka, a to pro $\binom{n}{k}$, kde n, k jsou celá čísla, $0 \leq n \leq 9$, $0 \leq k \leq 9$.

Tabulka 1

Tabulka binomických koeficientů (Pascalův trojúhelník)

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Název "Pascalův trojúhelník"se nám asi zdá divný. Vždyť nekonečná šachovnice není trojúhelník, ani Tabulka 1 není trojúhelník. Kde se tedy vzal ten název? Pascalův trojúhelník se často sestavuje pouze pro celá čísla n, k, která splňují $0 \leq k \leq n$, a navíc se binomický koeficient $\binom{n}{k}$ zapíše na následující řádek doprostřed pod koeficienty $\binom{n-1}{k-1}$ a $\binom{n-1}{k}$. Vznikne tak schéma, které vypadá jako dole neukončený trojúhelník případně přímo jako trojúhelník, pokud hodnotu n shora omezíme:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Cvičení.

1. Rozšiřte Tabulku 1 o tři řádky směrem nahoru ($n = -1, -2, -3$).

4.3 Identity v Pascalově trojúhelníku

Některé identity už známe:

- Nechť n, k jsou libovolná celá čísla. Pak

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Jestliže sečteme v Pascalově trojúhelníku dvě sousední čísla, pak součet najdeme těsně pod pravým (polohou) sčítancem.

- Nechť n je libovolné nezáporné celé číslo. Pak

$$\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$$

Jestliže sečteme všechna čísla v n-tém řádku Pascalova trojúhelníka, pak dostaneme číslo 2^n.

Vezměme například $n = 7$:

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$$

- Nechť n je kladné celé číslo. Pak

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Jestliže v n-tém řádku Pascalova trojúhelníka čísla střídavě přičítáme a odečítáme, pak dostaneme číslo 0.

Vezměme například $n = 6$:

$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$$

Další zajímavé identity získáme opakovaným použitím základní identity $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

Nejprve budeme opakovaně rozvíjet první sčítanec. Nechť k je nezáporné celé číslo. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\\
&= \binom{n-1}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}\\
&= \binom{n-2}{k-3}+\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}\\
&= \binom{n-3}{k-4}+\binom{n-3}{k-3}+\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}\\
&\vdots\\
&= \binom{n-k}{k-(k+1)}+\binom{n-k}{k-k}+\binom{n-(k-1)}{k-(k-1)}+\cdots+\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}\\
&= \binom{n-k}{-1}+\binom{n-k}{0}+\binom{n-(k-1)}{1}+\cdots+\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}\\
&= 0+\binom{n-k}{0}+\binom{n-(k-1)}{1}+\cdots+\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}\\
&= \binom{n-k}{0}+\binom{n-(k-1)}{1}+\cdots+\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Položíme $m=n-k$ a dostaneme

$$\binom{m}{0}+\binom{m+1}{1}+\binom{m+2}{2}+\cdots+\binom{m+k-1}{k-1}+\binom{m+k}{k}=\binom{m+k+1}{k}$$

Odvodili jsme následující identitu:

Věta 4.3.1. *Pro každé reálné číslo m a každé nezáporné celé číslo k platí*

$$\sum_{0\le i\le k}\binom{m+i}{i}=\binom{m}{0}+\binom{m+1}{1}+\cdots+\binom{m+k-1}{k-1}+\binom{m+k}{k}=\binom{m+k+1}{k}$$

V Pascalově trojúhelníku sčítáme čísla následovně: Začneme v libovolném řádku nultého sloupce a postupujeme diagonálně směrem doprava a dolů. Výsledek pak najdeme těsně pod posledním sčítancem. Například pro $m=5$ a $k=3$ dostaneme

$$1+6+21+56=84$$

Nyní budeme opakovaně rozvíjet druhý sčítanec. Nechť n je nezáporné celé číslo a k je celé číslo, $k \neq -1$. Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k+1} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-3}{k} + \binom{n-3}{k+1} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-3}{k} + \binom{n-4}{k} + \binom{n-4}{k+1} \\
&\vdots \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{n-(n-1)}{k} + \binom{n-n}{k} + \binom{n-n}{k+1} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{1}{k} + \binom{0}{k} + \binom{0}{k+1} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{1}{k} + \binom{0}{k} + 0 \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{1}{k} + \binom{0}{k}
\end{aligned}
$$

Odvodili jsme následující identitu:

Věta 4.3.2. *Pro každé nezáporné celé číslo n a každé celé číslo k, $k \neq -1$, platí*

$$\sum_{0 \leq i \leq k} \binom{i}{k} = \binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \dots \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

V Pascalově trojúhelníku sčítáme čísla následovně: Začneme v nultém řádku a k-tém sloupci (kromě $k = -1$) a postupujeme ve sloupci směrem dolů. Výsledek pak najdeme těsně u posledního sčítance, a to o jeden řádek níž a současně o jeden sloupec doprava. Například pro $k = 4$ a $n = 9$ máme

$$0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 5 + 15 + 35 + 70 = 126$$

Cvičení.

1. Nechť n je nezáporné celé číslo. Určete $\sum_{0 \leq k \leq n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Rada: k^2 vyjádřete pomocí $\binom{k}{2}$ a $\binom{k}{1}$ a použijte vhodnou identitu s binomickými koeficienty.

2. Nechť n je nezáporné celé číslo. Dokažte, že $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$. Využijte kombinatorický význam binomických koeficientů.

5 Fibonacciho čísla

5.1 Fibonacciho úloha

Italský matematik Leonardo Pisánský, známý také jako Fibonacci (asi 1175 – 1250), studoval následující (ne příliš realistickou) úlohu:

Farmář chová králíky. Každý pár králíků zplodí jeden pár, když dosáhne stáří 2 měsíců, a pak vždy jeden další pár každý měsíc. Králíci nikdy neumírají. Kolik párů králíků bude mít farmář v n-tém měsíci, pokud v nultém měsíci nemá žádný pár a na konci nultého měsíce dostane jeden novorozený králičí pár?

Na počest Fibonacciho označme počet párů králíků v n-tém měsíci symbolem F_n.

Je $F_0 = 0$, protože v nultém měsíci farmář nemá žádný pár.

Je $F_1 = 1$, protože v prvním měsíci má farmář pouze pár, který dostal koncem nultého měsíce..

Je $F_2 = 1$, protože ve druhém měsíci má farmář stále ještě pouze počáteční pár – ten zatím ještě není v produktivním věku.

Je $F_3 = 2$, protože ve třetím měsíci má farmář počáteční pár a jeden další pár navíc - ten se počátečnímu páru narodil koncem druhého měsíce.

Je $F_4 = 3$, protože ve čtvrtém měsíci má farmář dva páry králíků, které měl během třetího měsíce, a ještě jeden pár navíc, totiž ten, který se narodil počátečnímu páru koncem třetího měsíce (pár narozený koncem druhého měsíce ještě potomky nemá).

Pokusme se nyní udělat obecnou úvahu. Nechť $n \geq 2$. Kolik párů králíků bude mít farmář v n-tém měsíci? Jistě bude mít všechny páry, které již měl v měsíci číslo $n-1$. Ještě však bude mít páry nové, totiž ty, které se narodily koncem měsíce číslo $n-1$. A ty se narodily přesně těm párům, které již byly ve stáří aspoň dvou měsíců, což jsou přesně ty páry, které již měl v průběhu měsíce číslo $n-2$. Je tedy $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Shrneme nyní naše zjištění:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pro } n \geq 2$$

Čísla F_n se nazývají Fibonacciho čísla, posloupnost $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots$ se nazývá Fibonacciho posloupnost.

Ještě jedna úloha. Uvažme schodiště s n stupni (n je kladné celé číslo). Kolika způsoby je lze vyjít, když každým krokem vyjdeme jeden nebo dva schody? Hledaný počet označme S_n Je $S_1 = 1$ a $S_2 = 2$. Nechť nyní $n \geq 3$. Zkusme nějak vyjádřit S_n. Jsou dvě možnosti: Posledni krok uděláme ze schodu číslo $n-1$ a na ten se můžeme dostat S_{n-1} způsoby. Nebo poslední krok uděláme ze schodu číslo $n-2$ a na ten se můžeme dostat S_{n-2} způsoby. Celkem tedy

$$S_1 = 1,\ S_2 = 2,\ S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \text{ pro } n \geq 3$$

Na první pohled je zřejmé, že čísla S_n mají hodně společného s Fibonacciho čísly: pro každé celé číslo n, $n \geq 3$, je $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ a $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. Znamená to, že pro každé kladné celé číslo n je $F_n = S_n$? Jistě ne, je třeba $F_2 = 1$ a $S_2 = 2$. Není však těžké si všimnout, že pro každé kladné celé číslo n je $S_n = F_{n+1}$

Cvičení.

1. Dokažte, že pro všechna kladná celá čísla n je $S_n = F_{n+1}$.

2. Nechť n je kladné celé číslo. Kolik má množina $\{1, 2, \dots, n\}$ podmnožin, které neobsahují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?

5.2 Identity s Fibonacciho čísly

Existuje celá řada zajímavých vztahů platných pro Fibonacciho čísla.

Vypočtěme nejdříve hodnoty F_n pro malá n a uložme je do tabulky.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Pokusme se nyní určit součet prvních n Fibonacciho čísel. Tento součet označme S. Chceme tedy určit

$$S = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n$$

Bude asi vhodné použít vztah $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, který platí pro $n \geq 2$. Nechť tedy nejprve n je celé číslo, $n \geq 2$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
S &= F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \cdots + F_{n-1} + F_n \\
&= F_0 + F_1 + (F_1 + F_0) + (F_2 + F_1) + (F_3 + F_2) + \cdots + (F_{n-2} + F_{n-3}) + (F_{n-1} + F_{n-2}) \\
&= (F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-2} + F_{n-1}) + F_1 + (F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-3} + F_{n-2}) \\
&= (S - F_n) + 1 + (S - (F_{n-1} + F_n)) \\
&= S - F_n + 1 + S - F_{n+1} \\
&= 2S + 1 - (F_n + F_{n+1}) \\
&= 2S + 1 - F_{n+2}
\end{aligned}$$

Takže $S = 2S + 1 - F_{n+2}$, $F_{n+2} - 1 = S$. Dostali jsme: $F_0 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ pro všechna celá čísla n, $n \geq 2$. Dosazením se přesvědčíme, že odvozený vztah platí také pro $n = 0$ a $n = 1$.

Odvodili jsme tedy, že pro všechna nezáporná celá čísla n platí

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Například pro $n = 10$ máme:

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 144 - 1$$

Ukážeme nyní indukcí, že pro všechna kladná celá čísla n platí:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

1. $n = 1$:
$$\begin{pmatrix} F_{1+1} & F_1 \\ F_1 & F_{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1$$

2. $n \geq 1$: Předpokládáme, že
$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

   a dokážeme, že
$$\begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$$

   Počítejme:
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Další identitu dostaneme výpočtem determinantů (připomeňme si, že pro čtvercové matice A, B téhož typu je $|AB| = |A| \cdot |B|$):

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2, \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n = (-1)^n$$

Ukázali jsme tedy, že pro všechna kladná celá čísla n je

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Například pro $n = 10$ máme

$$89 \cdot 34 - 55^2 = (-1)^{10}$$

Cvičení.

1. Dokažte, že pro všechna nezáporná celá čísla n platí:

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

2. Dokažte, že pro každé nezáporné celé číslo n je číslo F_{3n} sudé.

5.3 Formule pro Fibonacciho čísla

Existuje nějaká jednoduchá formule, která vyjádří F_n jako funkci čísla n? V této kapitole zjistíte nejen, jak taková formule vypadá, ale také se naučíte obecnou metodu, pomocí které lze formuli pro n-té Fibonacciho číslo najít.

Úkol. Prostudujte kapitolu 1, část 8, Řešení rekurentních formulí v knize [1]. Alternativně můžete prostudovat kapitolu 10.3 Fibonacciho čísla a zlatý řez v knize [4] – zde je formule pro n-té Fibonacciho číslo nalezena pomocí vytvořujících funkcí (tedy jinak, než v osmé části kopitoly 1 v [1]).

6 Grafy

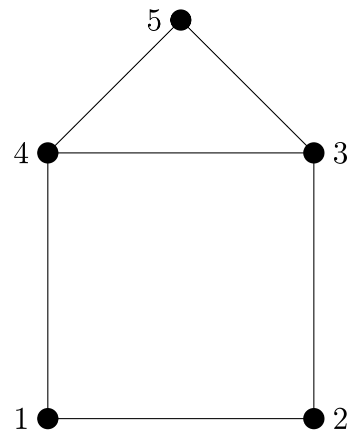
6.1 Definice

Začneme nyní studium základů teorie grafů. Pod pojmem graf budeme rozumět obrázky takového typu, jako je obrázek číslo 1. Pojmenované kroužky budeme nazývat vrcholy (uzly) grafu a spojnice (na obrázku číslo 1 jsou to úsečky) budeme nazývat hrany grafu. Přitom ovšem nebude podstatné, kde jsou vrcholy umístěny ani jak hrany vypadají, ale pouze to, zda dané dva vrcholy hranou spojeny jsou či nejsou. Asi cítíte, že bude třeba pojem graf precizovat. To nyní uděláme.

Graf je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je konečná neprázdná množina a E je množina dvouprvkových podmnožin množiny V.

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Prvky množiny V se nazývají vrcholy (uzly) grafu G a prvky množiny E se nazývají hrany grafu G.

Obrázek 1



Jestliže G je graf, pak $V(G)$ značí množinu vrcholů grafu G a $E(G)$ značí množinu hran grafu G.

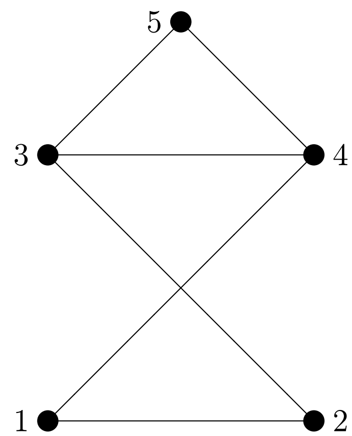
Jestliže graf na obrázku 1 označíme G, pak

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \ E(G) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}\}$$

.

Uvědomme si, že graf G lze zakreslit i jinak, například tak, jako na obrázku číslo 2.

Obrázek 2



Nechť G je graf, $v \in V(G)$. Počet všech hran grafu G, které obsahují vrchol v, se nazývá stupeň vrcholu v v grafu G a značí se $deg_G(v)$, případně pouze $deg(v)$ pokud je z kontextu jasné, jaký graf máme na mysli. Používají se i jiná označení stupně vrcholu, například $st(v)$, $d(v)$.

Nechť $\in V(G)$. Vrchol $w \in V(G)$ se nazývá soused vrcholu v, pokud $\{v, w\} \in E(G)$. Můžeme tedy říci, že číslo $deg_G(v)$ je rovno počtu všech sousedů vrcholu v v grafu G.

Například v grafu na obrázku číslo 1 je $deg(1) = 2$, $deg(2) = 2$, $deg(3) = 3$, $deg(4) = 3$ a $deg(5) = 2$.

Věnujme se ještě krátce reprezentaci grafů. Pro začátek uveďme následující reprezentace:

1. obrázek – viz výše
2. pomocí množin $V(G)$, $E(G)$
3. seznamy sousedů:

   Pro každý vrchol $u \in V(G)$ je dán seznam $L[u]$ všech vrcholů v takových, že $\{u, v\} \in E(G)$.

   Pro graf na obrázku číslo 1 máme

   - $L[1] : 2 \mapsto 4 \mapsto \times$
   - $L[2] : 1 \mapsto 3 \mapsto \times$
   - $L[3] : 2 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto \times$
   - $L[4] : 1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto \times$
   - $L[5] : 3 \mapsto 4 \mapsto \times$

4. matice sousednosti:

   Booleovská matice (tj. matice, jejíž prvky jsou pouze čísla $0, 1$) typu $|V(G)| \times |V(G)|$ s řádky a sloupci označenými vrcholy grafu G (ve stejném pořadí pro řádky i sloupce) a s 1 na pozici (u, v) právě tehdy, když $\{u, v\} \in E(G)$.

   Matice sousednosti grafu G se značí A_G (případně pouze A, pokud je jasné, jaký graf máme na mysli).

   Pro graf na obrázku číslo 1 máme

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Upozorňuji, že existují i další reprezentace grafů

Cvičení.

1. Najděte všechny grafy s množinami vrcholů $\{1\}$, $\{1, 2\}$ a $\{1, 2, 3\}$.
2. Nechť n je kladné celé číslo. Určete počet všech grafů s množinou vrcholů $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
3. Kolik existuje grafú s množinou vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$, přičemž dva vrcholy mají stupeň 1 a dva vrcholy mají stupeň 2?
4. Nakreslete graf G s množinou vrcholů $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, přičemž dva vrcholy $u, v \in V$, $u \neq v$, jsou spojeny hranou právě tehdy, když číslo $u + v$ je sudé.
5. Sestavte matici sousednosti pro graf G ze cvičení 4.
6. Nechť n je kladné celé číslo. Nechť graf G má množinu vrcholů $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Zvolme libovolně $i, j \in V$. Čemu je roven součet všech prvků i–tého řádku matice A_G? Čemu je roven součet všech prvků j–tého sloupce matice A_G?

6.2 Součet stupňů všech vrcholů v grafu

Nyní vyslovíme a dokážeme naši první větu o grafech.

Věta 6.2.1. *Součet stupňů všech vrcholů v grafu je roven dvojnásobku počtu hran.*

DůKAZ. Zvolme libovolnou neprázdnou množinu V. Ukážeme, že tvrzení věty je pravdivé pro každý graf s množinou vrcholů V. Postupujme indukcí vzhledem k počtu hran.

1. Nejprve uvažujme graf bez hran, tedy graf $G = (V, \emptyset)$. Každý vrchol grafu G má stupeň 0, takže součet stupňů všech vrcholů grafu G je roven 0. To je však opravdu dvojnásobek počtu hran grafu G, neboť počet hran grafu G je roven 0.
2. Nechť nyní $G = (V, E)$ je graf takový, že $E \neq \emptyset$. Zvolme libovolně hranu $e \in E$. Je $e = \{u, v\}$, kde $u, v \in V$, $u \neq v$. Uvažme graf $H = (V, E - \{e\})$. Graf H má množinu vrcholů V, avšak má o jednu hranu méně než graf G. Dle indukčního předpokladu tedy máme
$$\sum_{x \in V} deg_H(x) = 2 \cdot |E - \{e\}| = 2 \cdot (|E| - 1) = 2 \cdot |E| - 2$$
Uvědomme si, že $deg_G(u) = deg_H(u) + 1$, $deg_G(v) = deg_H(v) + 1$, $deg_G(x) = deg_H(x)$ pro všechna $x \in V$, $x \neq u$, $x \neq v$. Počítejme:

$$
\begin{aligned}
\sum_{x \in V} deg_G(x) &= deg_G(u) + deg_G(v) + \sum_{x \in V, x \neq u, x \neq v} deg_G(x) \\
&= deg_H(u) + 1 + deg_H(v) + 1 + \sum_{x \in V, x \neq u, x \neq v} deg_H(x) \\
&= 2 + \sum_{x \in V} deg_H(x) \\
&= 2 + 2 \cdot |E| - 2 \\
&= 2 \cdot |E|
\end{aligned}
$$

Celkem tedy $\sum_{x \in V} deg_G(x) = 2 \cdot |E|$, součet stupňů všech vrcholů grafu G je roven dvojnásobku počtu hran.

Například v grafu G na obrázku číslo 1 je

$$deg(1) + deg(2) + deg(3) + deg(4) + deg(5) = 2 + 2 + 3 + 3 + 2 = 12,\ 2 \cdot |E(G)| = 2 \cdot 6 = 12$$

Důsledek 6.2.2. *V každém grafu je počet vrcholů lichého stupně sudý.*

Důkaz. Dle Věty 6.2.1. je součet stupňů všech vrcholů v grafu sudé číslo, protože tento součet je roven dvojnásobku počtu hran. Kdyby byl počet vrcholů lichého stupně lichý, byl by součet stupňů všech vrcholů lichý, což by byl spor.

Cvičení.

1. Existuje graf se 6 vrcholy stupňů $0, 1, 2, 3, 4, 5$?
2. Existuje graf s 8 vrcholy stupňů $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$?

6.3 Cesty, cykly a souvislost

V této kapitole budeme definovat několik základních pojmů teorie grafů, které vycházejí z představy putování grafem – putujeme mezi vrcholy, ovšem putovat smíme pouze po hranách.

Nechť $G = (V, E)$ je graf.

Nechť k je nezáporné celé číslo, $u, v \in V$. Posloupnost $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ se nazývá sled z vrcholu u do vrcholu v délky k v grafu G, pokud platí:

1. $x_0, x_1, \ldots, x_k \in V$

2. $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{k-1}, x_k\} \in E$

3. $u = x_0$, $v = x_k$

V případě $u = v$ se jedná o uzavřený sled, v případě $u \neq v$ se jedná o sled otevřený.

Sled, ve kterém se neopakují vrcholy, se nazývá cesta.

Uvažme graf na obrázku číslo 1. Posloupnost (3) je sled a také cesta z vrcholu 3 do vrcholu 3 délky 0. Posloupnost $(1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 4)$ je sled z vrcholu 1 do vrcholu 4 délky 8; tento sled však není cesta, protože se v něm opakují vrcholy. Posloupnost $(1, 2, 3, 4)$ je cesta z vrcholu 1 do vrcholu 4 délky 3.

Nechť k je celé číslo, $k \geq 3$. Posloupnost $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ se nazývá cyklus (kružnice) délky k v grafu G, pokud platí:

1. $x_0, x_1, \ldots, x_k \in V$

2. $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{k-1}, x_k\} \in E$

3. vrcholy $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ jsou vzájemně různé

4. $x_0 = x_k$

Cyklus délky k se také nazývá k-úhelník.

Uvažme opět graf na obrázku číslo 1. Posloupnost $(1, 2, 3, 5, 4, 1)$ je cyklus délky 5, posloupnost $(3, 5, 4, 3)$ je trojúhelník.

Graf, který neobsahuje žádný cyklus, se nazývá acyklický.

Představa cestování grafem vede k pojmu souvislosti. Graf je souvislý, pokud můžeme z každého vrcholu putovat do každého vrcholu. Nyní přesná definice:

Graf G se nazývá souvislý, pokud pro každé vrcholy $u, v \in V$ existuje v grafu G sled z vrcholu u do vrcholu v.

Graf na obrázku číslo 1 je složen z jedné části (komponenty) a je souvislý, graf na obrázku číslo 3 je složený ze dvou částí (komponent) a není souvislý.

Budeme teď precizovat pojem komponenta grafu.

Na množině V definujeme relaci $\sim$ následovně: Pro $u, v \in V$ klademe

$$u \sim v \text{ právě tehdy, když v grafu } G \text{ existuje sled z vrcholu } u \text{ do vrcholu } v$$

Lemma 6.3.1. *Relace $\sim$ je ekvivalence na množině V.*

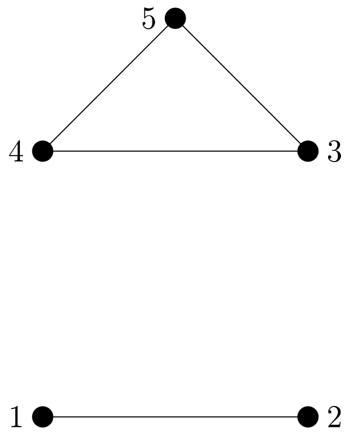
Důkaz.

1. relace $\sim$ je reflexivní: Nechť $v \in V$. Chceme: $v \sim v$. Posloupnost (v) je sled z v do v v grafu G, takže $v \sim v$.

2. relace $\sim$ je symetrická: Nechť $u, v \in V$, $u \sim v$. Chceme: $v \sim u$. Protože $u \sim v$, existuje v grafu G sled s z vrcholu u do vrcholu v. Nechť $s = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$. Pak $(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1, x_0)$ je sled z vrcholu v do vrcholu u v grafu G, a tedy $v \sim u$.

3. relace $\sim$ je tranzitivní: Nechť $u, v, w \in V$, $u \sim v$, $v \sim w$. Chceme: $u \sim w$. Protože $u \sim v$, existuje v grafu G sled s z vrcholu u do vrcholu v. Nechť $s = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$. Protože $v \sim w$, existuje v grafu G sled t z vrcholu v do vrcholu w. Nechť $t = (y_0, y_1, \ldots, y_{l-1}, y_l)$. Pak $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{l-1}, y_l)$ je sled z vrcholu u do vrcholu w v grafu G, a tedy $u \sim w$.

Obrázek 3



Ekvivalence $\sim$ na množině V indukuje rozklad $V/\sim$. Třídy tohoto rozkladu se nazývají komponenty grafu G.

Graf na obrázku číslo 1 má jednu komponentu: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Graf na obrázku číslo 3 má dvě komponenty: $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$.

Graf G je souvislý právě tehdy, když má jedinou komponentu.

Cvičení.

1. Nechť G je graf, $u, v \in V(G)$. Jestliže v grafu G existuje sled z u do v, pak v G existuje cesta z u do v. Dokažte.

2. Nechť n je celé číslo, $n \geq 2$. Jestliže graf má n vrcholů a více než $\binom{n-1}{2}$ hran, pak je souvislý. Dokažte.

6.4 Eulerovské tahy a hamiltonovské cykly

Jedna z nejstarších úloh o grafech je následující úloha:

Nakreslete graf jedním uzavřeným tahem, bez zvednutí tužky z papíru (přičemž žádná hrana se neobtahuje dvakrát).

Tuto úlohu můžeme formalizovat takto:

Nechť G je graf. Najděte uzavřený sled v grafu G, v němž se každá hrana grafu G vyskytuje právě jednou a každý vrchol grafu G aspoň jednou. Takový sled se nazývá uzavřený eulerovský tah. Graf se nazývá eulerovský pokud má aspoň jeden uzavřený eulerovský tah.

Pokuste se najít uzavřený eulerovský tah v grafu na obrázku 1.

Hamiltonovský cyklus v grafu G je cyklus obsahující všechny vrcholy grafu G. Tento pojem je na první pohled podobný uzavřenému eulerovskému tahu: hamiltonovský cyklus má procházet bez opakování všechny vrcholy, a uzavřený eulerovský tah všechny hrany. Avšak žádná jednoduchá charakterizace grafů s hamiltonovským cyklem není známa.

Úkol. Prostudujte kapitolu 3.5 Jednotažky – eulerovské grafy v knize [4]. Naučíte se charakterizaci eulerovských grafů. Nezapomeňte na cvičení (ve cvičení číslo 6 si můžete vyzkoušet úvahy o hamiltonovských cyklech).

Poznámka. Studium kapitoly 3.5 v knize [4] je možné doplnit četbou kapitoly 3.6 Algoritmus na kreslení grafu jedním tahem. Zájemci o více informací o hamiltonovských cyklech mohou v knize [1] prostudovat kapitolu 2, část 6, nazvanou Eulerovské a hamiltonovské grafy.

7 Stromy

7.1 Definice

Budeme nyní studovat stromy, a to stromy v teorii grafů, nikoli v přírodě.

Strom je souvislý acyklický graf. Příklad stromu vidíte na obrázku číslo 4.

Úkol. Prostudujte kapitolu 4.1 Definice a charakteristika stromů v knize [4]. Mimo jiné se seznámíte s větou o charakterizaci stromů, která uvádí čtyři tvrzení ekvivalentní s tvrzením "graf G je strom". Tato tvrzení jsou velmi různorodá a všechna by samozřejmě mohla být použita k definici pojmu strom. Kapitola má na konci také několik pěkných cvičení.

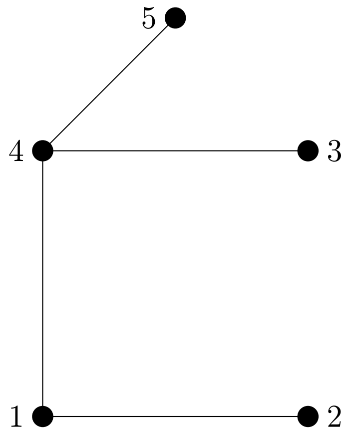
7.2 Reprezentace a počítání stromů

Nakreslete všechny stromy s množinou vrcholů $\{1, 2\}$, všechny stromy s množinou vrcholů $\{1, 2, 3\}$ a všechny stromy s množinou vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$. Dokážete nakreslit všechny stromy s množinou vrcholů $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ nebo aspoň spočítat, kolik jich je celkem?

V této kapitole se naučíte odpověď na otázku kolik existuje stromů s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ (kde n je celé číslo, $n \geq 2$). Naučíte se dokonce, jak každý strom s množinou vrcholů

$\{1, 2, \ldots, n\}$ zakódovat (reprezentovat) posloupností délky $n - 2$, přičemž toto kódování bude definovat bijekci mezi všemi stromy s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ a všemi posloupnostmi uvedemého typu. Z toho již plyne, že počet stromů s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ je roven n^{n-2} (Cayleyho formule).

Obrázek 4



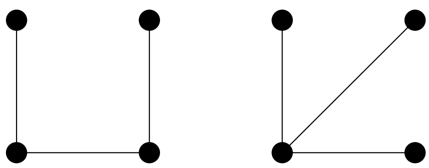
Úkol. Prostudujte kapitoly 7.1 Cayleyho formule (nezapomeňte na cvičení) a také kapitolu 7.4 Důkaz pomocí Prüferova kódu v knize [4].

Poznámka. V knize [4] najdete také další důkazy Cayleyho formule – specielně zmiňme pozoruhodný důkaz pracující s determinanty (kapitola 7.5).

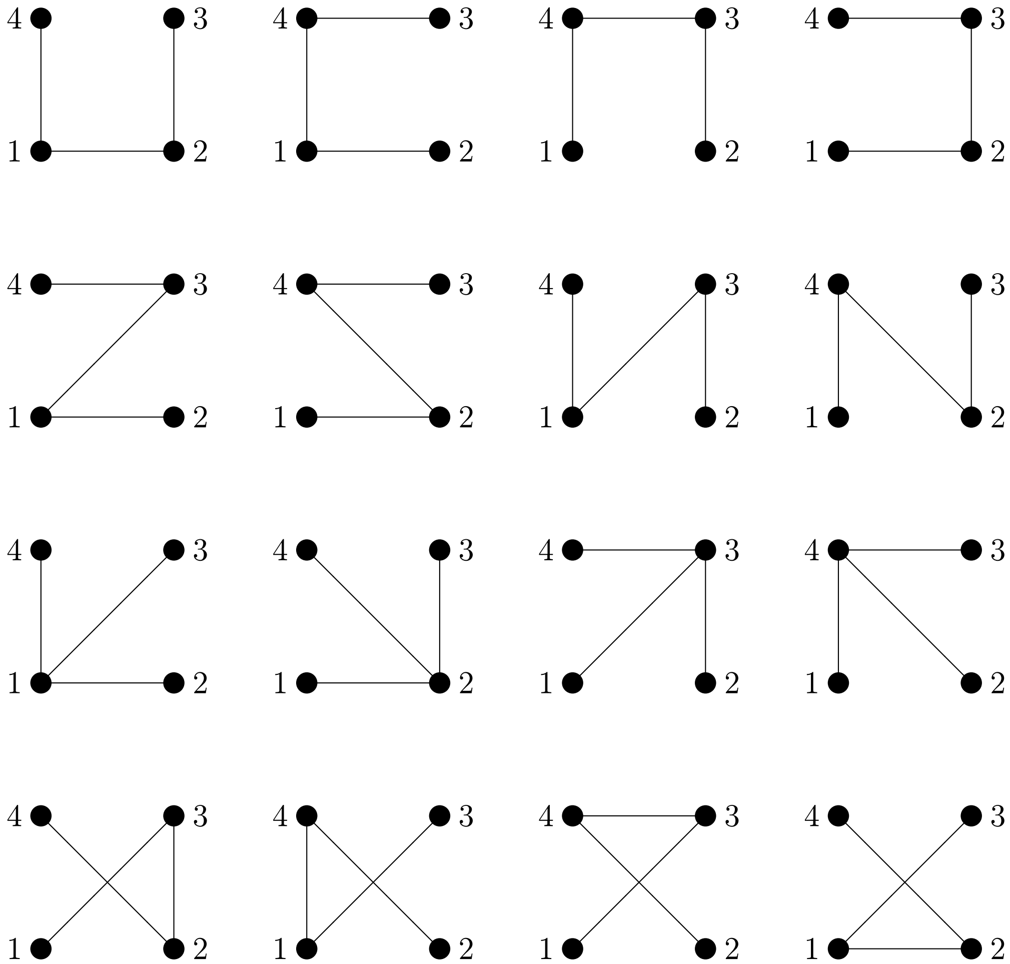
7.3 Isomorfismus stromů

Podle Cayleyho formule existuje $4^2 = 16$ stromů s množinou vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$. Vidíte je všechny na obrázku 5.

Jestliže si představíme vrcholy neoznačené, pak si jistě brzy povšimneme, že existují pouze dva typy stromů se čtyřmi vrcholy, a to



Obrázek 5



Otázka zní, jak formálně definovat to, že dva stromy (obecněji: dva grafy) jsou stejného typu. Tuto otázku řeší pojem isomorfismu.

Nechť G a H jsou grafy. Říkáme, že G a H jsou *isomorfní* (zapisujeme: $G \cong H$), pokud existuje bijekce $f : V(G) \to V(H)$ taková, že pro všechna $u, v \in V(G)$ platí:

$$\{u, v\} \in E(G) \Longleftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$

Zobrazení f nazýváme *isomorfismus* grafu G na graf H.

Uvedeme příklad. Předposlední strom na obrázku 5 označme T_1 a poslední strom na obrázku 5 označme T_2. Je $T_1 \cong T_2$, přičemž isomorfismem je zobrazení $f : V(T_1) \to V(T_2)$, $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$. Existuje ještě jeden isomorfismus (pokuste se jej najít).

V této kapitole se naučíte snadný postup, který pro dva stromy T_1 a T_2 rozhodne, zda T_1 a T_2 jsou isomorfní či nikoli. Každému stromu T na n vrcholech (n je kladné celé číslo) přiřadíme posloupnost nul a jedniček délky $2n$, zvanou kód stromu T, a to tak, že isomorfním stromům se přiřadí týž kód, zatímco neisomorfní stromy budou mít různé kódy. Tím bude rozhodnutí, zda dva stromy jsou isomorfní, převedeno na porovnání posloupností.

Úkol. Prostudujte kapitolu 4.2 Isomorfismus stromů v knize [4].

7.4 Počet neoznačených stromů

Nejprve si povšimněme, že relace $\cong$ je ekvivalence.

Věta 7.4.1. *Nechť M je množina grafů. Pak $\cong$ je ekvivalence na množině M.*

Důkaz.

1. relace $\cong$ je reflexivní: Nechť $G \in M$. Chceme: $G \cong G$. Stačí si uvědomit, že zobrazení $id : V(G) \to V(G)$ dané předpisem $id(x) = x$ pro všechna $x \in V(G)$, je isomorfismus grafu G na graf G.

2. relace $\cong$ je symetrická: Nechť $G_1, G_2 \in M$, $G_1 \cong G_2$. Chceme: $G_2 \cong G_1$. Nechť $f : V(G_1) \to V(G_2)$, f je isomorfismus grafu G_1 na graf G_2. Ukážeme, že f^{-1} je isomorfismus grafu G_2 na graf G_1. Zobrazení f je bijekce, takže relace f^{-1} je bijekce množiny $V(G_2)$ na množinu $V(G_1)$. Zvolme libovolně prvky $x, y \in V(G_2)$. Chceme: $\{f^{-1}(x), f^{-1}(y)\} \in E(G_1) \Leftrightarrow \{x, y\} \in E(G_2)$. Platí:
$$\{f^{-1}(x), f^{-1}(y)\} \in E(G_1) \Longleftrightarrow \{f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))\} \in E(G_2) \Longleftrightarrow \{x, y\} \in E(G_2)$$

3. relace $\cong$ je tranzitivní: Nechť $G_1, G_2, G_3 \in M$, $G_1 \cong G_2$, $G_2 \cong G_3$.Chceme: $G_1 \cong G_3$. Nechť $f : V(G_1) \to V(G_2)$, f je isomorfismus grafu G_1 na graf G_2, $g : V(G_2) \to V(G_3)$, g je isomorfismus grafu G_2 na graf G_3. Ukážeme, že fg je isomorfismus grafu G_1 na graf G_3. Protože f a g jsou bijekce, také $fg : V(G_1) \to V(G_3)$ je bijekce. Zvolme libovolně $u, v \in V(G_1)$. Chceme: $\{(fg)(u), (fg)(v)\} \in E(G_3) \Leftrightarrow \{u, v\} \in E(G_1)$. Platí:
$$\begin{aligned}\{(fg)(u), (fg)(v)\} \in E(G_3) &\Longleftrightarrow \{g(f(u)), g(f(v))\} \in E(G_3)\\ &\Longleftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(G_2)\\ &\Longleftrightarrow \{u, v\} \in E(G_1)\end{aligned}$$

Nechť n je kladné celé číslo. Počet všech neoznačených stromů s n vrcholy označme T_n. Vysvětlíme teď podrobněji význam čísla T_n. Vezmeme všechny stromy s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ (těch je podle Cayleyho formule n^{n-2}) a spočítáme kolik je typů těchto stromů, tedy při počítání odhlédneme od označení vrcholů (proto hovoříme o počtu neoznačených stromů). Například všechny stromy s množinou vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$ jsou na obrázku číslo 5 – jak snadno nahlédneme, počet neoznačených stromů se 4 vrcholy je roven 2, tedy $T_4 = 2$. A nyní formálně přesně: Označme $Tree(n)$ množinu všech stromů T takových, že $V(T) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dle věty 7.4.1 $\cong$ je ekvivalence na množině $Tree(n)$. Tato ekvivalence určuje rozklad $Tree(n)/\cong$, který má konečně mnoho tříd rozkladu, jelikož množina $Tree(n)$ je konečná. Je

$$T_n = |Tree(n)/\cong|$$

Žádná jednoduchá formule pro číslo T_n není známa. Naším cílem v této kapitole je získat hrubou představu o tom, jak velké je číslo $T(n)$.

Označme B množinu všech posloupností nul a jedniček délky $2n$. Definujme zobrazení $f : (Tree(n)/\cong) \to B$ takto:

Nechť $U \in Tree(n)/\cong$. Zvolíme libovolně $T \in U$ a $f(U)$ bude kód stromu T (viz kapitolu 7.3). Víme, že $f(U) \in B$. Uvědomme si také, že zobrazení f je definováno korektně: Jestliže $T_1, T_2 \in U$, pak $T_1 \cong T_2$ a stromy T_1, T_2 mají stejný kód.

Zobrazení f je prosté: Nechť $U, V \in Tree(n)/\cong$, $U \neq V$. Zvolíme $S \in U$, $T \in V$. Pak $f(U)$ je kód stromu S, $f(V)$ je kód stromu T. Stromy S, T nejsou isomorfní, mají tedy různý kód a $f(U) \neq f(V)$.

Uvědomme si, že $|B| = 2^{2n} = 4^n$. Protože zobrazení $f : (Tree(n)/\cong) \to B$ je prosté, je $|Tree(n)/\cong| \leq |B|$, $T_n \leq 4^n$.

Nechť $U \in Tree(n)/\cong$. Nechť $|U| = k$, $U = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$. Ukážeme, že $k \leq n!$, $|U| \leq n!$. Postupujme sporem. Předpokládejme tedy, že $k > n!$. Zvolme $T \in U$. Je $T \cong T_i$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Pro $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ nechť g_i je isomorfismus stromu T na strom T_i. Protože $V(T) = V(T_i) = \{1, 2, \ldots, n\}$, je g_i permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ovšem takových permutací je $n!$, takže existují $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$, $g_i = g_j$. Buďte $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Existují $u, v \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $g_i(u) = x$, $g_i(v) = y$. Pak $\{u, v\} \in E(T) \iff \{g_i(u), g_i(v)\} \in E(T_i)$, čili $\{u, v\} \in E(T) \iff \{x, y\} \in E(T_i)$. Dále, $\{u, v\} \in E(T) \iff \{g_j(u), g_j(v)\} \in E(T_j)$. Ovšem $g_j(u) = g_i(u) = x$, $g_j(v) = g_i(v) = y$, takže $\{u, v\} \in E(T) \iff \{x, y\} \in E(T_j)$. Celkem máme $\{x, y\} \in E(T_i) \iff \{x, y\} \in E(T_j)$. Proto $V(T_i) = V(T_j)$, $E(T_i) = E(T_j)$, $T_i = T_j$, spor. Nutně tedy $k \leq n!$.

Nechť $p = T_n$, $(Tree(n)/\cong) = \{U_1, U_2, \ldots, U_p\}$. Pak

$$\begin{aligned} n^{n-2} &= |Tree(n)| \\ &= |U_1| + |U_2| + \cdots + |U_p| \\ &\leq \underbrace{n! + n! + \cdots + n!}_{p} \\ &= p \cdot n! \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že $n^{n-2} \leq p \cdot n!$, $\frac{n^{n-2}}{n!} \leq p$, $\frac{n^{n-2}}{n!} \leq T_n$.

Celkem jsme zjistili, že $\frac{n^{n-2}}{n!} \leq T_n$ a $T_n \leq 4^n$. Získali jsme tak následující větu:

Věta 7.4.2. *Nechť n je kladné celé číslo. Pro počet T_n všech neoznačených stromů s n vrcholy platí*

$$\frac{n^{n-2}}{n!} \leq T_n \leq 4^n$$

Například pro $n = 19$ máme $\frac{19^{17}}{19!} = 45052,261\ldots$, $4^{19} = 274877906944$. Přitom $T_{19} = 317955$.

Cvičení.

1. Určete hodnotu T_7. Rada: Postupně nakreslete všechny neoznačené stromy s jedním až sedmi vrcholy.

2. Dokažte, že pro všechna celá čísla n, $n > 30$, je $2^n \leq T_n \leq 4^n$.

Poznámka. Velmi mnoho o vzorcích pro zjištění počtu různých druhů stromů se můžete dočíst v kapitole 2.3.4.4. v knize [3].

8 Hledání optima

8.1 Problém minimální kostry

Nechť $G = (V, E)$ je graf. *Kostrou* grafu G rozumíme graf (V, F) takový, že $F \subseteq E$ a (V, F) je strom.

Uvažme následující úlohu: V prostoru jsou dány body $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Některé dvojice bodů máme spojit úsečkami tak, aby

1. propojení bylo souvislé, tedy aby z každého z daných bodů bylo možno po sestrojených úsečkách doputovat do každého dalšího z daných bodů

2. propojení bylo nejkratší možné, tedy aby součet délek sestrojených úseček byl nejmenší možný

Úlohu můžeme přeložit do řeči teorie grafů. Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf, $w : E \to \mathbb{R}^+$. V naší úloze bude $V = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, $w(\{P_i, P_j\}) = distance(P_i, P_j)$. Pro $F \subseteq E$ položme

$$w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$$

Úkolem je najít podmnožinu $F_0 \subseteq E$ takovou, že

1. graf (V, F_0) je souvislý

2. pro každou podmnožinu $F \subseteq E$ takovou, že graf (V, F) je souvislý, je $w(F_0) \leq w(F)$

Nechť M je množina všech podmnožin F množiny E takových, že graf (V, F) je souvislý. Je $E \in M$, takže $M \neq \emptyset$. Množina M je konečná, protože množina E je konečná a má tedy jen konečně mnoho podmnožin. Jelikož M je konečná neprázdná množina, existuje $F_0 \in M$, $w(F_0) \leq w(F)$ pro všechna $F \in M$. Množinu F_0 tedy najít lze.

Uvědomme si, že (V, F_0) je kostra grafu G. Jistě $F_0 \subseteq E$ a (V, F_0) je souvislý graf. Stačí ukázat, že graf (V, F_0) je acyklický. Předpokládejme naopak, že graf (V, F_0) acyklický není. Existuje tedy nějaký cyklus c v grafu (V, F_0). Zvolme libovolnou hranu f cyklu c. Pokud je graf souvislý, pak odstraněním hrany z cyklu neporušíme souvislost grafu. Je tedy $F_0 - \{f\} \subseteq E$, $(V, F_0 - \{f\})$ je souvislý graf. Takže $F_0 - \{f\} \in M$. Proto $w(F_0) \leq w(F_0 - \{f\})$, $w(F_0) \leq w(F_0) - w(f)$, $0 \leq -w(f)$, $w(f) \leq 0$, spor. Nutně tedy (V, F_0) je acyklický graf.

Vidíme, že úlohu můžeme formulovat jako *problém minimální kostry*:

Je dán souvislý graf $G = (V, E)$ a funkce $w : E \to \mathbb{R}^+$. Úkolem je najít podmnožinu $F_0 \subseteq E$ takovou, že

1. (V, F_0) je kostra grafu G

2. pro každou kostru (V, F) grafu G je $w(F_0) \leq w(F)$

Úkol. Prostudujte kapitolu 4.4 Problém minimální kostry v knize [4]. Naučíte se Kruskalův (čili "hladový") algoritmus pro řešení problému minimální kostry.

Poznámka. V kapitole 4.5 Jarníkův algoritmus a Borůvkův algoritmus v knize [4] můžete získat informace o dalších dvou algoritmech řešících problém minimální kostry.

8.2 Problém obchodního cestujícího

Graf G se nazývá *úplný*, pokud pro všechna $x, y \in V(G)$, $x \neq y$, je $\{x, y\} \in E(G)$.

Vymezíme nyní *problém obchodního cestujícího*. Je dán úplný graf $G = (V, E)$ a funkce $w : E \to \mathbb{R}^+$. Předpokládejme, že $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, kde n je celé číslo, $n \geq 3$. Pro každou permutaci p množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ položme

$$f(p) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} w(\{p(i), p(i+1)\}) + w(\{p(n), p(1)\})$$

Úkolem je najít permutaci p_0 množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takovou, že pro všechny permutace p množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$f(p_0) \leq f(p)$$

Uvědomme si, že pro každou permutaci p množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je $(p(1), p(2), \ldots, p(n), p(1))$ hamiltonovský cyklus v grafu G a $f(p)$ je součet ohodnocení všech hran tohoto cyklu. Úkolem tedy je najít v grafu G minimální hamiltonovský cyklus, a to minimální vzhledem k funkci f.

Jak můžeme úlohu obchodního cestujícího interpretovat? Představme si, že $1, 2, \ldots, n$ jsou města, $w(\{i, j\})$ je cena letenky z města i do města j. Obchodník na své obchodní cestě chce postupně navštívit všechna města (každé právě jednou) a nakonec se vrátit domů. Každá obchodní cesta je popsána permutací p množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$: obchodník z města 1 letí do města 2, $\ldots$, z města $n-1$ letí do města n a z města n se vrátí do města 1. Přitom $f(p)$ je cena cesty (součet cen všech použitých letenek). Obchodníka zajímá (pochopitelně) tato otázka: V jakém pořadí mám města navštívit, aby cesta byla co nejlevnější? Hledá tedy permutaci p_0 množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takovou, že pro všechny permutace p množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je $f(p_0) \leq f(p)$. Jinak řečeno, obchodník řeší problém obchodního cestujícího.

Jistě, problém lze řešit vyzkoušením všech permutací p. Avšak například již pro $n = 10$ (10 měst) to znamená celkem $10! = 3628800$ pokusů. Není znám žádný polynomiální (tedy: efektivní) algoritmus pro řešení problému obchodního cestujícího, ale také není dokázáno, že takový algoritmus neexistuje.

Ukážeme nyní, jak lze efektivně najít permutaci p množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takovou, že $f(p) < 2f(p_0)$.

Buď T libovolný strom s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$. Strom T zakreslíme v rovině: vrcholy budou body roviny a hrana $\{i, j\}$ bude úsečka s krajními body i, j; dbáme přitom na to, aby se úsečky nekřížily (samozřejmě, úsečka odpovídající hraně $\{i, j\}$ má s úsečkou odpovídající hraně $\{j, k\}$ společný jeden bod, a to bod j). Nyní strom T obejdeme podél hran. Začneme u bodu 1 a jdeme tak, že se nevracíme a hrany stromu T máme stále po levé ruce. Jdeme tak dlouho, až se vrátíme zpět do výchozího bodu. (Hrany stromu T si můžeme představovat jako stěnu.) Naši obchůzku můžeme zaznamenat ve sledu $s(T)$. Tento sled začíná ve vrcholu 1, končí ve vrcholu 1, každý vrchol stromu T obsahuje aspoň jednou a každou hranu stromu T obsahuje právě dvakrát (kolem každé stěny projdeme právě dvakrát, jednou podél jedné strany a podruhé podél strany opačné).

Uvedeme příklad. Vezměme strom T na obrázku číslo 4. Pak $s(T) = (1, 2, 1, 4, 3, 4, 5, 4, 1)$ (nebo $s(T) = (1, 4, 3, 4, 5, 4, 1, 2, 1)$).

Nyní stromu T přiřadíme permutaci $p(T)$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Postupujeme takto:

Projdeme sled $s(T)$. Jestliže přijdeme do vrcholu, ve kterém jsme ještě nebyli, pak si jej zaznamenáme. V okamžiku, kdy dorazíme na konec sledu $s(T)$, je náš záznam nějakou permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ (protože ve sledu $s(T)$ se každý vrchol stromu T vyskytuje aspoň jednou); tuto permutaci označíme $p(T)$.

V našem příkladu je $p(T) = 12435$ (nebo $p(T) = 14352$).

Nechť $T_0 = (V, F_0)$ je minimální kostra grafu G. Připomeňme, že kostru T_0 můžeme určit například pomocí Kruskalova algoritmu. Položme $p = p(T_0)$. Budeme říkat, že permutaci p množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ jsme určili pomocí algoritmu TSA (Tree Shortcut Algorithm). Platí

Věta 8.2.1. *Předpokládejme, že ohodnocení w splňuje trojúhelníkovou nerovnost, tedy že pro všechna $i, j, k \in V$, $i \neq j$, $i \neq k$,$j \neq k$, je*

$$w(\{i, j\}) + w(\{j, k\}) \geq w(\{i, k\})$$

Nechť permutace p_0 množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je řešením problému obchodního cestujícího, nechť permutace p množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ byla získána pomocí algoritmu TSA. Pak platí: $f(p) < 2f(p_0)$.

DŮKAZ. Označme c součet ohodnocení všech hran sledu $s(T_0)$. Protože w splňuje trojúhelníkovou nerovnost je $f(p) = f(p(T_0)) \leq c$. Ovšem sled $s(T_0)$ obsahuje každou hranu stromu T_0 právě dvakrát, takže $c = 2w(F_0)$, $f(p) \leq 2w(F_0)$. Dále si uvědomme, že $(p_0(1), p_0(2), \ldots, p_0(n), p_0(1))$ je hamiltonovský cyklus v grafu G. Je $(V, \{\{p_0(1), p_0(2)\}, \{p_0(2), p_0(3)\}, \ldots, \{p_0(n-1), p_0(n)\}\})$ kostra grafu G. Jelikož T_0 je minimální kostra grafu G, je

$$w(F_0) \leq \sum_{1 \leq i \leq n-1} w(\{p_0(i), p_0(i+1)\})$$

Protože $w(\{p_0(n), p_0(1)\}) > 0$, je

$$\sum_{1 \leq i \leq n-1} w(\{p_0(i), p_0(i+1)\}) < \sum_{1 \leq i \leq n-1} w(\{p_0(i), p_0(i+1)\}) + w(\{p_0(n), p_0(1)\}) = f(p_0)$$

Celkem tedy $w(F_0) < f(p_0)$, $2w(F_0) < 2f(p_0)$, $f(p) < 2f(p_0)$.

Cvičení.

1. Vyřešte problém obchodního cestujícího pro čtvercovou mřížku 3×3. To znamená, že máme vyřešit problém obchodního cestujícího pro úplný graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 1 je bod $(0, 0)$, 2 je bod $(1, 0)$, 3 je bod $(2, 0)$, 4 je bod $(0, 1)$, 5 je bod $(1, 1)$, 6 je bod $(2, 1)$, 7 je bod $(0, 2)$, 8 je bod $(1, 2)$ a 9 je bod $(2, 2)$ a pro všechna $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i \neq j$, je $w(\{i, j\}) = distance(i, j)$ (takže například $distance(1, 3) = 2$, $distance(5, 9) = \sqrt{2}$).

2. Vyřešte problém obchodního cestujícího pro čtvercovou mřížku 4×4.

3. Ukažte na příkladu, že pokud w nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost, pak pro permutaci p množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ vypočtenou algoritmem TSA může být $f(p) > 1000 f(p_0)$.

4. Uvažme problém existence hamiltonovského cyklu: Je dán graf G. Úkolem je rozhodnout, zda v grafu G existuje hamiltonovský cyklus. Nechť A je algoritmus pro řešení problému obchodního cestujícího. Ukažte, jak lze pomocí algoritmu A řešit problém existence hamiltonovského cyklu.

9 Kombinatorika v geometrii

9.1 Průsečíky diagonál

Máme dán konvexní n-úhelník (n je celé číslo, $n \geq 3$). Předpokládejme, že žádné 3 úhlopříčky neprocházejí jedním bodem. Kolik existuje průsečíků úhlopříček? Počítáme pouze průsečíky uvnitř n-úhelníka, takže vrchol nepovažujeme za průsečík úhlopříček.

Daný n-úhelník pojmenujme $A_1 A_2 \dots A_n$.

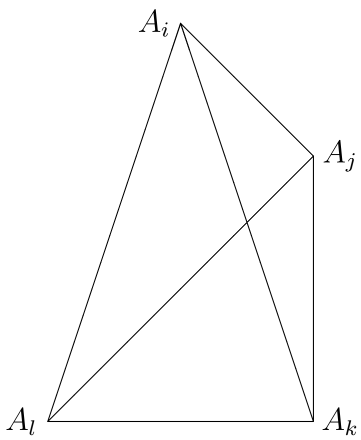
Množinu všech průsečíků diagonál onačme U. Nechť $P \in U$. Existují přesně dvě diagonály, jejichž průsečíkem je bod P; tyto diagonály označme d_1 a d_2. Nechť diagonála d_1 má krajní body B a C, diagonála d_2 má krajní body D a E (body B, C, D, E jsou vrcholy daného n-úhelníka). Předpokládejme, že $\{B, C\} \cap \{D, E\} \neq \emptyset$. Pak ovšem $P \in \{B, C\} \cap \{D, E\}$, P je vrchol daného n-úhelníka, spor. Nutně tedy $\{B, C\} \cap \{D, E\} = \emptyset$. Pak $\{B, C, D, E\}$ je čtyřprvková množina. Označme ji $f(P)$ (zopakujme si: $f(P)$ je čtyřprvková množina krajních bodů dvou diagonál, jejichž průsečíkem je bod P).

Označme V množinu všech čtyřprvkových podmnožin množiny $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

Máme již definováno zobrazení $f : U \to V$.

Ukážeme, že zobrazení f je injekce. Nechť $P, Q \in U$, $f(P) = f(Q) = \{A_i, A_j, A_k, A_l\}$, kde i, j, k, l jsou celá čísla, $1 \leq i < j < k < l \leq n$. Chceme: $P = Q$. Body A_i, A_j, A_k, A_l určují 6 úseček, avšak pouze jediná dvojice těchto úseček má průsečík uvnitř daného n-úhelníka, totiž dvojice $A_i A_k$, $A_j A_l$ (viz obrázek 6). Proto $P = A_i A_k \cap A_j A_l = Q$.

Obrázek 6



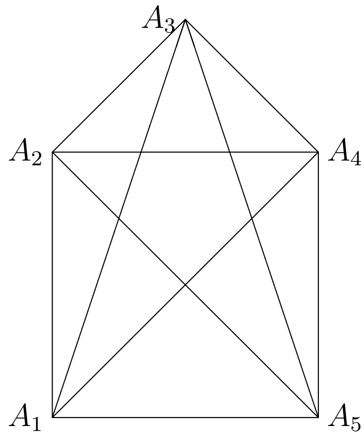
Zobrazení f je také surjekce: Nechť $M \in V$, $M = \{A_i, A_j, A_k, A_l\}$, kde i, j, k, l jsou celá čísla, $1 \leq i < j < k < l \leq n$. Označíme-li průsečík diagonál $A_i A_k$, $A_j A_l$ jako P, bude $P \in U$, $f(P) = M$.

Ukázali jsme, že f je injekce i surjekce. Je tedy f bijekce množiny U na množinu V. Z toho plyne, že $|U| = |V|$. Ovšem $|V| = \binom{n}{4}$ (množina s n prvky má $\binom{n}{4}$ čtyřprvkových podmnožin). Celkem tedy $|U| = \binom{n}{4}$ a máme odpověď na výchozí otázku:

Počet průsečíků úhlopříček konvexního n-úhelníka, jehož žádné tři úhlopříčky neprocházejí jedním bodem, je roven $\binom{n}{4}$.

Jeden případ (pro $n = 5$) lze vidět na obrázku číslo 7; připomeňme, že $\binom{5}{4} = 5$.

Obrázek 7



Cvičení.

1. Nechť n je celé číslo, $n \geq 3$. Určete počet úhlopříček konvexního n-úhelníka.

9.2 Počítání oblastí

V rovině je dáno n přímek (n je nezáporné celé číslo). Na kolik oblastí je rovina rozdělena těmito přímkam?

Jistě, 0 přímek rozdělí rovinu na 1 oblast, 1 přímka rozdělí rovinu na 2 oblasti.

Pro 2 přímky však již odpověď není jednoznačná. Dvě přímky mohou rovinu rozdělit na 3 oblasti (obrázek 8), ale také na 4 oblasti (obrázek 9). Abychom tuto nejednoznačnost odpovědi odstranili (a přiklonili se k vyšímu počtu oblastí), budeme požadovat, aby žádné dvě přímky nebyly rovnoběžné,

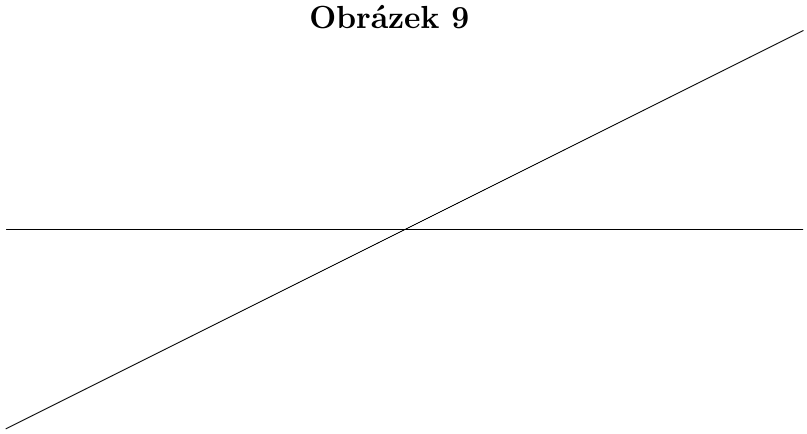
Nyní uvažme 3 přímky, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Opět není odpověď jednoznačná. Tři přímky mohou rovinu rozdělit na 6 oblastí (obrázek 10), ale také na 7 oblastí (obrázek 11). Opět, kvůli jednoznačnosti přidáme požadavek, že žádné tři přímky neprocházejí jedním bodem.

Takže: V rovině je dáno n přímek *v obecné poloze*, tj. žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem. Na kolik oblastí těchto n přímek rozděluje rovinu?

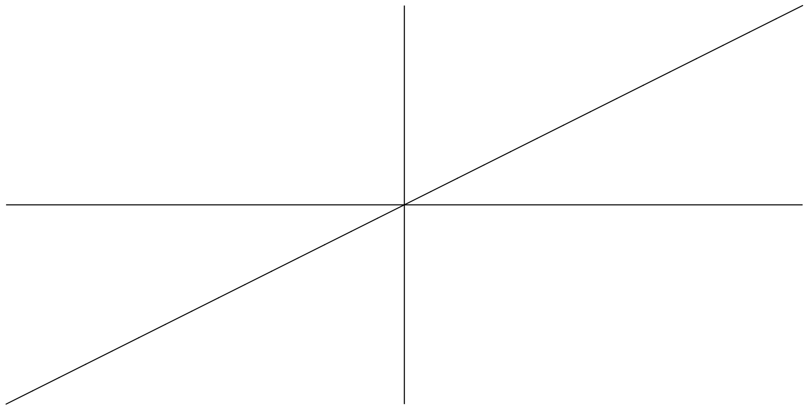
Zkusme ještě nakreslit obrázek pro 4 přímky v obecné poloze (obrázek 12). Dostali jsme 11 oblastí.

Obrázek 8

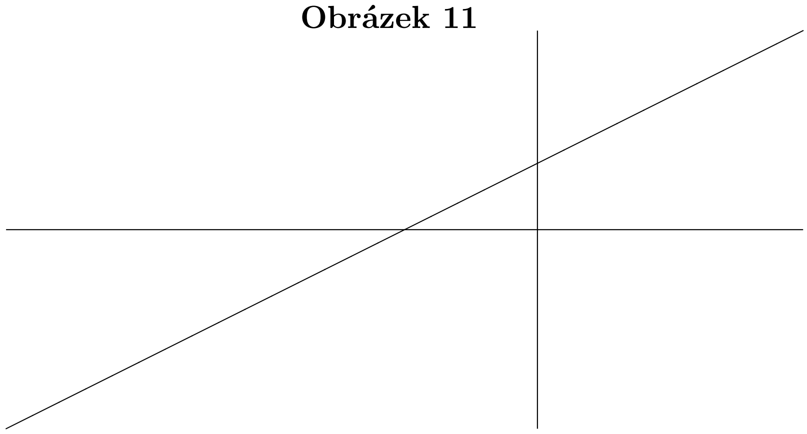
Obrázek 9



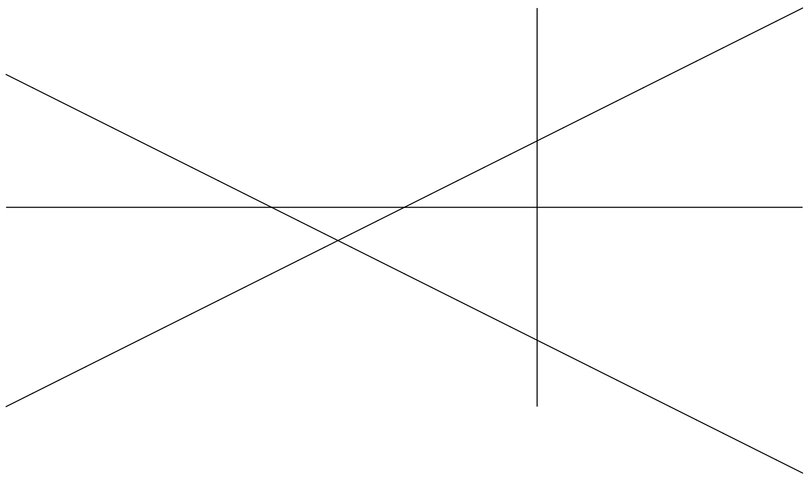
Obrázek 10



Obrázek 11



Obrázek 12



Naše dosavadní zjištění zapišme do tabulky:

počet přímek	0	1	2	3	4
počet oblastí	1	2	4	7	11

Vidíme: přidání první přímky zvýší počet oblastí o 1, přidání druhé přímky zvýší počet oblastí o 2, přidání třetí přímky zvýší počet oblastí o 3, přidání čtvrté přímky zvýší počet oblastí o 4.

Máme hypotézu: přidání n-té přímky zvýší počet oblastí o n.

Pokusíme se hypotézu dokázat. Předpokládejme, že jsme přidali přímku číslo n ($n > 0$). Protože žádné dvě přímky nejsou rovnoběžné, protíná n-tá přímka každou z přímek číslo $1, 2, \dots n-1$. Těchto průsečíků je celkem $n-1$, protože žádné tři přímky neprocházejí jedním bodem. Dále, těchto $n-1$ průsečíků rozděluje n-tou přímku na n úseků – 2 polopřímky a $n-2$ úseček (v případě $n = 1$ na jeden úsek, kterým je celá přímka). Každý z těchto úseků rozdělí jednu oblast na dvě, takže počet oblastí se opravdu zvýší o n. Hypotéza je dokázána.

Nyní je již jasné, že celkový počet oblastí je roven

$$1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 1 + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$$

Dokázali jsme následující větu

Věta 9.2.1. *Množina n přímek v obecné poloze v rovině rozděluje rovinu na $\frac{n^2+n+2}{2}$ oblastí.*

Cvičení.

1. Na kolik částí rozdělí rovinu čtyři kružnice? Určete největší a nejmenší možný počet.

2. Na kolik částí rozdělí prostor čtyři roviny? Určete největší a nejmenší možný počet.

10 Eulerova formule

10.1 Rovinné grafy

Rovinným nakreslením grafu $G = (V, E)$ rozumíme přiřazení, které každému vrcholu $v \in V$ přiřadí bod $P(v)$ roviny a každé hraně $e \in E$, $e = \{u, v\}$, přiřadí souvislou křivku $c(e)$ v rovině s koncovými body $P(u)$ a $P(v)$, přičemž jsou splněny následující podmínky:

1. přiřazení P je prosté
2. pro všechna $e \in E$ je křivka $c(e)$ prostá, t.j. neprotíná sebe sama
3. pro všechna $e \in E$ platí: jestliže $e = \{u, v\}$, pak na křivce $c(e)$ neleží žádný z bodů $P(w)$, kde $w \in V$, $w \neq u$, $w \neq v$
4. pro všechna $e, f \in E$ platí: jestliže $e \cap f = \emptyset$, pak křivky $c(e)$ a $c(f)$ nemají žádný společný bod
5. pro všechna $e, f \in E$ platí: jestliže $e \cap f = \{v\}$, pak křivky $c(e)$ a $c(f)$ mají jediný společný bod, a to bod $P(v)$

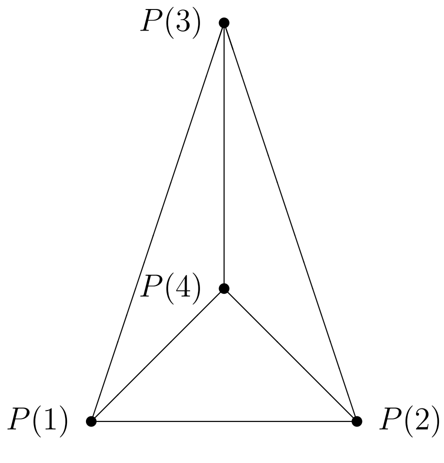
Graf G nazýváme *rovinný*, pokud existuje aspoň jedno rovinné nakreslení grafu G.

Například graf K_4 (úplný graf s množinou vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$) je rovinný – jeho rovinné nakreslení vidíme na obrázku číslo 13 ($c(\{1, 2\})$ je úsečka $P(1)P(2)$, atd.).

Například graf K_5 není rovinný – v této kapitole se mimo jiné naučíte, jak lze toto tvrzení dokázat.

Úkol. Prostudujte kapitolu 5.1 Kreslení do roviny a na další plochy v knize [4].

Obrázek 13



10.2 Eulerova formule pro souvislé rovinné grafy

Nechť G je souvislý rovinný graf, který má n vrcholů a m hran. Každé rovinné nakreslení grafu G rozdělí rovinu na oblasti. Počet těchto oblastí označme f. Jedna oblast je neohraničená, ostaní jsou ohraničené. Platí:

$$n - m + f = 2$$

Tento vztah se nazývá *Eulerova formule* a je to základní kvantitativní vztah pro rovinné grafy. Například pro rovinné nakreslení grafu K_4 na obrázku 13 máme $n = 4$, $m = 6$, $f = 4$. Všechny ostatní výsledky tento vztah ve větší či menší míře využívají.

Úkol. Prostudujte kapitolu 5.3 Eulerův vztah v knize [4]. Dokážete Eulerovu formuli, dokážete, že graf K_5 není rovinný, a další věci. Aplikací Eulerovy formule odvodíte, že existuje pouze pět pravidelných mnohostěnů (pravidelný mnohostěn je konvexní těleso, ohraničené konečným počtem stěn – shodných pravidelných mnohoúhelníků, jichž se v každém vrcholu stýká stejný počet). Nezapomeňte na cvičení na konci kapitoly.

Poznámka. Rovinným grafům je věnována také kapitola 2, část 7, Rovinné grafy, v učebnici [1].

11 Barvení map a grafů

11.1 Barvení oblastí dvěma barvami

V rovině nakreslíme několik kružnic. Tyto kružnice rozdělí rovinu do několika oblastí. Pokusíme se oblasti obarvit červeně a modře (každou oblast jen jednou z těchto barev, samozřejmě), a to tak, aby sousední oblasti měly různou barvu. Je možné takové obarvení vždy udělat? Odpověď dává následující věta.

Věta 11.1.1. *Oblasti vytvořené n kružnicemi v rovině mohou být obarveny červeně a modře takovým způsobem, že každé dvě oblasti, které sdílejí společný hraniční oblouk, budou obarveny různou barvou.*

Důkaz. Postupujme indukcí vzhledem k číslu n.

1. $n = 1$: Máme jednu kružnici. Oblast uvnitř kružnice obarvíme červeně, oblast vně kružnice obarvíme modře.

2. $n > 1$: Jednu kružnici, označme ji k, odstraníme. Máme pak $n - 1$ kružnic, které rozdělují rovinu na oblasti. Dle indukčního předpokladu lze tyto oblasti obarvit červeně a modře takovým způsobem, že každé dvě oblasti, které sdílejí společný hraniční oblouk, jsou obarveny různou barvu. Toto obarvení označme b_1. Nyní do roviny vrátíme kružnici k

a oblasti nově obarvíme takto: obarvení vně kružnice k ponecháme, uvnitř kružnice k barvy vyměníme. Toto obarvení označme b_2. Uvědomíme si, že oblasti, na které je rovina rozdělena danými n kružnicemi, jsou pomocí b_2 obarveny červeně a modře opět takovým způsobem, že každé dvě oblasti, které sdílejí společný hraniční oblouk, jsou obarveny různou barvou. Vezměme libovolné dvě oblasti F_1, F_2, které sdílejí společný hraniční oblouk o. Je třeba ukázat, že barva oblasti F_1 v obarvení b_2 je jiná než barva oblasti F_2 v obarvení b_2. Rozlišíme tři případy:

- F_1, F_2 jsou vně kružnice k: Nechť S_1, S_2 jsou oblasti z rozdělení roviny pomocí $n-1$ kružnic (kružnici k vynecháváme), a to takové, že $F_1 \subseteq S_1$, $F_2 \subseteq S_2$. Oblasti S_1, S_2 sdílejí společný hraniční oblouk (jeho částí je oblouk o), takže v obarvení b_1 mají oblasti S_1, S_2 různou barvu. Takže b_1 dává oblasti F_1 jinou barvu než oblasti F_2; stejně tomu bude i v obarvení b_2, protože vně kružnice k je obarvení b_2 shodné s obarvením b_1.
- F_1, F_2 jsou uvnitř kružnice k: Nechť S_1, S_2 jsou oblasti z rozdělení roviny pomocí $n-1$ kružnic (kružnici k vynecháváme), a to takové, že $F_1 \subseteq S_1$, $F_2 \subseteq S_2$. Oblasti S_1, S_2 sdílejí společný hraniční oblouk (jeho částí je oblouk o), takže v obarvení b_1 mají oblasti S_1, S_2 různou barvu. Takže b_1 dává oblasti F_1 jinou barvu než oblasti F_2; stejně tomu bude i v obarvení b_2, protože uvnitř kružnice k obarvení b_2 vyměnilo barvy z obarvení b_1.
- F_1 je vně kružnice k, F_2 je uvitř kružnice k: Oblouk o je částí kružnice k. Pak $F_1 \cup F_2$ je oblastí z rozdělení roviny pomocí $n-1$ kružnic. Předpokládejme, že b_1 obarvuje oblast $F_1 \cup F_2$ například červeně. Obarvení b_2 se vně kružnice k shoduje s b_1, uvnitř kružnice k však barvy vyměnilo. Z toho blyne, že v b_2 má F_1 barvu červenou a F_2 má v b_2 barvu modrou.
- F_1 je uvnitř kružnice k, F_2 je vně kružnice k: Tento případ je podobný případu předchozímu.

Cvičení.

1. Dokažte, že oblasti, na které rovinu rozdělí n přímek (n je kladné celé číslo) mohou být obarveny dvěma barvami tak, že sousední oblasti budou mít různou barvu.

11.2 Barvení grafů dvěma barvami

V předchozí kapitole jsme barvili dvěma barvami oblasti v rovině, v této kapitole budeme barvit dvěma barvami vrcholy grafu.

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Říkáme, že graf G je *2-obarvitelný*, pokud můžeme vrcholy grafu G obarvit červeně a modře (každý vrchol jen jednou z těchto barev) tak, že sousední vrcholy mají různou barvu.

Následující věta charakterizuje 2-obarvitelné grafy.

Věta 11.2.1. *Graf je 2-obarvitelný právě tehdy, když neobsahuje žádný cyklus liché délky.*

DŮKAZ.

1. Předpokládejme, že graf G je 2-obarvitelný. Chceme: graf G neobsahuje žádný cyklus liché délky. Uvažme nějaké obarvení grafu G pomocí dvou barev. Nechť $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ je cyklus délky k v grafu G (k je celé číslo, $k \geq 3$). Je třeba ukázat, že číslo k je sudé. Nechť vrchol x_0 je červený. Vrchol x_1 je soused vrcholu x_0, takže vrchol x_1 je modrý. Vrchol x_2 je soused vrcholu x_1, takže vrchol x_2 je červený. Vrchol x_3 je soused vrcholu x_2, takže vrchol x_3 je modrý. Asi již vidíme, že x_i je červený pro sudá i a x_i je modrý pro lichá i. Víme, že $x_k = x_0$, takže x_k je červený, a tedy k je sudé. Ke stejnému závěru dojdeme také tehdy, když vrchol x_0 je modrý.

2. Pro každé nezáporné celé číslo m ukážeme: Jestliže graf má m hran a neobsahuje žádný cyklus liché délky, pak je 2-obarvitelný. Důkaz provedeme indukcí.

   - $m = 0$: Graf nemá žádnou hranu, takže můžeme třeba všechny vrcholy obarvit modře. Jistě bude platit, že sousední vrcholy mají různou barvu.
   - $m > 0$: Nechť graf $G = (V, E)$ má m hran a neobsahuje žádný cyklus liché délky. Chceme: G je 2-obarvitelný. Zvolme libovolně hranu $e \in E$. Uvažme graf $H = (V, E - \{e\})$. Graf G neobsahuje žádný cyklus liché délky, takže totéž platí i pro graf H. Graf H má $m - 1$ hran. Dle indukčního předpokladu graf H je 2-obarvitelný. Obarvení grafu H pomocí dvou barev označme b. Pro každé $x \in V$ označme $b(x)$ barvu vrcholu x v obarvení b. Nechť $e = \{u, v\}$. Jestliže $b(u) \neq b(v)$, pak b bude také obarvením grafu G pomocí dvou barev. Předpokládejme tedy, že $b(u) = b(v)$. Pak již b není obarvením grafu G, protože vrcholy u, v jsou v grafu G sousední. Nechť C je komponenta grafu H, $u \in C$. Předpokládejme, že $v \in C$. Pak v grafu H existuje cesta $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ (k je celé číslo, $k \geq 1$), $x_0 = u$, $x_k = v$. Jelikož b je obarvení grafu H a $b(x_0) = b(x_k)$, je číslo k sudé. Pak $(x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$, kde $x_{k+1} = u = x_0$, je cyklus délky $k + 1$ v grafu G. Ovšem číslo $k + 1$ je liché, takže v grafu G existuje cyklus liché délky, spor. Nutně tedy $v \notin C$. Budeme nyní definovat obarvení b' grafu G pomocí dvou barev. Jestliže $x \in V - C$, pak bude $b'(x) = b(x)$. Nechť $x \in C$. Modrou barvu označme B, červenou barvu označme R. Jestliže $b(x) = R$, pak bude $b'(x) = B$. Jestliže $b(x) = B$, pak bude $b'(x) = R$. Stručně můžeme říci, že obarvení b' je shodné s obarvením b mimo komponentu C a obarvení b' barví vrcholy komponenty C jinak než b (co je modré, bude červené, a co je červené, bude modré). Nyní je již snadné se přesvědčit o tom, že b' je opravdu obarvení grafu G pomocí dvou barev. Nechť $f \in E$, $f = \{x, y\}$. Je třeba ukázat, že $b'(x) \neq b'(y)$. V případě $f \neq e$ je f hrana grafu H. Je tedy $b(x) \neq b(y)$. Jsou jen dvě možnosti: $x, y \in V - C$ nebo $x, y \in C$. V obou případech bude $b'(x) \neq b'(y)$ (v

prvním případě je to jasné, protože $b'(x) = b(x)$, $b'(y) = b(y)$; ve druhém případě nechť například $b(x) = R$, $b(y) = B$ a tedy $b'(x) = B$, $b'(y) = R$). Zbývá případ $f = e$. Je třeba ukázat, že $b'(u) \neq b'(v)$. Stačí si uvědomit, že $b(u) = b(v)$, například $b(u) = b(v) = B$. Pak $b'(u) = R$, $b'(v) = B$.

11.3 Barvení grafů více barvami

V této kapitole budeme vrcholy grafu barvit pomocí k barev. Nejdříve pojem obarvení grafu přesně vymezíme.

Nechť $G = (V, E)$ je graf, k je kladné celé číslo. Zobrazení $b : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ se nazývá *obarvení grafu G pomocí k barev*, pokud pro všechna $x, y \in V$, $x \neq y$, platí:

$$\{x, y\} \in E \Longrightarrow b(x) \neq b(y)$$

Graf G se nazývá *k-obarvitelný*, pokud existuje nějaké obarvení grafu G pomocí k barev.

Nejmenší kladné celé číslo k takové, že graf G je k-obarvitelný, se nazývá *chromatické číslo* grafu G (označení: $\chi(G)$). Chromatické číslo grafu G se také nazývá *barevnost* grafu G. Chromatické číslo grafu G je minimální počet barev potřebný pro obarvení G.

Nechť d je nezáporné celé číslo, $G = (V, E)$ je graf takový, že pro všechna $v \in V$ je $deg(v) \leq d$. Předvedeme nyní *algoritmus*, jenž vytvoří obarvení grafu G pomocí $d + 1$ barev.

Počet vrcholů grafu G označme n.

Nejprve vrcholy grafu G očíslujeme čísly $1, 2, \ldots, n$. Pak bude $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Pro i od 1 do n dělej: $b(i) \leftarrow *$.

2. Pro i od 1 do n dělej: $b(i) \leftarrow \min(\{1, 2, \ldots, d + 1\} - \{b(j) |\ j \in V, j \neq i, \{i, j\} \in E\})$.

Povšimněme si jedné důležité věci: Při každém provedení bodu 2 je $\{1, 2, \ldots, d + 1\} - \{b(j) |\ j \in V, j \neq i, \{i, j\} \in E\} \neq \emptyset$, protože vrchol i má nejvýše d sousedů (je $deg(i) \leq d$). Vrchol i obarvíme nejmenší volnou barvou.

Uvažme graf G na obrázku číslo 1. Je $\max\{deg(v) |\ v \in V(G)\} = 3$. Položme $d = 3$. Algoritmus určí obarvení b grafu G pomocí 4 barev: $b(1) = 1$, $b(2) = 2$, $b(3) = 1$, $b(4) = 2$, $b(5) = 3$.

Konstruktivně (viz algoritmus) jsme dokázali následující větu:

Věta 11.3.1. *Nechť d je nezáporné celé číslo, $G = (V, E)$ je graf takový, že pro všechna $v \in V$ je $deg(v) \leq d$. Pak G je $(d + 1)$-obarvitelný, tj. $\chi(G) \leq d + 1$.*

Cvičení.

1. Nechť d je nezáporné celé číslo, $G = (V, E)$ je graf, $w \in V$, pro všechna $v \in V - \{w\}$ je $deg(v) \leq d$. Pak $\chi(G) \leq d + 1$. Dokažte.

2. Určete všechny grafy $G = (V, E)$ takové, že $V = \{1, 2, 3\}$, $\chi(G) = 1 + \max\{deg(v) |\ v \in V\}$.

11.4 Barvení map

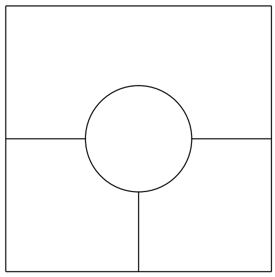
Uvažme politickou mapu, na níž jsou vyznačeny hranice států. Předpokládáme, že každý stát tvoří souvislou oblast. Dva státy považujeme za sousední, jestliže mají společný aspoň souvislý kousek hranice nenulové délky (nestačí jen dotyk v jednom bodě). Každý stát na mapě chceme vybarvit nějakou barvou, a to tak, že sousední státy mají různou barvu (tak se to na politických mapách dělává).

Jedním z nejznámějších kombinatorických problémů je následující otázka:

Problém čtyř barev: Je možno každou mapu obarvit 4 barvami?

Mapa na obrázku číslo 14 ukazuje, že tři barvy u některých map stačit nebudou.

Obrázek 14



V této kapitole se naučíte, jak lze problematiku barvení map převést na otázky týkající se barevnosti rovinných grafů. Specielně přeformulujete

Problém čtyř barev: Platí $\chi(G) \leq 4$ pro každý rovinný graf G?

Přečtete si něco málo o větě o 4 barvách, naučíte se dokázat větu o 5 barvách (pro každý rovinný graf G je $\chi(G) \leq 5$).

Úkol. Prostudujte kapitolu 5.4 Barevnost mapy – problém 4 barev v knize [4].

Reference

[1] Fuchs, E.: *Diskrétní matematika pro učitele.* Masarykova univerzita, Brno, 2011.

[2] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Metody řešení matematických úloh II.* Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno 2004.

[3] Knuth, D. E.: *Umění programování, 1. díl, Základní algoritmy.* Computer Press, a.s., Brno, 2008.

[4] Matoušek, J., Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Nakladatelství Karolinum, Praha, 2002.