Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.
KMA – Katedra matematiky PřF

12. 3. 2025

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Hry s nenulovým součtem

Hry s nenulovým/nekonstantním součtem

- V praxi se často setkáváme s konflikty, kdy účastníci rozhodnutí sledují své individuální zájmy, ale tyto zájmy nejsou nutně v přímém protikladu.
- Tento typ konfliktu označujeme jako neantagonistický konflikt, což znamená, že výhra jednoho účastníka nemusí automaticky znamenat prohru druhého.
- Budeme rozlišovat hry nekooperativní a hry kooperativní.
- **Kooperativní hry** - hráči mohou spolupracovat a domlouvat se na volbě svých strategií.
- **Nekooperativní hry** - hráči se musí rozhodovat nezávisle na ostatních.

Nekooperativní hry dvou hráčů s nenulovým součtem

- Matematický model konečné nekooperativní hry dvou hráčů je známý jako dvoumaticová hra.
- Hra je definována dvěma maticemi: **A** charakterizuje výplatní funkci prvního hráče a **B** charakterizuje výplatní funkci druhého hráče.
- Při výběru i-té strategie prvního hráče a j-té strategie druhého hráče je hodnota výplatní funkce prvního hráče rovna prvku a_{ij} a hodnota výplatní funkce druhého hráče rovna prvku b_{ij}.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Dominované strategie

U dvoumaticových her můžeme rovněž eliminovat zjevně nevýhodné, dominované strategie.

Definice

Strategie prvního hráče $x_i \in X$ se nazývá dominovaná jinou strategií $x_k \in X$, jestliže pro každou strategii druhého hráče $y \in Y$ platí

$$v_1(x_k, y) \geq v_1(x_i, y)$$

Analogicky pro druhého hráče.

V některých případech existují v dvoumatici dominované strategie. Po jejich vyškrtnutí můžeme buï získat jediný prvek, který představuje rovnovážný bod, nebo zbývající prvky nám poskytnou alespoň jednodušší dvoumaticovou hru.

Příklad

Uvažujme dvoumaticovou hru určenou dvoumaticí

$$\begin{pmatrix} 1;0 & 1;3 & 3;0 \\ 0;2 & 0;1 & 3;0 \\ 0;2 & 2;4 & 5;3 \end{pmatrix}$$

Pozorujeme, že strategie prvního hráče x_2 je dominovaná strategií x_3, protože pro každou strategii druhého hráče získá první hráč větší odměnu při volbě strategie x_3 než při volbě x_2.
Stejně tak strategie druhého hráče y_3 je dominovaná strategií y_2.
Vzhledem k této dominanci můžeme eliminovat tyto strategie, protože racionální hráči by je nikdy nevolili. Po odstranění dominovaných strategií získáme zjednodušenou dvoumaticovou hru:

$$\begin{pmatrix} 1;0 & 1;3 & . \\ . & . & . \\ 0;2 & 2;4 & . \end{pmatrix}$$

Příklad - pokračování

$$\begin{pmatrix} 1;0 & 1;3 & . \\ . & . & . \\ 0;2 & 2;4 & . \end{pmatrix}$$

Nyní je strategie y_1 dominovaná strategií y_2, druhý hráč tedy zvolí y_2. První hráč se nyní rozhoduje mezi hodnotami ve druhém sloupci dvoumatice a protože $1 < 2$, zvolí strategii x_3. Rovnovážný bod v dané hře je proto (x_3, y_2).

$$\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & 2;4 & . \end{pmatrix}$$

Nashovo rovnovážné řešení

Definice

Dvojici strategií x^0 a y^0 nazveme Nashovými rovnovážnými strategiemi, jestliže platí

$$v_1(x, y^0) \leq v_1(x^0, y^0)$$

$$v_2(x^0, y) \leq v_2(x^0, y^0)$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$.

Je zřejmé, že je-li (x^0, y^0) rovnovážný bod, pak pro $a_{ij} = v_1(x^0, y^0)$, $b_{ij} = v_2(x^0, y^0)$ platí:

- a_{ij} je největší prvek ve sloupci j matice **A**

$$a_{ij} = \max_{1 \leq k \leq m} a_{kj}$$

- b_{ij} je největší prvek v řádku i matice **B**

$$b_{ij} = \max_{1 \leq k \leq n} b_{ik}$$

Příklad

Uvažujme hru určenou dvojmaticí (pro jednoduchost zapíšeme do jedné matice

$$\begin{pmatrix} 3;0 & 2;-1 \\ 1;1 & 3;-2 \end{pmatrix}$$

Hledáme maxima ve sloupci matice A a maxima v řádku matice B.

$$\begin{pmatrix} (3);[0] & 2,-1 \\ 1;[1] & (3);-2 \end{pmatrix}$$

Bod (x_1, y_1) je rovnovážným bodem. Pokud by druhý hráč zvolil strategii y_1 a první hráč se od strategie x_1 odchýlil, tj. zvolil by strategii x_2, pak by si pohoršil - získal by 1 místo 2. Obdobně pokud by první hráč zvolil strategii x_1 a druhý hráč se od y_1 odchýlil, pak by si pohoršil, prohrál by -1 místo 0.

Příklad

Uvažujme hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (7);[9] & -2;1 \\ -2;0 & (6);[4] \end{pmatrix}$$

Existují dvě rovnovážná řešení v ryzích strategiích. Hráči dají přednost rovnovážnému řešení s výplatami (7,9), které dominuje řešení s výplatami (6,4).

Definice

Nechť (x, y) je rovnovážný bod dvoumaticového hry pro který platí

$$v_1(x, y) \geq v_1(x', y')$$

a zároveň

$$v_2(x, y) \geq v_1(x', y')$$

pro libovolný rovnovážný bod (x', y') dané hry. Potom se (x, y) nazývá **dominujícím rovnovážným bodem**.

Příklad

Uvažujme hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (3);[9] & -2;1 \\ -2;0 & (6);[4] \end{pmatrix}$$

Existují dvě rovnovážná řešení v ryzích strategiích: bod (x_1, y_1) a bod (x_2, y_2). Nicméně, pokud první hráč zvolí druhý řádek (protože rovnovážné řešení na druhém řádku je pro něj výhodnější) a druhý hráč zvolí první sloupec (protože rovnovážné řešení v prvním sloupci je pro něj výhodnější), následky této volby jsou nepříznivé pro oba hráče, což vede k řešení s výplatami (-2, 0).

Příklad

Uvažujme hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} 3; [5] & (2); -1 \\ (4); 1 & -2; [5] \end{pmatrix}$$

Hra nemá Nashovo rovnovážné řešení v ryzích strategiích.

Smíšené rozšíření dvoumaticové hry

- řešení, kdy používáme smíšené strategie, nazýváme smíšené rozšíření dvoumaticové hry
- prostory strategií pak opět představují vektory pravděpodobností

$$X = \{\mathbf{x}; \mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \ldots, x_m], \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$Y = \{\mathbf{y}; \mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \ldots, y_n], \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \mathbf{y} \geq 0\}$$

- hodnota výplatní funkce prvního hráče udává očekávanou střední hodnotu výhry prvního hráče a hodnota výplatní funkce druhého hráče udává očekávanou střední hodnotu výhry druhého hráče

$$v_1(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\ \mathbf{y}$$

$$v_2(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{B}\ \mathbf{y}$$

Základní věta dvoumaticových her

Základní věta dvoumaticových her

Každá konečná dvoumaticová hra má aspoň jeden rovnovážný bod (x^0, y^0), tj. pro všechny smíšené strategie **x,y** platí

$$v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^0) \leq v_1(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$$

$$v_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) \leq v_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$$

Bohužel však Nashův důkaz věty neposkytuje efektivní algoritmus pro výpočet rovnovážného bodu v dvoumaticové hře. Proces hledání rovnovážného bodu je spojen s exponenciální složitostí, což znamená, že v praxi může být časově náročný a obtížný.

řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování

Naším cílem je maximalizovat

$$\max_x \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{y}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

a maximalizovat

$$\max_y \mathbf{x}^T \mathbf{B}\mathbf{y}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

$$\mathbf{y} \geq 0.$$

řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování

Potom Nashův rovnovážný bod je strategie $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$, pro kterou platí

$$\mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}^0 = \max_x\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^0 | \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$\mathbf{x}^{0T}\mathbf{B}\mathbf{y}^0 = \max_y\{\mathbf{x}^{0T}\mathbf{B}\mathbf{y} | \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \mathbf{y} \geq 0\}$$

Věta (Mangasarian, Stone, 1964)

Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby bod (x^0, y^0) byl rovnovážným bodem uvedené hry, je to, že je řešením následujícího kvadratického programu:

$$\max_{\mathbf{x},\mathbf{y},\alpha,\beta} \mathbf{x}^T(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{y} - \alpha - \beta$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{y} - \alpha\mathbf{e} &\leq \mathbf{0} \\
\mathbf{B}^T\mathbf{x} - \beta\mathbf{f} &\leq \mathbf{0} \\
\mathbf{e}^T\mathbf{x} &= 1 \\
\mathbf{f}^T\mathbf{y} &= 1 \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\
\mathbf{y} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování

e a **f** jsou vektory jedniček, α je výhra prvního hráče a β je výhra druhého hráče.
Hodnota účelové funkce je 0:

$$\mathbf{x}^{0T}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{y}^0 - \alpha^0 - \beta^0 = 0$$

řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování - příklad

Uvažujme příklad, kde každý hráč má dvě strategie.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Spočteme

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Potom budeme řešit následující úlohu kvadratického programování:

řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování - příklad

$$\max_{\mathbf{x},\mathbf{y},\alpha,\beta} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \alpha - \beta$$

$$\begin{aligned}
2y_1 - y_2 - \alpha &\leq 0 \\
-y_1 + y_2 - \alpha &\leq 0 \\
x_1 - x_2 - \beta &\leq 0 \\
-x_1 + 2x_2 - \beta &\leq 0 \\
x_1 + x_2 &= 1 \\
y_1 + y_2 &= 1 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
y_1 &\geq 0 \\
y_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování - příklad

řešení nalezneme pomocí software, řešení jsou tři, záleží na výchozích bodech.

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{'0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^{'0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{"0} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^{"0} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

Děkuji za pozornost.