Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.
KMA – Katedra matematiky PřF

5. 3. 2025

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Uvažujme výplatní matici

$$\begin{array}{cccl} 1 & -1 & 2 & \ldots \text{minimum -1} \\ -1 & 2 & 1 & \ldots \text{minimum -1} \\ -1 & -2 & 1 & \ldots \text{minimum -2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \text{maximum 1} & \text{maximum 2} & \text{maximum 2} & \end{array}$$

Tedy minimax 1, maximin -1, cena hry je někde mezi -1 a 1, cena hry není s jistotou kladná.

V takovém případě můžeme ke každému prvku matice přičíst kladné číslo c, čímž získáme strategicky ekvivalentní hru. Rovnovážné strategie se nezmění, cena hry se zvýší o c.

Příklad strategicky ekvivalentní hry

Uvažujme výplatní matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Strategicky ekvivalentní hru vytvoříme přičtením 2 k matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nová matice bude mít cenu hry v intervalu $[1, 3]$, tedy kladnou.

Poznámka: Pokud k matici přičteme takové číslo c, že každý prvek $a_{ij} + c > 0$, pak je zajištěno, že nová cena hry $v + c > 0$.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - shrnutí

Označíme si $b_{ij} = a_{ij} + c$, $p_i = \frac{x_i}{v+c}$, $p_i \geq 0$. Pak maticovou hru tedy můžeme vyřešit pomocí úloh lineárního programování.
Pro prvního hráče:

$$\min p_1 + p_2 + \ldots + p_m$$

za podmínek

$$b_{11}p_1 + b_{21}p_2 + \ldots + b_{m1}p_m \geq 1$$

$$\vdots$$

$$b_{1n}p_1 + b_{2n}p_2 + \ldots + b_{mn}p_m \geq 1$$

$$p_i \geq 0; i = 1, 2, \ldots, m$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - shrnutí

A pro druhého hráče označíme $q_i = \frac{y_i}{v+c}, q_i \geq 0$ a řešíme úlohu:

$$\max q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

za podmínek

$$b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + \ldots + b_{1n}q_n \leq 1$$

$$\vdots$$

$$b_{m1}q_1 + b_{m2}q_2 + \ldots + b_{mn}q_n \leq 1$$

$$q_i \geq 0; i = 1, 2, \ldots, n$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - shrnutí

- Uvedené úlohy jsou duálně sdružené.
- Úloha pro prvního hráče je duální problém, zatímco úloha pro druhého hráče je primární problém.
- řešením jakékoli ze dvou úloh získáme řešení obou úloh $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$ a z hodnoty účelové funkce zjistíme v.
- Z výpočetního hlediska je výhodnější řešit maximalizační úlohu s proměnnými q_i.
- Ukážeme si řešení pomocí simplexové tabulky, ale řešení lze nalézt i bez znalosti simplexové metody, např. s pomocí řešitele v MS Excel.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\max q_1 + q_2 + q_3$$

$$\begin{aligned} 3q_1 + q_2 + 4q_3 &\leq 1 \\ q_1 + 4q_2 + 3q_3 &\leq 1 \\ q_1 + 3q_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

$$q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - příklad

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\min p_1 + p_2 + p_3$$

$$\begin{aligned} 3p_1 + p_2 + p_3 &\geq 1 \\ p_1 + 4p_2 &\geq 1 \\ 4p_1 + 3p_2 + 3p_3 &\geq 1 \end{aligned}$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - řešení příkladu

$$\mathbf{q}^T = \left(\frac{3}{11}; \frac{2}{11}; 0\right)$$

$$\mathbf{p}^T = \left(\frac{3}{11}; \frac{2}{11}; 0\right)$$

$$z = \frac{5}{11}$$

Po substituci

$$\mathbf{y}^{0T} = \frac{11}{5}.\mathbf{q}^T = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}; 0\right)$$

$$\mathbf{x}^{0T} = \frac{11}{5}.\mathbf{p}^T = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}; 0\right)$$

$$v = \frac{11}{5} - 2 = \frac{1}{5}$$

Děkuji za pozornost.