Algebra I – úlohy k procvičení – 21.10.2020 – řešení

1. Dokažte, že neexistuje žádný surjektivní homomorfismus grupy $\mathbb{Q}$ s operací $+$ na grupu $\mathbb{Z}$ s operací $+$.

   Řešení. Sporem. Nechť $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ je surjektivní homomorfismus. Pak existuje $a \in \mathbb{Q}$, $\varphi(a) = 1$.

   $$1 = \varphi(a) = \varphi\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \varphi\left(\frac{a}{2}\right) + \varphi\left(\frac{a}{2}\right) = 2 \cdot \varphi\left(\frac{a}{2}\right),\ 1 = 2 \cdot \varphi\left(\frac{a}{2}\right)$$

   Ukázali jsme, že 1 je sudé číslo, spor. (Je třeba si uvědomit, že $\frac{a}{2} \in \mathbb{Q}$ a $\varphi\left(\frac{a}{2}\right) \in \mathbb{Z}$.)

2. Nechť G_1, G_2 jsou grupy, $\varphi : G_1 \to G_2$ je surjektivní homomorfismus. Jestliže $\ker \varphi = \{1\}$, pak φ je isomorfismus. Dokažte.

   Řešení. Předpokládejme, že $\ker(\varphi) = \{1\}$. Chceme: φ je isomorfismus.
   Víme již, že φ je surjektivní homomorfismus. Zbývá ukázat, že zobrazení φ je injekce.
   Nechť $x, y \in G_1$, $\varphi(x) = \varphi(y)$. Chceme: $x = y$.

   $$\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y^{-1}) = \varphi(x)(\varphi(y))^{-1} = \varphi(x)(\varphi(x))^{-1} = 1,\ \varphi(xy^{-1}) = 1$$

   Je tedy $xy^{-1} \in \ker(\varphi)$. Pak $xy^{-1} = 1$, $xy^{-1}y = 1 \cdot y$, $x \cdot 1 = y$, $x = y$.

3. Nechť n je kladné celé číslo. Nechť $GL(n, \mathbb{R})$ je množina všech čtvercových regulárních matic n-tého stupně nad $\mathbb{R}$.

   Dokažte: $GL(n, \mathbb{R})$ s operací násobení matic je grupa. (Poznámka: Grupa $GL(n, \mathbb{R})$ se nazývá obecná lineární grupa.)

   Řešení. Ukážeme nejprve, že násobení matic je operací na množině $GL(n, T)$ (T je těleso, například $T = \mathbb{R}$; $GL(n, T)$ je množina všech čtvercových regulárních matic n-tého stupně nad tělesem T):
   Nechť $A, B \in GL(n, T)$. Chceme: $AB \in GL(n, T)$.
   Jistě AB je čtvercová matice n-tého stupně nad tělesem T. Zbývá ukázat, že matice AB

je regulární.
Víme, že matice A, B jsou regulární. Proto $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$. Pak

$$|AB| = |A| \cdot |B| \neq 0$$

Tudíž matice AB je regulární.

Víme, že násobení čtvercových matic n-tého stupně je asociativní a má neutrální prvek E_n (jednotková matice n-tého stupně).
Je třeba ukázat, že $E_n \in GL(n, T)$. Avšak $|E_n| = 1$, takže $|E_n| \neq 0$, $E_n \in GL(n, T)$.
Buď $A \in GL(n, T)$. Je třeba ukázat, že existuje $B \in GL(n, T)$ s vlastností $AB = E_n$, $BA = E_n$.
K matici A (jelikož je regulární) existuje čtvercová matice n-tého stupně A^{-1} taková, že $AA^{-1} = E_n$, $A^{-1}A = E_n$
Je

$$1 = |E_n| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$$

Z toho plyne, že $|A^{-1}| \neq 0$, a tedy $A^{-1} \in GL(n, T)$. Vezmeme $B = A^{-1}$.

4. Nechť n je kladné celé číslo. Najděte nějaký surjektivní homomorfismus grupy $GL(n, \mathbb{R})$ na grupu $\mathbb{R}^\times$. (Poznámka: Grupa $GL(n, \mathbb{R})$ je zavedena v úloze číslo 3. Operací v grupě $\mathbb{R}^\times$ je násobení reálných čísel.)

Řešení. Definujme $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ takto: pro $A \in GL(n, \mathbb{R})$ je

$$\varphi(A) = |A|$$

Ukážeme, že φ je homomorfismus:
Nechť $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$. Chceme: $\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$. Počítejme:

$$\varphi(AB) = |AB| = |A| \cdot |B| = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$$

Ukážeme, že φ je surjekce:
Nechť $a \in \mathbb{R}^\times$. Hledáme matici $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tak, aby $\varphi(A) = a$. Buď

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(jedná se o čtvercovou matici n-tého stupně). Je $|A| = a \cdot 1 \cdots 1 = a$, takže A je regulární a tedy $A \in GL(n, \mathbb{R})$, a také $\varphi(A) = |A| = a$.

5. Uveďte příklad dvou čtyřprvkových grup, které nejsou isomorfní.

ŘEŠENÍ. Nechť $G_1 = \{1, i, -1, -i\}$. Pak G_1 spolu s operací násobení komplexních čísel je grupa.
Zdůvodnění: Nejprve musíme ukázat, že pro $x, y \in G_1$ je $xy \in G_1$. Do tabulky zapíšeme výsledky součinů xy:

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Z tabulky vidíme, že pro všechna $x, y \in G_1$ je $xy \in G_1$.
Operace násobení komplexních čísel je asociativní.
V G_1 existuje neutrální prvek – je to číslo 1.
Pro každé $x \in G_1$ existuje $y \in G_1$ tak, že $xy = 1$:
$1 \cdot 1 = 1$
$i \cdot (-i) = 1$, $(-i) \cdot i = 1$
$(-1) \cdot (-1) = 1$

Uvažme následující čtyři matice nad reálnými čísly:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Nechť $G_2 = \{E, A, B, C\}$. Pak G_2 spolu s operací násobení matic je grupa.
Zdůvodnění: Nejprve musíme ukázat, že pro $X, Y \in G_2$ je $XY \in G_2$. Nechť $X, Y \in G_2$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$$

Pak

$$XY = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & 0 \\ 0 & x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

Je $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{1, -1\}$, takže $x_1 y_1, x_2 y_2 \in \{1, -1\}$ a $XY \in G_2$.
Operace násobení čtvercových matic téhož stupně nad tělesem je asociativní.
V G_2 existuje neutrální prvek – je to matice E.
Pro každé $X \in G_2$ existuje $Y \in G_2$ tak, že $XY = YX = E$:

$$EE = E, \ AA = E, \ BB = E, \ CC = E$$

Ukážeme ještě, že grupy G_1, G_2 nejsou isomorfní. Postupujme sporem:
Předpokládejme, že $G_1 \cong G_2$. Nechť $\varphi : G_1 \to G_2$ je isomorfismus. Viděli jsme již, že pro každé $X \in G_2$ je $XX = E$. Počítejme:

$$\varphi(-1) = \varphi(i \cdot i) = \varphi(i) \cdot \varphi(i) = E, \ \varphi(-1) = E$$

Protože φ je isomorfismus, je $\varphi(1) = E$. Takže $\varphi(-1) = \varphi(1)$. Zobrazení φ je bijekce, což dává $-1 = 1$, spor.