Algebra I – úlohy k procvičení – 2.12.2020

1. Nechť k, n jsou celá čísla, $2 \leq k \leq n$. Nechť $\sigma \in S_n$, σ je cyklus délky k. Dokažte, že permutace σ má řád k.

2. Nechť n je celé číslo, $n \geq 2$. Nechť $\pi \in S_n$,

$$\pi = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_l$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ jsou vzájemně disjunktní cykly z S_n.

Pro $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ označme m_i délku cyklu σ_i. Položme $m = NSN(m_1, m_2, \ldots, m_l)$.

Pak m je řád permutace π. Dokažte.

3. Pro následující permutace najděte rozklad na součin vzájemně disjunktních cyklů a určete řád.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

4. Zapište permutaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

jako součin několika transpozic.

5. Nechť p je prvočíslo tvaru $4n + 3$, kde n je nezáporné celé číslo. Ukažte, že kongruence

$$x^2 \equiv -1 \ (p)$$

nemá žádné řešení.